

Feuille de TD 4

Intégrales Généralisées-1

Les exercices ou questions avec $\star$ sont importants, ceux avec $\star\star$ indispensables. On ne traitera pas toutes les questions dans les exercices composés de plusieurs questions similaires.

Exercice 1.- $\star\star$ -Intégrales de Riemann en 0 et à l' ∞ .

1. Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha \in]0, +\infty[$ de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

et donner, en cas de convergence, sa valeur.

2. Idem avec les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Exercice 2.- $\star\star$ -Intégrales de Bertrand en 0 et à l' ∞ . 1. Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha \in]0, +\infty[$ de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t |\ln t|^\alpha}$$

et donner, en cas de convergence, sa valeur.

Indication: Faire un changement de variables.

2. Idem avec l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t |\ln t|^\alpha}.$$

3. En comparant $\ln(1+u)$ et u lorsque $u \in [0, 1]$, donner la nature de l'intégrale, suivant les valeurs possibles de $\alpha > 0$.

$$\int_1^2 \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}.$$

4. Quelle est la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t |\ln t|^\alpha}.$$

5. Discuter de la nature des intégrales généralisées

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta} \text{ et } \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}.$$

lorsque $\alpha \in]0, +\infty[\setminus \{-1\}$ et β réel. Indication: Comparer l'intégrande avec $t^{-\alpha'}$ où α' du même côté de 1 que α .

Exercice 3.—1. Donner deux arguments distincts garantissant la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

Quelle est sa valeur ?

2. Déterminer, avec le minimum de calcul la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$. Traiter l'intégrale précédente au cas où n est un nombre réel > 0 .

Exercice 4.-*—On suppose que la fonction f , continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles à une limite ℓ non nulle en l'infini. Montrer qu'alors $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est divergente.

Indication: Séparer les cas $\ell > 0$ et $\ell < 0$, dans le premier cas, minorer f par $\ell/2$ sur un intervalle adéquat.

Exercice 5.—On suppose que vous ne connaissez pas la fonction arcsin, donner un argument garantissant la convergence de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ mais qui ne donne pas la valeur de cette intégrale.

Indication: Comparer $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ et $(1-t)^{-\frac{1}{2}}$ sur l'intervalle d'intégration.

Exercice 6.-*—Autour des densités γ et de la fonction Γ d'EULER.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Discuter de la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

En cas de convergence, on note sa valeur ¹ $\Gamma(x)$. Quel est le domaine de définition de la fonction Γ définie par cette expression ?

2. On suppose $x \in]0, +\infty[$, $\lambda > 0$. Discuter de la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda \cdot t} \frac{dt}{t}$$

et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$.

3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Indication: Faire, sur les intégrales partielles, une intégration par partie et passer à la limite dans les bornes ensuite !

4. Quelle est la valeur de $\Gamma(n+1)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$?

5. Montrer que la fonction Γ est croissante. Quelle est sa limite en $+\infty$.

6. On admet que la fonction Γ ainsi définie est continue ² sur $]0, +\infty[$. Donner un équivalent simple de $\Gamma(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

7. On admet que les dérivées de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$ s'obtiennent en dérivant formellement sous le signe intégrale. Quelles sont les intégrales obtenues ? Vérifier qu'elles sont convergentes.

Exercice 7.—Fonction B d'Euler.

1. A quelle condition sur les nombres réels p et q l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx$$

converge-t-elle ? On note $B(p, q)$ sa valeur. Quel est le domaine de définition de la fonction B définie par cette formule ?

2. Même question avec l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^{p-1} (1+x)^{q-1} dx$$

Exprimer cette intégrale en fonction de $B(p', q')$.

3. Par un changement de variable adéquat, établir une relation entre $B(p, p)$ et les intégrales de WALLIS pour certaines valeurs de p .

Exercice 8.—Longueur des courbes.

Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ est une courbe paramétrée de classe C^1 sur l'intervalle I (qu'il soit ouvert ou fermé), la distance parcourue par le mobile sur la trajectoire γ est par définition

$$D = \int_I |\gamma'(t)| dt,$$

cette intégrale étant, au besoin, à prendre au sens des intégrales généralisées ³.

1. Donner la distance parcourue par le mobile au cas où $I = [-\pi, \pi]$, $\gamma(s) = \cos s + i \sin s$.

2. Donner la distance parcourue par le mobile au cas où $I = \mathbb{R}$,

$$\gamma(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i \frac{2t}{1+t^2}$$

3. Quel est le lien entre les deux résultats précédents.

Indication: Tracer les courbes !

1. Il s'agit de la fonction Γ d'EULER

2. elle est de classe C^∞ , note culturelle

3. Si l'intégrale généralisée en question diverge vers $+\infty$, on dit que cette distance est infinie.