Devoir Surveillé 01

Le 21 septembre
durée 3h30

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits
La plus grande attention sera apportée à la qualité de la rédaction, syntaxe et orthographe comprise.
Numérotez les copies et questions et souligner ou $\boxed{\text{encadrez}}$ les résultats.
Vous pouvez utiliser les résultats des questions en amont d'une question donnée en la référençant clairement
Les calculs, même longs et fastidieux doivent figurer sur la copie

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice I

1. On considère pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n.e^{\frac{t}{2}}\,dt.$$

1.a. Calculer I_0.
1.b. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
1.c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

2. On considère maintenant la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

2.a. Quelle est la relation entre u_k et u_{k+1} ?
En déduire une fonction `S(n)` en langage `python` qui pour un n donné calcule la valeur S_n sans utiliser le codage de la puissance ou du factoriel.
2.b. Déduire de la question 1.c la convergence de la suite (S_n) et la valeur de sa limite.

Exercice II

Extrait du concours G2E 2019

On définit les suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel k, les relations suivantes :

$$u_{k+2} = (k+2)u_k,\ v_k = \frac{k!}{u_k^2} \text{ et } w_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(t)dt.$$

1.a. Démontrer que, pour tout entier naturel p, on a : $u_{2p} = 2^p p!$ et $u_{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

1.b. En déduire que, pour tout entier naturel k, on a : $u_k u_{k+1} = (k+1)!\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. Donner un équivalent simple de $v_k v_{k+1}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

3.a. Établir une relation de récurrence liant, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, v_{k+1} et v_{k-1}.

3.b. Calculer w_0, w_1 puis démontrer que la suite w vérifie la même relation de récurrence que v.

Indication:On pourra chercher une relation de récurrence en écrivant $\sin^{k+2} x = (1-\cos^2 x).\sin^k x$ et en intégrant par parties le produit $\cos x.(\cos x.\sin^k x)$.

3.c. En déduire que les suites v et w sont égales.

4.a. Démontrer que la suite w est décroissante.

4.b. En déduire que, pour tout entier naturel k, on a : $\dfrac{k}{k+1} \leq \dfrac{v_{k+1}}{v_k} \leq 1$.

4.c. En déduire également que $v_{k+1} \sim_{k\mapsto+\infty} v_k$ puis établir que, $\binom{2p}{p}$ désignant un coefficient binomial :

$$\binom{2p}{p} \sim_{p\mapsto+\infty} \frac{4^p}{\sqrt{p\pi}}.$$

Exercice III

Les trois parties de ce problème sont totalement indépendantes

Partie A
Une somme de Riemann

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}.$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 2$.

Partie B
D'autres sommes de Riemann

Soit $f$une fonction définie sur $]0,1]$, continue et décroissante sur $]0,1]$.
On considère la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et la fonction I définie sur $]0,1]$ par :

$$\forall x \in]0,1], I(x) = \int_x^1 f(t)\, dt.$$

B.1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

B.2. En additionnant les inégalités précédentes, démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} f(1) \leq r_n \leq I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

B.3. On suppose, de plus, que $\lim_{x \to 0} I(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) et $\lim_{x \to 0^+} x.f(x) = 0$.
Démontrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

B.4. Dans cette question, on pose $f(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{1}{2} \ln x$, pour tout réel $x \in]0, 1]$.

B.4.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$r_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right).$$

On rappelle que la somme des carrés des n premiers entiers naturels est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B.4.b. En utilisant les questions précédentes, démontrer que la suite $\left(\dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

On rappelle que la fonction $x \mapsto x.\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie C
Toujours des sommes de RIEMANN

C.1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(n.x)|\, dx = \frac{2}{n}.$$

C.2. Soit f une fonction continue et croissante sur $[0, \pi]$.

C.2.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a :

$$\frac{2}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x).|\sin(n.x)|\, dx \leq \frac{2}{n} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

C.2.b. En déduire un encadrement de $\int_0^\pi f(x).|\sin(nx)|\, dx$.

C.2.c. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi f(x).|\sin(nx)|\, dx$.

C.2.d. Obtiendrait-on le même résultat pour une fonction f continue et décroissante sur $[0, \pi]$?

Correction DS 01

Correction Ex.–1

1.a.

$$I_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\left[2e^{\frac{t}{2}}\right]_0^1 \quad i.e. \quad \boxed{I_0 = e^{\frac{1}{2}} - 1}$$

1.b. Rq : on peut avoir l'idée de montrer que la suite est monotone (ici décroissante) et bornée (ici minorée par 0), ce n'est pas difficile et ça nous donne la convergence de la suite, mais on ne connait pas la valeur de la limite.

Finalement il est plus rapide ici de conjecturer que la suite tend vers 0 (car le dénominateur $2^{n+1}(n+1)!$ tend vers $+\infty$) et de le montrer directement par majoration : Pour $t \in [0,1]$,

$$|(1-t)^n e^{\frac{t}{2}}| \leq e^{\frac{t}{2}} \leq e^{\frac{1}{2}}$$

et donc, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale,

$$0 \leq |I_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 |(1-t)^n e^{\frac{t}{2}}|\,dt \leq \frac{1}{2^{n+1}n!} \leq \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^n n!}$$

Comme $\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^n n!} \to 0$ quand $n \to +\infty$, par le thm d'encadrement, on en déduit que $\boxed{I_n \to 0 \text{ quand } n \to 0}$

1.c. Soit n fixé dans $\mathbb{N}$, on va faire une intégration par partie (IPP) sur $A_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^{\frac{t}{2}}\,dt$.

On pose, pour $t \in [0,1]$,

— $u(t) = (1-t)^{n+1}$ et donc $u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$ (avec u de classe C^1 sur $[0,1]$)

— $v'(t) = e^{\frac{t}{2}}$, il suffit que $v(t) = 2e^{\frac{t}{2}}$ (avec v de classe C^1 sur $[0,1]$)

alors

$$A_{n+1} = \left[2(1-t)^{n+1}e^{\frac{t}{2}}\right]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,dt = -2 + 2(n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,dt$$

Donc

$$I_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}(n+1)!}A_{n+1} = \frac{-1}{2^{n+1}(n+1)!} + \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,dt$$

et finalement, $\boxed{I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}}$

2.a. On a $u_{k+1} = u_k \cdot \frac{1}{2(k+1)}$

On en déduit le script qui calcule à la fois les termes de u et ceux de S en une boucle.

Listing 1 – python/somme.py

```python
def S(n):
    u=1 # initialisation de u avec u_0
    s=1 # initialisation de s avec u_0
    for k in range (n):
        u=u/(2*(k+1))  #on calcule u_{k+1} et on rajoute a s
        s=s+u
    return(s)
```

2.b. En reformulant 1.c, on a

$$\forall k \geq 1,\ \frac{1}{2^k k!} = I_{k-1} - I_k$$

et donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (I_{k-1} - I_k) = 1 + I_0 - I_n = e^{\frac{1}{2}} - I_n$$

Or $I_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc $\boxed{\text{La suite } (S_n) \text{ converge vers } e^{\frac{1}{2}}.}$

Rq : Les $5/2$ ont bien sûr reconnu la série exponentielle pour $x = \frac{1}{2}$. On dit (on le verra plus tard) que la série de terme général $\frac{1}{2^k k!}$ converge et que sa somme vaut $e^{\frac{1}{2}}$, on écrit $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k k!} = e^{\frac{1}{2}}$.

Correction Ex.–2

1.a. Pour tout entier naturel p, on appelle $\mathscr{P}(p)$ l'hypothèse suivante :

$$\mathscr{P}(p) : \text{"}u_{2p} = 2^p p! \text{ et } u_{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\text{"}$$

On note que $\mathscr{P}(0)$ est vraie car on a vu que $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $2^0 0! = 1$ et $\frac{(2\times 0+1)!}{2^0 0!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

On suppose $\mathscr{P}(p)$ vraie pour un certain entier naturel p. En utilisant la définition de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} u_{2(p+1)} &= u_{2p+2} \\ &= (2p+2)u_{2p} \\ \text{(d'après } \mathscr{P}(p)) &= (2p+2)2^p p! \\ &= 2(p+1)2^p p! \\ &= (2\times 2^p)\times((p+1)\times p!) \\ &= 2^{p+1}(p+1)! \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_{2(p+1)+1} &= u_{2p+3} \\ &= (2p+3)u_{2p+1} \\ \text{d'après } \mathscr{P}(p) &= (2p+3)\frac{(2p+1)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{(2p+3)(2p+2)(2p+1)!}{(2p+2)2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{(2p+3)!}{2(p+1)2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= (2p+3)\frac{(2(p+1)+1)!}{2^{p+1}(p+1)!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$\mathscr{P}(p+1)$ est donc vraie.

On a donc prouvé que $\mathscr{P}(0)$ est vraie et, pour tout entier naturel p, $\mathscr{P}(p)$ implique $\mathscr{P}(p+1)$. $\mathscr{P}(p)$ est donc vraie pour tout entier naturel p d'après le principe de récurrence.

$$\boxed{\text{On a donc bien prouvé que, pour tout entier naturel } p, \text{ on a } u_{2p} = 2^p p! \text{ et } u_{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

1.b. Soit k un entier naturel.

— Supposons k pair et soit p l'entier naturel tel que $2p = k$. On a :

$$\begin{aligned} u_k u_{k+1} &= u_{2p}u_{2p+1} \\ &= 2^p p! \times \frac{(2p+1)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \text{(d'après la question 1.a)} &= (2p+1)!\sqrt{\frac{\pi}{2}} = (k+1)!\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

— Supposons k impair et soit p l'entier naturel tel que $2p+1=k$. On a :

$$\begin{aligned}
u_k u_{k+1} &= u_{2p+1}u_{2p+2}\\
\text{(d'après la question 1.a)} &= \frac{(2p+1)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \times 2^{p+1}(p+1)!\\
&= 2(p+1)(2p+1)!\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\
&= (2p+2)!\sqrt{\frac{\pi}{2}} = (k+1)!\sqrt{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc prouvé que, pour tout } k \text{ entier naturel,} u_k u_{k+1} = (k+1)!\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

2. Soit k un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned}
v_k v_{k+1} &= \frac{k!(k+1)!}{u_k^2 u_{k+1}^2}\\
\text{(d'après la question 1.b)} &= \frac{k!(k+1)!}{((k+1)!)^2 \frac{\pi}{2}}\\
&= 2\frac{k!}{(k+1)!\pi} \qquad = \frac{2}{(k+1)\pi}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc : } v_k v_{k+1} \sim_{k \mapsto +\infty} \frac{2}{k\pi}.}$$

3.a. Soit k un entier naturel non nul. On a :

$$\begin{aligned}
v_{k+1} &= \frac{(k+1)!}{u_{k+1}^2}\\
\text{(définition de } (u_k)_{k\in\mathbb{N}}) &= \frac{(k+1)!}{(k+1)^2 u_{k-1}^2}\\
&= \frac{k!}{(k+1)\frac{(k-1)!}{v_{k-1}}}\\
&= \frac{v_{k-1}.k!}{(k+1)(k-1)!} \quad = \frac{k.v_{k-1}}{k+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^\star, \text{ on a : } v_{k+1} = \frac{kv_{k-1}}{k+1}.}$$

3.b. On a :

$$\begin{aligned}
w_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\\
&= 1
\end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}
w_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Soit k un entier naturel non nul. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}w_{k+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k+1}(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-1}(t)(1-\cos^2(t))\,dt \\
\text{(par linéarité)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-1}(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-1}(t)\cos(t)\cos(t)\,dt \\
\text{(par ipp justifiée ci-après)} &= \frac{\pi}{2}w_{k-1} - \left[\frac{\sin^k(t)}{k}\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^k(t)}{k}\sin(t)\,dt \\
&= \frac{\pi}{2}w_{k-1} - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{k+1}(t)}{k}\,dt \\
&= \frac{\pi}{2}w_{k-1} - \frac{\pi}{2k}w_{k+1}
\end{aligned}$$

Cela donne donc $w_{k+1} = w_{k-1} - \frac{w_{k+1}}{k}$, soit $w_{k+1} = \frac{kw_{k-1}}{k+1}$.

L'intégration par parties est justifiée car $t \mapsto \frac{\sin^k(t)}{k}$ et cos sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et car $k \neq 0$.

$$\boxed{\text{On a donc prouvé que } w_0 = 1,\ w_1 = \frac{2}{\pi} \text{ et la suite } w \text{ vérifie la même relation de récurrence que } v.}$$

3.c. Pour tout entier naturel k, on appelle $\mathscr{P}(k)$ l'hypothèse suivante :

$$\mathscr{P}(k) : \text{" } v_k = w_k \text{ et } v_{k+1} = w_{k+1}\text{"}$$

On vient de voir que $w_0 = 1$, $w_1 = \frac{2}{\pi}$. Or $v_0 = 1$ et $v_1 = \frac{2}{\pi}$ car $v_k = \frac{1}{u_0^2}$ et $v_k = \frac{1}{u_1^2}$ et on a vu que $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

On suppose $\mathscr{P}(k)$ vraie pour un certain entier naturel k. On sait déjà que $v_{k+1} = w_{k+1}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
v_{k+2} &= \frac{(k+1)v_k}{k+2} \text{ d'après la question 3.a} \\
&= \frac{(k+1)w_k}{k+2} \text{ d'après } \mathscr{P}(k) \\
&= w_{k+2} \text{ d'après la question 3.b}
\end{aligned}$$

$\mathscr{P}(k+1)$ est donc vraie.

On a donc prouvé que $\mathscr{P}(0)$ est vraie et, pour tout entier naturel k, $\mathscr{P}(k)$ implique $\mathscr{P}(k+1)$. $\mathscr{P}(k)$ est donc vraie pour tout entier naturel k d'après le principe de récurrence. Pour tout entier naturel k, on a donc $v_k = w_k$ d'où ce résultat :

$$\boxed{\text{Les suites } v \text{ et } w \text{ sont égales.}}$$

4.a. Soit k un entier naturel. On sait que $\sin \leq 1$. Or, $\sin^k$ est positif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\sin^{k+1}(t) \leq \sin^k(t).$$

Par croissance de l'intégration, que l'on peut invoquer car les bornes sont dans l'ordre croissant ($0 < \frac{\pi}{2}$) et $\sin^{k+1}$ et $\sin^k$ sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k+1}(t)\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(t)\,dt$$

Comme $\frac{2}{\pi} \geq 0$, on en déduit que $w_{k+1} \leq w_k$ soit :

$$\boxed{\text{La suite } w \text{ est décroissante.}}$$

4.b. Soit k un entier naturel.

— D'après les deux dernières questions, on peut affirmer que la suite v est décroissante et donc :

$$v_{k+1} \leq v_k$$

Or, la suite v est strictement positive, on en déduit :

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} \leq 1.$$

— Si k est non nul, on a $v_k \leq v_{k-1}$ (car la suite v est décroissante) donc, comme $\frac{k}{k+1} > 0$, cela donne :

$$\frac{k}{k+1} v_k \leq \frac{k}{k+1} v_{k-1}$$

soit, en utilisant la question 2)a) de cette partie, l'inégalité $\frac{k}{k+1} v_k \leq v_{k+1}$, puis, comme la suite v est strictement positive, l'inégalité :

$$\frac{k}{k+1} \leq \frac{v_{k+1}}{v_k}$$

Comme $\frac{v_1}{v_0}$ est positif, on constate que cette inégalité est vraie aussi lorsque $k = 0$.

$$\boxed{\text{On a prouvé que, pour tout entier naturel } k,\ \frac{k}{k+1} \leq \frac{v_{k+1}}{v_k} \leq 1.}$$

4.c. Par quotient (en utilisant les équivalents), $\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right) = 1$. De plus, $\lim_{k \to +\infty} (1) = 1$, on en déduit, par le théorème des Gendarmes et avec l' encadrement de la question précédente, que $\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) = 1$. Cela signifie que $v_{k+1} \sim_{k \mapsto +\infty} v_k$. On en déduit que :

$$v_{2p+1} \sim_{p \mapsto +\infty} v_{2p}$$

soit, par définition de la suite v, l'équivalent suivant :

$$\frac{(2p+1)!}{u_{2p+1}^2} \sim_{p \mapsto +\infty} \frac{(2p)!}{u_{2p}^2}$$

donc $2p+1 \sim_{p \mapsto +\infty} \frac{u_{2p+1}^2}{u_{2p}^2}$, ce qui, d'après la question 1.a, donne :

$$\sqrt{2p} \sim_{p \mapsto +\infty} \frac{(2p+1)!}{2^p p! 2^p p!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

soit $\sqrt{2p} \sim_{p \mapsto +\infty} \frac{(2p)! 2p}{4^p (p!)^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ puis :

$$\frac{4^p \sqrt{2p}}{2p} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sim_{p \mapsto +\infty} \frac{(2p)!}{(p!)^2}$$

ce qui entraîne que : $\frac{4^p \sqrt{2p}}{2p} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sim_{p \mapsto +\infty} \binom{2p}{p}$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \binom{2p}{p} \sim_{p \mapsto +\infty} \frac{4^p}{\sqrt{p\pi}}.}$$

Correction Ex.–3

Partie A

Une somme de RIEMANN

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, par le changement d'indice $k = j - n$,

$$u_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k}{n}+1}.$$

On reconnait en cette dernière formule une somme de RIEMANN d'ordre n pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ (continue !) sur l'intervalle $[0,1]$. Par le théorème des sommes de RIEMANN, on a donc

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2$$

Partie B

D'autres sommes de RIEMANN

B.1. Soit $n \geq 2$ et $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, alors, comme f est décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Par croissance de l'intégration et du fait que la longueur de l'intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ est $\frac{1}{n}$, on obtient

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\, dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\, dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\, dt$$

puis

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

B.2. En additionnant les inégalités précédentes pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient, par CHASLES sur la somme centrale,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Soit, après un décalage d'indice dans la somme la plus à gauche, et compensation pour retrouver r_n à gauche et à droite,

$$r_n - f(\frac{1}{n}) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq r_n - \frac{1}{n} f(1)$$

et donc, après réorganisation :

$$\forall n \geq 2, I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} f(1) \leq r_n \leq I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

B.3. Si on suppose, de plus, que $\lim_{x\to 0} I(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) et $\lim_{x\to 0^+} x.f(x) = 0$ alors, par opérations sur les limites,

$$I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} f(1) \overset{n\to+\infty}{\to} \ell \text{ et } I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \overset{n\to+\infty}{\to} \ell$$

Par le théorème des gendarmes, il vient que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et plus précisément que :

$$r_n \overset{n\to+\infty}{\to} \ell.$$

B.4. Dans cette question, on pose $f(x)=\frac{x^2-1}{4}-\frac{1}{2}\ln x$, pour tout réel $x\in\,]0,1]$.
B.4.a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, par définition de r_n, on a

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{4}\frac{k}{n}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right] \\ \text{(règle } \ln(a.b)=\ln a+\ln b\text{)} &= \frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k+\frac{1}{2n}n.\ln n \\ \text{(formule rappelée, règles ln)} &= \frac{1}{4n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}\ln(n!)+\frac{1}{2n}\ln n^n \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}n\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right). \end{aligned}$$

B.4.b. En utilisant les questions précédentes,
- On démontre, en utilisant B.3, que la suite (r_n) converge vers une certaine limite ℓ ;
- On aura alors en reformulant l'égalité précédente puis en passant à la limite que

$$\ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)=+\frac{2(n+1)(2n+1)}{24n^2}-\frac{1}{2}-2r_n \overset{n\to+\infty}{\to} -\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-2\ell$$

- Il nous restera donc à calculer ℓ puis à passer la limite précédente à l'exponentielle pour conclure.

Pour montrer que (r_n) converge et déterminer sa limite ℓ, on vérifie que

1. La fonction f est continue, décroissante, sur $]0,1]$: La continuité (en fait le caractère $\mathscr{C}^\infty$) sur $]0,1]$ est évidente par les théorèmes opératoires sachant que l'on a affaire à une combinaison linéaire d'un polynôme et de la fonction ln. On a par ailleurs

$$\forall x\in\,]0,1]\,,\, f'(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})=\frac{1}{2x}(x^2-1)\leq 0$$

   La fonction f' étant négative sur l'intervalle d'étude, la fonction f y est décroissante.
2. $x.f(x)=x.\frac{x^2-1}{4}-\frac{1}{2}x.\ln x \overset{x\to 0^+}{\to} 0$, ce qui est clair essentiellement du fait des croissances comparées $(x\ln x \overset{x\to 0^+}{\to} 0)$;
3. On a pour $0<x\leq 1$, par intégration, puis par croissances comparées,

$$I(x)=-\left(\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}.x-\frac{1}{2}(x.\ln x-x)\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\overset{x\to 0^+}{\to}\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$$

4. On a donc, par la question B.3 que $r_n\to\ell=\frac{1}{3}$

En conclusion, on a

$$\ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)\overset{n\to+\infty}{\to}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=-1$$

et donc, en passant à l'exponentielle,

$$\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)\overset{n\to+\infty}{\to} e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Partie C

Toujours des sommes de RIEMANN

C.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0,\dots,n-1\}$, on a, en effectuant d'abord le changement de variable linéaire $u = n.x$, $du = n.dx$, puis le changement de variable affine $t = u - k\pi$:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(n.x)|\, dx &=& \displaystyle\frac{1}{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u|\, du \\ (\text{on a } |\sin(t+k\pi)| = |\sin t|) &=& \displaystyle\frac{1}{n}\int_0^{\pi} |\sin t|\, dt \\ (\text{on a } \forall t \in [0,\pi], \sin t \geq 0) &=& \displaystyle\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin t\, dt \\ &=& \displaystyle\frac{1}{n}[-\cos t]_0^{\pi} \boxed{= \frac{2}{n}} \end{array}$$

C.2.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0,\dots,n-1\}$, on a, du fait de la croissance de f sur l'intervalle $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$:

$$\forall x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right], f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

et donc, en multipliant par $|\sin(n.x)| \geq 0$,

$$\forall x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right], f\left(\frac{k\pi}{n}\right).|\sin(n.x)| \leq f(x).|\sin(n.x)| \leq f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).|\sin(n.x)|$$

Par croissance de l'intégrale, en intégrant cette inégalité sur $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$,

$$f\left(\frac{k\pi}{n}\right).\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(n.x)|\, dx \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x).|\sin(n.x)|\, dx \leq f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(n.x)|\, dx$$

et finalement, en utilisant C.1,

$$\frac{2}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x).|\sin(n.x)|\, dx \leq \frac{2}{n}f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

C.2.b. En sommant ces inégalités pour toutes les valeurs de $k \in \{0,\dots,n-1\}$, on obtient,

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x).|\sin(n.x)|\, dx \leq \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

puis, par CHASLES et décalage d'indice dans la somme de droite,

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_0^{\pi} f(x).|\sin(n.x)|\, dx \leq \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

C.2.c. Comme f est continue sur $[0,\pi]$, les sommes de RIEMANN à gauche et à droite de cet encadrement ont toutes deux même limite, à savoir

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \to \int_0^1 f(\pi.t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx \text{ et } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \to \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

et donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x).|\sin(nx)|\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

C.2.d. Pour une fonction f continue et décroissante sur $[0,\pi]$, on obtient le même résultat, le seul point changeant étant le renversement de toutes les inégalités.