Devoir Surveillé 02

Le 12 Octobre
durée 3h30

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits
La plus grande attention sera apportée à la qualité de la rédaction, syntaxe et orthographe comprise.
Numérotez les copies et questions et souligner ou encadrez les résultats.
Vous pouvez utiliser les résultats des questions en amont d'une question donnée en la référençant clairement
Les calculs, même longs et fastidieux doivent figurer sur la copie

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice I

On désigne par φ une application définie et continue sur $]0,+\infty[$ et à valeurs réelles telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\varphi(t)|}{1+t^2}\, dt$ soit convergente et on lui associe la fonction f d'une variable réelle définie par la formule :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) \varphi(t)\, dt.$$

1.a. Montrer que pour tous $x > 0$, $t > 0$,

$$\left| \frac{tx-1}{x+t} \right| \leq x + \frac{1}{x}$$

1.b. Montrer que f est définie sur $]0,+\infty[$.

Indication:On pourra démontrer que l'intégrale définissant $f(x)$ est absolument convergente.

2. Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}\, dt$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, pour de telles valeurs de α, on désignera par f_α l'application définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) t^\alpha\, dt$$

3. Exprimer f_0 à l'aide des fonctions usuelles.

4. On suppose que $\alpha \in]-1,0[$.

Pour $x > 0$, prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t}\, dt$ et, à l'aide du changement de variable $t = x.u$, l'exprimer en fonction de x^α et d'un réel ne dépendant que de α .

En déduire l'existence de c et d, réels ne dépendant que de α, tels que :

$$\forall x > 0, \quad f_\alpha(x) = c.x^\alpha + d$$

Préciser le signe de c.

5. On suppose que $\alpha \in]0,1[$.

On admet aussi la convergence de toutes les nouvelles intégrales généralisées apparaissant dans les formules suivantes, à savoir

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\, dt, \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)}\, dt, \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\, dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(\frac{x}{2}+t)(x+t)^2}\, dt$$

5.a. Lorsque x et h sont des réels tels que $x > 0$, $x+h > 0$ et $h \neq 0$, vérifier les relations :

$$\frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)}\, dt$$

et

$$\frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\, dt = -h.\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\, dt$$

5.b. En déduire que lorsque $-\frac{x}{2} < h$, $h \neq 0$,

$$\left|\frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\, dt\right| \leq |h|.\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(\frac{x}{2}+t)(x+t)^2}\, dt$$

et montrer que f_α est dérivable en $x \in]0,+\infty[$ avec $\forall x > 0, \quad f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\, dt$.

5.c. Justifier à l'aide du changement de variable $t = x.u$, que $\forall x > 0, \quad f'_\alpha(x) = f'_\alpha(1).x^{\alpha-1}$.

En déduire l'existence de c et d, réels ne dépendant que de α, tels que :

$$\forall x > 0, \quad f_\alpha(x) = c.x^\alpha + d$$

Préciser le signe de c.

Exercice II

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

Les réponses numériques qui sont des fractions rationnelles seront données sous forme réduite.

Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0.

À partir de l'instant $n = 0$, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant :

— elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

— elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{4}$;

— elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Les différents sauts sont supposés indépendants.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les variables aléatoires suivantes :

— S_n est égale au nombre d'unités sautées lors du n-ième saut ;

— X_n est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des n premiers sauts ;

— Y_n est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des n premiers sauts ;

— Z_n est égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des n premiers sauts ;

— A_n est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son n-ième saut.

1. Donner la loi de la variable aléatoire A_1. Calculer $\mathbb{E}(A_1)$ et $\mathbb{V}(A_1)$.

2.a. Vérifier que $A_2 = S_1 + S_2$ et calculer la loi du couple (S_1, S_2) puis de A_2. On présentera les résultats sous forme de tableaux.

2.b. Calculer $\mathbb{E}(A_2)$.

3. On rappelle qu'en Python/Numpy, l'instruction `numpy.random.rand()` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, *i.e.* retourne un nombre de l'intervalle $[0,1]$ sans privilégier de zone particulière dans cet intervalle.

Compléter (en la recopiant sur la copie) la fonction suivante pour qu'elle simule (et retourne) les `N` (`N` vaut 100 par défaut) premiers déplacements de la puce.

```
def S(N=100):
    s = [0]*(N+1)
    for k in range(N):
        u = numpy.random.rand()
        if u <= ..... :
            s[k] = 1
        elif u <= ..... :
            s[k] = 2
        else :
            s[k] = 3
    return s
```

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, reconnaître les lois de X_n, Y_n et Z_n. Montrer que $X_n + Y_n + Z_n = n$ et justifier que $X_n + Y_n$, suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant les valeurs de $\mathbb{V}(X_n)$, $V(Y_n)$ et $\mathbb{V}(X_n + Y_n)$, déterminer la covariance $\mathbb{C}ov(X_n, Y_n)$.

Les v.a. X_n et Y_n ne sont-elles indépendantes ?

6.a. Exprimer A_n, en fonction de X_n, Y_n et Z_n et montrer que $\mathbb{E}(A_n) = \frac{7}{4}.n$.

6.b. Exprimer A_n, en fonction de X_n, et Y_n et calculer $\mathbb{V}(A_n)$.

6.c. Calculer $\mathbb{C}ov(A_n, X_n)$.

7. On rappelle que si `y = `$[y_0, y_1, , \ldots, y_n]$ est une liste de nombres, l'instruction (après importation du module `matplotlib.pyplot`) `matplotlib.pyplot.plot(y)` permet de tracer la ligne brisée joignant successivement les points $(0, y_0), \ldots, (n, y_n)$.

On complète le programme Python de la question 3 en y ajoutant les lignes suivantes :

```
Sauts = S(N=200)
A = [0]*(len(Sauts))
for k in range(1,len(A)):
    A[k] = A[k-1] + Sauts[k]

matplotlib.pyplot.plot(A)
```

Quelle sortie graphique obtient-on ?

En supposant que chaque `A[k]` est proche de l'espérance théorique $\mathbb{E}(A_k)$, quelle est l'allure de la courbe tracée (Faire un graphique explicatif.) ?

Exercice III

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$. Si Y est une variable aléatoire *rélle* admettant une espérance, on note cette espérance $\mathbb{E}(Y)$.

Partie A

Préliminaires : Fonction logarithme en base 2 et propriété de convexité.

A.1. La fonction logarithme en base 2, notée $\log_2$, est définie sur $]0, +\infty[$ par la formule :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

où ln désigne, à l'habitude, la fonction logarithme « népérien ».

A.1.a. Montrer que
$$\forall (x,y) \in (]0,+\infty[)^2, \log_2(x.y) = \log_2(x) + \log_2(y).$$
A.1.b. Montrer que
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \log_2(2^\alpha) = \alpha.$$

A.1.c. Quel est le signe de la fonction $\log_2$ sur l'intervalle $]0,1[$?
A.2. Fonctions convexes sur un intervalle. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur I sera dite *convexe* sur I si
$$\forall x \in I, \phi''(x) \geq 0$$
A.2.a. Montrer que la fonction ϕ définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = 2^t$ est convexe sur $I = \mathbb{R}$.
A.2.b. Montrer que la fonction $\phi = -\log_2$ est convexe sur $I =]0,+\infty[$.
A.2.c. On suppose que $\phi : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle non trivial I y est convexe. Montrer que l'on a
$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], \phi\left(t.x + (1-t).y\right) \leq t.\phi\left(x\right) + (1-t).\phi\left(y\right)$$
Indication:On définira et étudiera (en construisant tableau de signes/variations de g'' et g') la fonction g définie, après avoir fixé $x, y \in I$, par
$$\forall t \in [0,1], g(t) = t.\phi\left(x\right) + (1-t).\phi\left(y\right) - \phi\left(t.x + (1-t).y\right)$$
On pourra aussi remarquer, en le justifiant, que g' s'annule au moins une fois sur $\in]0,1[$.

⋆⋆⋆

On admet l'énoncé suivant, se déduisant du précédent par une récurrence élaborée :
Si $\phi : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle non trivial I, y est convexe alors
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1,\dots,x_n) \in I^n, \forall (t_1,\dots,t_n) \in ([0,1])^n, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \Rightarrow \phi\left(\sum_{i=1}^n t_i.x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i.\phi\left(x_i\right) \qquad \text{(Cvx)}$$
⋆⋆⋆

Partie B

Entropie d'une variable aléatoire réelle discrète.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini de nombres réels non vide. On dit que X est une variable aléatoire dont la loi est à *support* A, si X est à valeurs dans A et si pour tout $x \in A$, $\mathbb{P}(X = x) > 0$.
B.1. Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{0,1,2,\dots,n\}$ où n est un entier naturel. On appelle *entropie probabiliste* de X le réel
$$H(X) = -\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X=k)\log_2 \mathbb{P}(X=k). \qquad (+)$$
B.1.a. On définit la fonction $g : \{0,\dots,n\} \to \mathbb{R}$ en posant $g(k) = \log_2 \mathbb{P}(X=k)$ pour k élément de $\{0,\dots,n\}$. Montrer que $H(X) = -\mathbb{E}(g(X))$.
B.1.b. Montrer que $H(X) \geq 0$.
B.1.c. Soit p un réel tel que $0 < p < 1$. On suppose dans cette question que X suit la loi de BERNOULLI $\mathscr{B}(p)$.
1.c.i. Calculer $H(X)$ en fonction de p. On note ψ la fonction qui, à p, associe $H(X)$.
1.c.ii. Montrer que $-\psi$ est convexe sur $]0,1[$.
1.c.iii. Déterminer la valeur p_0 où ψ est maximale.

B.1.d. On suppose dans cette question que la loi de X est à support $\{0,1,2,3\}$ avec les probabilités

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2};\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{4};\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{8}.$$

Calculer $H(X)$.

B.2. On souhaite écrire une fonction `Entropie` en Python/Numpy pour calculer l'entropie d'une variable aléatoire X dont le support de la loi est de la forme $A=\{0,\dots,n\}$ où n est un entier naturel. On suppose que le vecteur `P` passé en argument est tel que pour tout k de A, `P[k]` $=\mathbb{P}(X=k)$. Compléter le corps de la fonction ci-dessous d'argument `P` qui renvoie l'entropie de X, c'est-à-dire $-\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\log_2\mathbb{P}(X=k)$.

```
def Entropie(P):
    """
    Retourne l'entropie de la v.a X à support {0,..,n} dont la loi est décrite
    par le vecteur P de longueur n+1
    """
```

Si nécessaire, on pourra utiliser l'instruction `len(P)` qui donne le nombre d'éléments de `P` et la fonction `np.log`, qui, une fois le module `numpy` importé sous l'alias `np`, calcule le logarithme *népérien* de son argument.

On souhaite maintenant démontrer quelques inégalités concernant l'entropie.

B.3. On commence par une inégalité générale, appelée Inégalité de JENSEN.

Soit $n\geq 1$. Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ où les x_i sont des nombres distincts de $\mathbb{R}$. On pose $\mathbb{P}(X=x_i)=p_i$. Montrer que pour tout $0\leq i\leq n$, on a $p_i<1$.

On suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant les nombres x_i et $\phi : I\to\mathbb{R}$ est une fonction convexe. Justifier que $\mathbb{E}(X)\in I$ et que

$$\phi\left(\mathbb{E}(X)\right)\leq\mathbb{E}(\phi(X))$$

B.4. Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{0,\dots,n\}$. On pose, pour k tel que $0\leq k\leq n$, $p_k=\mathbb{P}(X=k)$.

B.4.a. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}p_k\log_2\frac{1}{(n+1)p_k}\leq\log_2\left(\sum_{k=0}^{n}p_k\frac{1}{(n+1)p_k}\right)=0$$

B.4.b. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}p_k\log_2[(n+1)p_k]=\log_2(n+1)-H(X)$$

B.4.c. Montrer que $H(X)\leq\log_2(n+1)$.

B.4.d. On suppose que X suit la loi uniforme sur $\{0,\dots,n\}$. Calculer $H(X)$.

B.5. Soient X et Y deux variables aléatoires de même loi à support $\{0,\dots,n\}$. On suppose en outre X et Y indépendantes.

B.5.a. Montrer que $\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)^2$.

B.5.b. On pose $v(k)=\mathbb{P}(X=k)$ pour tout k élément de $\{0,\dots,n\}$. Montrer que

$$2^{\mathbb{E}(\log_2 v(X))}\leq\mathbb{E}(2^{\log_2 v(X)})=\mathbb{E}(v(X)).$$

B.5.c. En déduire que $2^{-H(X)}\leq\mathbb{P}(X=Y)$.

B.5.d. Donner un exemple de loi où l'inégalité précédente est une égalité.

Correction DS 02

Correction Ex.–1 On désigne par φ une application définie et continue sur $]0,+\infty[$ et à valeurs positives telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}\,dt$ soit convergente et on lui associe la fonction f d'une variable réelle définie par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)\,dt$.

1.a. Soit $x > 0$, $t > 0$, on a, par inégalité triangulaire

$$\left|\frac{tx-1}{x+t}\right| \leq \frac{tx}{x+t} + \frac{1}{t+x}$$

On a $\frac{tx}{x+t} \leq \frac{tx}{t} = x$ car $x > 0$ et $\frac{1}{t+x} \leq \frac{1}{x}$ car $t > 0$. En sommant ces deux inégalités, il vient que

$$\left|\frac{tx-1}{x+t}\right| \leq x + \frac{1}{x}$$

1.b. Pour montrer que f est définie sur $]0,+\infty[$, il suffit de démontrer que pour un nombre réel $x > 0$, l'intégrale généralisée à un sens et est convergente. On va montrer qu'elle est en fait absolument convergente.

Fixons un nombre réel $x > 0$. L'intégrande $t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)$ est clairement continue sur $]0,+\infty[$ essentiellement car les dénominateurs ne s'annulent pas sur cet intervalle et du fait de la continuité de φ sur cet intervalle.

On a, pour $t > 0$,

$$\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t) = \frac{tx-1}{(1+t^2)(x+t)}\varphi(t)$$

Or $\left|\frac{tx-1}{x+t}\right| \leq x + \frac{1}{x}$ et donc, d'après la question précédente,

$$\left|\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)\right| \leq (x+\frac{1}{x})\frac{|\varphi(t)|}{1+t^2}$$

Par hypothèse, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\varphi(t)|}{1+t^2}\,dt$ est convergente et donc, par le théorème de comparaison (pour les intégrales généralisées à intégrande positive),

$$\int_0^{+\infty} \left|\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)\right|\,dt$$

est convergente.

Par le théorème $ACV \Rightarrow CV$,

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)\,dt$$

est convergente.

2. L'intégrande $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t^2}$ est positive, continue sur $]0,+\infty[$, il y a, suivant les valeurs de α, des problèmes de convergence d'intégrale en 0 et en $+\infty$.

— En 0. On a $\frac{t^\alpha}{1+t^2} \sim_{t\to 0^+} t^\alpha$. Sachant que

$$\int_0^1 t^\alpha \, dt \overset{\text{sens limites}}{=} \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha . t^{\alpha+1}}\right]_0^1 & \text{si } \alpha \neq -1 \\ [\ln x]_0^1 & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

CV ssi $\alpha > -1$, on va montrer que $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^2} \, dt$ est CV ssi $\alpha > -1$. On a

$$\forall 0 < t \leq 1, 0 \leq \frac{t^\alpha}{2} \leq \frac{t^\alpha}{1+t^2} \leq t^\alpha$$

1. Dans le cas où $\alpha \leq -1$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2} \, dt$ est divergente et donc l'inégalité de gauche implique, via le théorème de comparaison, que $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^2} \, dt$ est divergente.
2. Dans le cas où $\alpha > -1$, l'intégrale $\int_0^1 t^\alpha \, dt$ est convergente et donc l'inégalité de droite implique, via le théorème de comparaison, que $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^2} \, dt$ est convergente.

— En $+\infty$. On a $\frac{t^\alpha}{1+t^2} \sim_{t\to +\infty} t^{\alpha-2}$. Sachant que

$$\int_1^{+\infty} t^\beta \, dt \overset{\text{sens limites}}{=} \begin{cases} \left[\frac{1}{\beta . t^{\beta+1}}\right]_1^{+\infty} & \text{si } \beta \neq -1 \\ [\ln x]_1^{+\infty} & \text{si } \beta = -1 \end{cases}$$

CV ssi $\beta < -1$, on va montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} \, dt$ est CV ssi $\alpha - 2 < -1$, *i.e.* $\alpha < 1$. On a, du fait que lorsque $t \geq 1$, $0 < \frac{1}{t^2} \leq 1$, que

$$\forall 1 \leq t, 0 \leq \frac{t^{\alpha-2}}{2} \leq \frac{t^{\alpha-2}}{1+\frac{1}{t^2}} \leq t^{\alpha-2}$$

1. Dans le cas où $\alpha \geq 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha-2}}{2} \, dt$ est divergente et donc l'inégalité de gauche implique, via le théorème de comparaison, que $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} \, dt$ est divergente.
2. Dans le cas où $\alpha < 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-2} \, dt$ est convergente et donc l'inégalité de droite implique, via le théorème de comparaison, que $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} \, dt$ est convergente.

— En faisant la synthèse des deux cas, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} \, dt$ converge si et seulement si $\alpha \in]-1,1[$.

Dans toute la suite du problème, pour de telles valeurs de α, on désignera par f_α l'application définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) t^\alpha \, dt$$

3. On a, pour $x > 0$,

$$f_0(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) dt$$

L'intégrande est continue sur $[0,+\infty[$. On a, pour $T > 0$ destiné à tendre vers $+\infty$ en fin de calcul que

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) dt &= \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^T - [\ln(x+t)]_0^T = \frac{1}{2}\ln(1+T^2) - \ln(x+T) + \ln(x) \\ &= \ln \frac{\sqrt{1+T^2}}{x+T} + \ln x \overset{T\to+\infty}{\to} \ln x \end{aligned}$$

Remarquons qu'on a utilisé, pour ce calcul de limite, le fait que $\frac{\sqrt{1+T^2}}{x+T} \overset{T\to+\infty}{\to} 1$.

On a donc prouvé que

$$\forall x > 0, f_0(x) = \ln(x)$$

4. On suppose que $\alpha \in]-1,0[$.

Pour $x > 0$, effectuons le changement de variable affine $t = x.u$ dans l'intégrale. Les intégrales de chaque coté de l'égalité sont de même nature.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{(x.u)^\alpha}{x+x.u}\,x.du = x^\alpha.\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u}\,du$$

Pour donner du sens à ces égalités, il nous suffit de démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u}\,du$ est convergente.

1. $u \mapsto \frac{u^\alpha}{1+u}$ est $\mathscr{C}^0$ sur $]0,+\infty[$.
2. En 0. On a,
$$\forall 0 < u \leq 1, 0 \leq \frac{u^\alpha}{1+u} \leq u^\alpha$$
Comme $\int_0^1 u^\alpha\,du$ est convergente (car $\alpha > -1$, point déjà évoqué), par le théorème de comparaison, $\int_0^1 \frac{u^\alpha}{1+u}\,du$ est convergente.
3. En $+\infty$. On a,
$$\forall 1 \leq u, 0 \leq \frac{u^\alpha}{1+u} \leq u^{\alpha-1}$$
Comme $\int_1^{+\infty} u^{\alpha-1}\,du$ est convergente (car $\alpha - 1 < -1$, point déjà évoqué), par le théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u}\,du$ est convergente.
4. Les pbs de convergence aux deux extrémités étant réglés, on a donc que $\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u}\,du$ est convergente.

On a donc
$$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t}\,dt = x^\alpha.\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u}\,du$$

Il vient finalement, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}\,dt - x^\alpha.\int_1^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u}\,du = c.x^\alpha + d$$

où on a posé

$$c = -\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u}\,du \text{ et } d = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}\,dt$$

c est clairement < 0 (intégrale d'une fonction positive, continue, non nulle).

NB : la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}\,dt$ est assurée par la convergence des deux autres intégrales intervenant dans l'égalité (thm de linéarité des intégrales généralisées avec sa réserve).

5. On suppose que $\alpha \in]0,1[$.

5.a. Supposons que x et h sont des réels tels que $x > 0$, $x+h > 0$ et $h \neq 0$.

On a, dans un premier temps

$$\begin{aligned}
\frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} - \frac{t^\alpha}{(x+h+t)}\right)dt - \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} - \frac{t^\alpha}{(x+t)}\right)dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} - \frac{t^\alpha}{(x+h+t)} - \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} + \frac{t^\alpha}{(x+t)}\right)dt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^\alpha}{(x+t)} - \frac{t^\alpha}{(x+h+t)}\right)dt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^\alpha(x+t+h-(x+t))}{(x+t)(x+t+h)}\right)dt \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^\alpha}{(x+t)(x+t+h)}\right)dt
\end{aligned}$$

et, dans un deuxième temps,

$$\begin{aligned}
\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h}-\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^\alpha}{(x+t)(x+t+h)}\right)dt-\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(x+t+h)}-\frac{1}{(x+t)}\right)\frac{t^\alpha}{(x+t)}\,dt\\
&= h.\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\,dt
\end{aligned}$$

5.b. Si, de plus $-\frac{x}{2}<h$ et donc $x+h+t\geq\frac{x}{2}+t$, on a, pour $t>0$,

$$\frac{t^\alpha}{x+h+t}\leq\frac{t^\alpha}{\frac{x}{2}+t}$$

et donc, par croissance de l'intégrale

$$\left|\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h}-\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt\right|=|h|.\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\,dt\leq|h|.\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(\frac{x}{2}+t)(x+t)^2}\,dt$$

Clairement, à x fixé, le terme de droite est de la forme $|h|\times Cste$, lorsque $h\to0$, il tend vers 0. Du théorème des gendarmes, on déduit que

$$\left|\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h}-\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt\right|\to0$$

ceci signifie que

$$\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h}\overset{h\to0}{\to}\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$$

et ceci signifie exactement que f_α est dérivable en x avec $f'_\alpha(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$.

$x>0$ étant quelconque, on a démontré ce qui était demandé.

5.c. Soit $x>0$. Effectuons le changement de variable affine $t=x.u$, valide car $x\neq0$ dans la formule précédente, on a $dt=x.du$, $u=0$ quand $t=0$, $t\to+\infty$ quand $u\to+\infty$ et donc

$$\begin{aligned}
f'_\alpha(x) &= \int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{(x.u)^\alpha}{(x+x.u)^2}x.\,du\\
&= x^{\alpha-1}.\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{(1+u)^2}\,du=f'_\alpha(1).x^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

En primitivant sur $]0,+\infty[$, on obtient l'existence d'un nombre réel d tel que

$$\forall x>0,\ f_\alpha(x)=\frac{f'_\alpha(1)}{\alpha}.x^\alpha+d$$

En prenant $c=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{(1+u)^2}\,du$, on a donc

$$\forall x>0,\ f_\alpha(x)=c.x^\alpha+d$$

La formule donnée pour c montre que celui-ci est >0.

Correction Ex.–2
1. On $A_1 = 0 + S_1$ et donc

$$\mathbb{P}(A_1 = 1) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A_1 = 2) = \frac{1}{4} \text{ et } \mathbb{P}(A_1 = 3) = \frac{1}{4}$$

et donc

$$\mathbb{E}(A_1) = \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 3.\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

et

$$\mathbb{E}(A_1^2) = \frac{1}{2} + 4.\frac{1}{4} + 9.\frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

d'où (par KOENIG–HUYGHENS),

$$\mathbb{V}(A_1) = \frac{15}{4} - \frac{49}{16} = \frac{11}{16}$$

2.a. On a $A_2 = A_1 + S_2$ car l'abscisse à l'issue du 2^e saut est celle à l'issue du premier saut (A_1) à laquelle on a ajouté le nmbre d'unités sautées au deuxième saut (S_2). Comme $A_1 = S_1$, on a bien $A_2 = S_1 + S_2$. Les variables S_1 et S_2 étant supposées indépendantes, on a $\mathbb{P}(S_1 = k, S_2 = \ell) = \mathbb{P}(S_1 = k)\mathbb{P}(S_2 = \ell)$ pour tout couple $(k, \ell) \in \{1, 2, 3\}^2$. Le tableau suivant donnant la loi de du couple (S_1, S_2) :

$S_1 \backslash S_2$	1	2	3
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

La table de la somme $A_2 = S_1 + S_2$ est :

$S_1 \backslash S_2$	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

et donc A_2 est à valeurs dans $\{2, \ldots, 6\}$ avec la loi donnée par la table [1] :

k	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(A_2 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

2.b. On a donc

$$\mathbb{E}(A_2) = 2.\frac{1}{4} + 3.\frac{1}{4} + 4.\frac{5}{16} + 5.\frac{1}{8} + 6.\frac{1}{16} = \frac{56}{16} = \frac{7}{2}.$$

3. *c.f.* Script 1.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, X_n est le nombre de fois où le saut était de une unité dans les sauts numérotés de 1 à n, *i.e.*

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} 1\!\!1_{\{S_k=1\}}$$

Comme pour chaque k, $1\!\!1_{\{S_k=1\}}$ est une v.a. de BERNOULLI de paramètre de succès $\frac{1}{2}$, comme les v.a. $1\!\!1_{\{S_k=1\}}, k \in \{1, \ldots, n\}$ sont indépendantes (car fonctions de v.a. indépendantes, *c.f.* Lemme des coalitions), X_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$:

$$X_n \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

1. Pour chaque k, on repère les cases dans la table de la somme valant ce k et on ajoute les probabilités dans les cases correspondantes de la table de la loi de couple.

Le même raisonnement en partant des identités

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{S_k=2\}} \text{ et } Z_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{S_k=3\}}$$

donne

$$Y_n \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{4}\right) \text{ et } Z_n \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$$

On a

$$X_n + Y_n + Z_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{S_k=1\}} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{S_k=2\}} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{S_k=3\}} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{1}_{\{S_k=1\}} + \mathbb{1}_{\{S_k=2\}} + \mathbb{1}_{\{S_k=3\}}) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

On s'est servi du fait que pour tout k, S_k est à valeurs dans $\{1,2,3\}$ et donc

$$\mathbb{1}_{\{S_k=1\}} + \mathbb{1}_{\{S_k=2\}} + \mathbb{1}_{\{S_k=3\}} = 1$$

On a donc

$$X_n + Y_n = n - Z_n$$

et un calcul simple montre que si Z_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{4}$, $n - Z_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et $q = 1 - p = \frac{3}{4}$. En effet, pour $\ell \in \{0, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(n - Z_n = \ell) = \mathbb{P}(Z_n = n - \ell) = \binom{n}{n-\ell} p^{n-\ell}(1-p)^{n-(n-\ell)} = \binom{n}{\ell} q^{\ell}.(1-q)^{n-\ell}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a [2]

$$\mathbb{V}(X_n) = n.\frac{1}{4}, \mathbb{V}(Y_n) = n.\frac{1}{4}.\frac{3}{4} = \frac{3n}{16} \text{ et } \mathbb{V}(X_n + Y_n) = n.\frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{3n}{16}$$

et en utilisant l'identité

$$\mathbb{V}(X_n + Y_n) = \mathbb{V}(X_n) + \mathbb{V}(Y_n) + 2\,\mathbb{C}ov(X_n, Y_n)$$

il vient

$$\mathbb{C}ov(X_n, Y_n) = \frac{1}{2}.n\left(\frac{3}{16} - \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right) = -\frac{n}{8}$$

Leur covariance étant non nulle, les v.a. X_n et Y_n ne sont pas indépendantes.

6.a. On a $A_n = X_n + 2Y_n + 3Z_n$ en comptant simplement le nombre d'unités sautées suivant leur catégorie et donc, par linéarité de l'espérance et valeur de l'espérance d'une v.a. binomiale [3],

$$\mathbb{E}(A_n) = \mathbb{E}(X_n) + 2\mathbb{E}(Y_n) + 3\mathbb{E}(Z_n) = n(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{4}) = \frac{7n}{4}.$$

6.b. Sachant que $Z_n = n - X_n - Y_n$, on a donc

$$A_n = 3n - 2X_n - Y_n$$

et donc (règles de calcul sur la variance) :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(A_n) & = & \mathbb{V}(3n - 2X_n - Y_n) \\
& = & \mathbb{V}(-2X_n - Y_n) \\
& = & \mathbb{V}(+2X_n + Y_n) \\
& = & \mathbb{V}(2X_n) + \mathbb{V}(Y_n) + 2\,\mathbb{C}ov(2X_n, Y_n) \\
& = & 4\mathbb{V}(X_n) + \mathbb{V}(Y_n) + 4\,\mathbb{C}ov(X_n, Y_n) \\
\text{(valeurs connues)} & = & 4.n.\frac{1}{4} + n\frac{3}{16} - 4.n\frac{1}{8} = \frac{11n}{16}
\end{array}$$

2. La variance d'une $\mathscr{B}(n,p)$ est $n.p.(1-p)$.
3. L'espérance d'une v.a. $\mathscr{B}(n,p)$ est $n.p$.

6.c. De même, par les règles sur la covariance,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov(A_n, X_n) &= \mathbb{C}ov(3n - 2X_n - Y_n, X_n) \\ &= \mathbb{C}ov(3n, X_n) - 2\mathbb{C}ov(X_n, X_n) - \mathbb{C}ov(Y_n, X_n) \\ \text{(valeurs connues)} &= 0 - 2n.\frac{1}{4} + n\frac{1}{8} = -\frac{3n}{8} \end{aligned}$$

7. La sortie graphique obtenue est le graphe de la suite (A_n) pour $n = 0, \ldots, 200$ (complété par des segments intermédiaires).

En supposant que chaque `A[k]` est proche de l'espérance théorique $\mathbb{E}(A_k) = \frac{7}{4}.k$, l'allure de la courbe tracée est donc proche de la droite d'équation $y = \frac{7}{4}.x$. Un graphique explicatif s'obtient en exécutant le script 1.

Listing 1 – python/correction-Q4.py

```
import numpy
import matplotlib.pyplot
#Q.4
def S(N=100):
    s = [0]*(N+1)
    for k in range(N):
        u = numpy.random.rand()
        if u <= 0.5 :
            s[k] = 1
        elif u <= 0.75 :
            s[k] = 2
        else :
            s[k] = 3
    return s

#Q.7
Sauts = S(N=200)
A = [0]*(len(Sauts))
for k in range(1,len(A)):
    A[k] = A[k-1] + Sauts[k]

matplotlib.pyplot.plot(A)
```

Correction Ex.–3

Partie A

Préliminaires : Fonction logarithme en base 2 et propriété de convexité.

A.1.a. Soit $(x, y) \in (]0, +\infty[)^2$, on a, par la relation fondamentale sur la fonction ln,

$$\log_2(x.y) = \frac{1}{\ln 2}(\ln(x.y)) = \frac{1}{\ln 2}(\ln(x) + \ln(y)) = \log_2(x) + \log_2(y).$$

A.1.b. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a, par définition de la fonction puissance,

$$\log_2(2^\alpha) = \frac{\ln(2^\alpha)}{\ln 2} = \frac{\ln(e^{\alpha.\ln 2})}{\ln 2} = \frac{\alpha.\ln 2}{\ln 2} = \alpha.$$

A.1.c. Si $x \in]0, 1[$, $\ln x < 0$. Comme $\ln 2 > 0$ (car $2 > 1$, on a donc :

$$\forall x \in]0, 1[, \log_2(x) < 0.$$

A.2. Fonctions convexes sur un intervalle. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur I sera dite *convexe* sur I si

$$\forall x \in I, \phi''(x) \geq 0$$

A.2.a. Soit ϕ définie par $\forall t \in [0, +\infty[\,, \phi(t) = 2^t = e^{t.\ln 2}$.

Par composition de l'exponentielle avec une fonction affine, ϕ est $\mathscr{C}^\infty$ (et donc $\mathscr{C}^2$!) sur $I = \mathbb{R}$ et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi'(t) = \ln 2.e^{t.\ln 2} = \ln 2.2^t$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi''(t) = (\ln 2)^2.e^{t.\ln 2} = (\ln 2)^2.2^t > 0$$

La fonction ϕ est donc convexe sur $I = [0, +\infty[$.

A.2.b. Pour $t \in I =]0, +\infty[$, on a $\phi(t) := -\log_2(t) = -\frac{1}{\ln 2}.\ln t$. La fonction ϕ est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur I avec

$$\forall t \in]0, +\infty[\,, \phi'(t) = -\frac{1}{\ln 2}.\frac{1}{t}$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi''(t) = +\frac{1}{\ln 2}.\frac{1}{t^2} > 0$$

La fonction ϕ est donc convexe sur $I =]0, +\infty[$.

A.2.c. On suppose que $\phi : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle non trivial I y est convexe.

Soit $x, y \in I$. Posons pour $t \in [0, 1]$,

$$g(t) = t.\phi\,(x) + (1-t).\phi\,(y) - \phi\,(t.x + (1-t).y)$$

La fonction $t \in [0,1] \mapsto t.x + (1-t).y$ est affine, à valeurs dans le segment $[x, y] \subset I$ (car I est un intervalle contenant les deux points x et y). La composée

$$t \in [0,1] \mapsto \phi(t.x + (1-t).y)$$

est donc bien définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$. Par addition avec la fonction affine $t \in [0,1] \mapsto t.\phi(x) + (1-t).\phi(y)$, la fonction g est bien définie, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ avec

$$\forall t \in [0,1]\,, g'(t) = \phi(x) - \phi(y) - (x-y).\phi'(t.x + (1-t).y)$$

et

$$\forall t \in [0,1]\,, g''(t) = -(x-y)^2.\phi''(t.x + (1-t).y)$$

De ce calcul s'ensuivent les faits suivants :

— la fonction g'' est négative sur $[0,1]$ car $\phi'' \geq 0$;

— la fonction g' est décroissante sur $[0,1]$ avec

$$g'(0) = \phi(x) - \phi(y) - (x-y).\phi'(y) \text{ et } g'(1) = \phi(x) - \phi(y) - (x-y).\phi'(x)$$

— La fonction g vérifie $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$.

Donc, par le théorème de ROLLE, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $g'(\alpha) = 0$. Par décroissance de g',

$$\forall t \in [0, \alpha]\,, g'(t) \geq 0$$

et

$$\forall t \in [\alpha, 1]\,, g'(t) \leq 0$$

La fonction g est donc croissante sur $[0, \alpha]$, décroissante sur $[\alpha, 1]$, elle est donc partout $\geq 0 = g(0) = g(1)$.

En résumé, on a le tableau de variations suivant

t	0		α		1
$g''(t)$		≤ 0		≤ 0	
$g'(t)$		$\searrow$	0	$\searrow$	
$g'(t)$		≥ 0	0	≤ 0	
$g(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0
$g(t)$	0	≥ 0		≥ 0	0

On a donc

$$\forall t \in [0,1]\,, g(t) = t.\phi\,(x) + (1-t).\phi\,(y) - \phi\,(t.x + (1-t).y) \geq 0$$

i.e.

$$\forall t \in [0,1]\,, t.\phi\,(x) + (1-t).\phi\,(y) \geq \phi\,(t.x + (1-t).y)$$

Les nombres x et y étant quelconques dans I, cela montre la proposition demandée.

On admet l'énoncé suivant, se déduisant du précédent par une récurrence élaborée :

Si $\phi : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle non trivial I y est convexe alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1,\ldots,x_n) \in I^n, \forall (t_1,\ldots,t_n) \in ([0,1])^n, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \Rightarrow \phi\left(\sum_{i=1}^{n} t_i.x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i.\phi\,(x_i) \qquad \text{(Cvx)}$$

Partie B

Entropie d'une variable aléatoire réelle discrète.

B.1.a. La variable aléatoire $Y = g(X)$ est donc bien définie, à valeurs dans l'ensemble fini $\{\log_2 \mathbb{P}(X = k), k \in \{0,\ldots,n\}\} \subset]-\infty,0]$. Par la formule de transfert, comme X est à valeurs dans $\{0,\ldots,n\}$, on a

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=0}^{n} g(k).\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \log_2(\mathbb{P}(X=k)).\mathbb{P}(X=k) = -H(X)$$

et donc on a bien $H(X) = -\mathbb{E}(g(X))$.

B.1.b. Comme $g(X)$ est à valeurs négatives, son espérance est négative et $H(X) = -\mathbb{E}(g(X)) \geq 0$.

1.c.i. La v.a. X est donc à valeurs dans $\{0,1\}$ avec

$$\mathbb{P}(X=0) = 1-p > 0; \mathbb{P}(X=1) = p > 0$$

La v.a. X est donc à support $\{0,1\}$ et

$$H(X) = -\mathbb{P}(X=0).\log_2 \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1).\log_2 \mathbb{P}(X=1) = -(1-p)\log_2(1-p) - p.\log_2(p) =: \psi(p)$$

1.c.ii. On a donc
$$\forall p \in]0,1[, -\psi(p) = +(1-p)\log_2(1-p) + p.\log_2(p)$$
La fonction $-\psi$ est, par composition, $\mathscr{C}^2$ sur $I =]0,1[$ et, en dérivant une première fois,
$$\forall p \in]0,1[, (-\psi)'(p) = -\log_2(1-p) - \frac{1}{\ln 2} + \log_2(p) + \frac{1}{\ln 2} = -\log_2(1-p) + \log_2(p) = \log_2 \frac{p}{1-p}$$
et donc, en dérivant une deuxième fois,
$$\forall p \in]0,1[, (-\psi)''(p) = \frac{1}{\ln 2}.\frac{1}{1-p} + \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{p} = \frac{1}{\ln 2}.\frac{1}{p(1-p)}$$
Clairement,
$$\forall p \in]0,1[, (-\psi)''(p) \geq 0$$
et donc $-\psi$ est convexe sur $]0,1[$.
1.c.iii. On a
$$\forall p \in]0,1[, \psi'(p) = -\log_2 \frac{p}{1-p} = \log_2(\frac{1}{p} - 1)$$
Comme pour $p \in]0,1[$,
- $\psi'(p) = 0$ si et seulement si $\frac{1}{p} - 1 = 1$ *i.e.* $p = \frac{1}{2}$;
- $\psi'(p) < 0$ si et seulement si $\frac{1}{p} - 1 < 1$ *i.e.* $p > \frac{1}{2}$;
- $\psi'(p) > 0$ si et seulement si $\frac{1}{p} - 1 > 1$ *i.e.* $p < \frac{1}{2}$;

On voit que la fonction ψ est strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et donc atteint son maximum sur $]0,1[$ uniquement au point $p_0 = \frac{1}{2}$. Le maximum vaut $-\log_2 \frac{1}{2} = +1$.
B.1.d. On a les probabilités
$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}; \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{4}; \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{8}.$$
On a donc (on utilise $\log_2 2^{-k} = -k$)
$$\begin{aligned} H(X) &= -\frac{1}{2}.\log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4}.\log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8}.\log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8}.\log_2 \frac{1}{8} \\ &= +\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 3.\frac{1}{8} + 3.\frac{1}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

B.2.

Listing 2 – python/entropie.py

```
import numpy as np

def Entropie(P):
    """
    Retourne l'entropie de la v.a X à support {0,..,n} dont la loi est décrite
    par le vecteur P de longueur n+1
    """
    h=0
    for k in range(len(P)):
        h += P[k]*np.log(P[k])
    return -h/np.log(2)
```

B.3. On a du fait que X est de loi à support $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ que

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \, p_i = \mathbb{P}(X = x_i) > 0$$

Par ailleurs, $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$. Si l'un des p_i valait 1, tous les autres (il y en a au moins car $n+1 \geq 2$) seraient donc nuls. Donc

$$\forall i, \, 0 \leq i \leq n, \, p_i < 1.$$

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant les nombres x_i et $\phi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe sur I.

On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i.p_i$. $\mathbb{E}(X)$ est donc une moyenne pondérée par des coefficients positifs des nombres x_i. En tant que telle $\min_i x_i \leq \mathbb{E}(X) \leq \max_i x_i$ et, I étant un intervalle contenant $\min_i x_i$ et $\max_i x_i$, il contient $\mathbb{E}(X)$.

On a donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i.p_i$$

et, par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \sum_{i=0}^{n} \phi(x_i).p_i$$

Comme les p_i sont positifs et que $\sum_i p_i = 1$, et ϕ est convexe sur I, l'inégalité (Cvx) se réécrit (en prenant $\forall i, \, t_i = p_i$) :

$$\phi\left(\mathbb{E}(X)\right) \leq \mathbb{E}(\phi(X))$$

B.4. Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{0, \dots, n\}$. On pose, pour k tel que $0 \leq k \leq n$, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$.

B.4.a. Considérons les nombres dans $I =]0, +\infty[$, $y_0 = \frac{1}{(n+1)p_0}$, ..., $y_n = \frac{1}{(n+1)p_n}$ et $t_0 = p_0$,... $t_n = p_n$ et la fonction $\phi : t \in I \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = -\log_2 t$.

On a vu en A.2.b que la fonction ϕ est convexe sur I et on a donc, par l'inégalité (Cvx) appliquée aux y_i, t_i que

$$\phi(\sum_i t_i.y_i) \leq \sum_i t_i.\phi(y_i)$$

ce qui s'écrit

$$-\log_2\left(\sum_i t_i.y_i\right) \leq \sum_i t_i.(-\log_2(y_i))$$

i.e. (en passant à l'opposé)

$$\log_2\left(\sum_i p_i.\frac{1}{(n+1)p_i}\right) \geq \sum_i p_i.\log_2 \frac{1}{(n+1)p_i}$$

On a $\sum_i p_i.\frac{1}{(n+1)p_i} = \sum_i \frac{1}{(n+1)} = 1$ et donc

$$\log_2\left(\sum_i p_i.\frac{1}{(n+1)p_i}\right) = 0$$

et finalement,

$$\sum_i p_i.\log_2 \frac{1}{(n+1)p_i} \leq 0$$

B.4.b. On a, en utilisant $\log_2((n+1)p_k) = \log_2(n+1) + \log_2 p_k$, que

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \log_2[(n+1)p_k] = \sum_{k=0}^{n} p_k \log_2(n+1) + \sum_{k=0}^{n} p_k \log_2 p_k = \log_2(n+1) - H(X)$$

B.4.c. Comme

$$\sum_k p_k.\log_2[(n+1)p_i] = -\sum_k p_k.\log_2 \frac{1}{(n+1)p_k} \geq 0$$

On a donc

$$\log_2(n+1) - H(X) \geq 0$$

et donc $H(X) \leq \log_2(n+1)$.

B.4.d. On suppose que X suit la loi uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$, on a $p_k = \frac{1}{n+1}$ et donc

$$H(X) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \log_2 \frac{1}{n+1} = \log_2(n+1)$$

On en déduit que parmi les v.a. dont la loi a support $\{0,\ldots,n\}$, les v.a. uniformes ont l'entropie maximale.

B.5.a. On décompose l'évenement $\{X = Y\}$ suivant les valeurs de X : On a donc

$$\{X = Y\} = \cup_{k=0}^{n} \{X = Y \text{ et } X = k\}$$

et donc, par réécriture logique,

$$\{X = Y\} = \cup_{k=0}^{n} \{X = k \text{ et } Y = k\}$$

Il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles et donc

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = k)$$

Comme X et Y sont indépendantes, $\forall k$, $\mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = k) = \mathbb{P}(X = k).\mathbb{P}(Y = k)$ et comme X et Y ont même loi, $\forall k$, $\mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = k) = \mathbb{P}(X = k)^2$ et finalement

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)^2.$$

B.5.b. On pose $v(k) = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout k élément de $\{0,\ldots,n\}$.

Par A.2.a, la fonction $\phi = t \mapsto 2^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$ et donc d'après l'inégalité de JENSEN, question B.3, appliquée à la v.a. $Y = \log_2 v(X)$ (on remarque aussi que $\phi(\log_2 v(X)) = v(X)$ par A.1.b), on a

$$\phi(\mathbb{E}(\log_2 v(X)) \leq \mathbb{E}(\phi(\log_2 v(X))$$

et ceci se réécrit

$$2^{\mathbb{E}(\log_2 v(X))} \leq \mathbb{E}(2^{\log_2 v(X)}) = \mathbb{E}(v(X)).$$

B.5.c. On a d'une part

$$\mathbb{E}(\log_2 v(X)) = -H(X)$$

et d'autre part, par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(v(X)) = \sum_{k=0}^{n} v(k).\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k).\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)^2$$

et donc la formule précédente se réécrit

$$2^{-H(X)} \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)^2 = \mathbb{P}(X = Y).$$

B.5.d. Si X est uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$, d'une part $H(X) = \log_2(n+1)$ et donc $2^{-H(X)} = \frac{1}{n+1}$ et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$$

Il s'agit donc d'un exemple de loi où l'inégalité précédente est une égalité.