Devoir Surveillé 04

Le 10 Janvier
durée 3h30

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits
La plus grande attention sera apportée à la qualité de la rédaction, syntaxe et orthographe comprise.
Numérotez les copies et questions et soulignez ou encadrez les résultats.
Vous pouvez utiliser les résultats des questions en amont d'une question donnée en la référençant clairement
Les calculs, même longs et fastidieux doivent figurer sur la copie

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice I

Soient a, b et c les trois racines complexes du polynôme

$$P = X^3 - 5X + \sqrt{2}$$

1. Déterminer $a+b+c$, $a.b.c$ et $a.b+b.c+c.a$
2. Calculer $S_2 = a^2+b^2+c^2$.
3. Calculer $S_4 = a^4+b^4+c^4$.
Indication:Remarquer et justifier que pour $x = a, b$ ou c, $x^4 = 5x^2 - \sqrt{2}.x$

Exercice II

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on considère le polynôme

$$P_n(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - 1.$$

On pose par ailleurs, pour $z \in \mathbb{C}$, $f_n(z) = z^{n+1} - 2.z^n + 1$.
1. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, P_n(z) = 0 \Leftrightarrow f_n(z) = 0$$

2.a. Etudier la fonction f_n sur $[0, +\infty[$, calculer $f_n(1)$ et en déduire que P_n admet une unique racine réelle positive, qu'on notera a_n.
2.b. Calculer $f_n(2)$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Montrer que l'équation $f_n(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet $n+1$ solutions distinctes et que P_n admet n racines complexes distinctes et simples.
4. Soit z une racine de P_n.
4.a. Montrer que si $|z| \neq 1$ alors

$$\frac{f_n(|z|)}{|z|-1} \leq 0.$$

4.b. En déduire que $|z| \leq a_n$.

Exercice III

On considère la partie D de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, y^2 < 2x\}$$

et on s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles d'inconnue $\phi : D \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur D :

$$\forall (x,y) \in D,\, (2x - y^2)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) - 16\phi(x,y) = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. Représenter graphiquement D.
2. Soit $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On considère l'application h définie par

$$\forall (u,v) \in \Delta,\, h(u,v) = \left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right)$$

2.a. Montrer, en explicitant sa réciproque, que h définit une bijection de Δ sur D.
2.b. Changement de variables $(x,y) = h(u,v)$.
Soit $\phi : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et $\psi : \Delta \to \mathbb{R}$ définie par $\psi = \phi \circ h$, *i.e.*

$$\forall (u,v) \in \Delta,\, \psi(u,v) = \phi\left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right)$$

Calculer $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ et $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}$ en fonction de $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$, u et v.
2.c. En déduire que ϕ vérifie (E) si et seulement si ψ vérifie, de classe $\mathscr{C}^2$ sur Δ, y vérifie

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 16\psi = 0 \qquad \text{(E')}$$

On admettra que ϕ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D si et seulement si ψ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Δ.
3.a. Déterminer la forme générale des solutions de (E') sur Δ.
3.b. Et déterminer la forme générale des solutions de (E) sur D

Exercice IV

Soit a un nombre réel strictement positif et (x_n) la suite définie par :

$$x_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\; x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + n.x_n^2}$$

1.a. Montrer que la suite (x_n) est bien définie, à valeurs dans $]0, +\infty[$.
1.b. Écrire une fonction `x(n,a=1.0)` en langage Python qui calcule x_n pour une valeur de a (valant 1 par défaut) et de n donnée.
1.c. Expliciter la suite (x_n) lorsque $a = 1$.
2. Dans le cas général, montrer que la suite (x_n) est décroissante et minorée. Déterminer la limite de cette suite.
3.a. Pour $n \geq 1$, étudier la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = \frac{x}{1+n.x^2}$.
3.b. En déduire par récurrence que l'on a : $\forall n \geq 2,\; 0 < x_n \leq \frac{1}{n}$.
4.a. Pour $k \geq 2$, montrer que l'on a : $\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} = k.x_k$
En déduire que : $\forall n \geq 2,\; \frac{1}{n-2+\frac{1}{x_2}} \leq x_n \leq \frac{1}{n}$
Indication:on pourra penser à sommer $\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}$ pour k allant de 2 à $n-1$.
4.b. Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice V

Nous allons modéliser dans ce problème, par une approche mécanistique, l'évolution dans le temps de la hauteur $x(t)$ de la surface d'un lac dont la géométrie est simplifiée comme sur la figure 1.

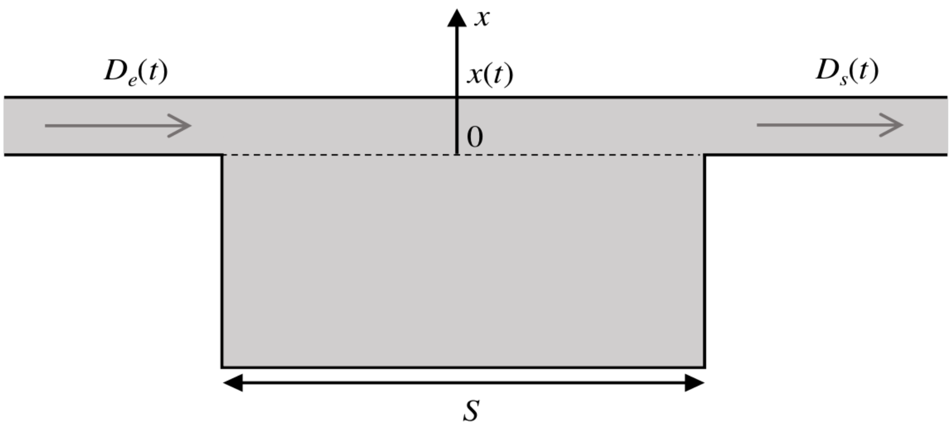

FIGURE 1 – Modélisation d'un lac.

Si S, section horizontale du lac, est supposée constante par rapport à la hauteur, une simple équation de bilan sur les volumes nous permet d'écrire :

$$S.\frac{dx}{dt}(t) = D_e(t) - D_s(t)$$

où le débit entrant $D_e(t)$ est une fonction supposée connue. On peut modéliser le débit sortant $D_s(t)$ comme étant proportionnel à $x(t)$ soit $D_s(t) = \alpha.x(t)$, où α est un réel strictement positif.

On obtient donc :

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{D_e(t)}{S} - \frac{\alpha}{S}x(t).$$

Par la suite le modèle d'évolution s'écrira :

$$\frac{dx}{dt}(t) = u(t) - k.x(t) \tag{E}$$

où $k \in \mathbb{R}_+^*$ et u est une fonction réelle connue, appelée « entrée » du système et dans la suite, cette entrée prendra différentes formes.

1. Existence de solutions à l'équation (E) : cas où u est simple.

1.a. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ dans le cas où u est la fonction constante égale à 0 en imposant de plus que $x(0) = 1$.

Par résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ en imposant de plus $x(0) = x_0$, on entend déterminer *toutes* les fonctions x, à valeurs réelles et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $x(0) = 0x_0$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = u(t) - k.x(t)$$

1.b. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ dans le cas où u est la fonction constante égale à 1 en imposant de plus que $x(0) = 0$.

2. Existence de solutions à l'équation (E) : cas où u est quelconque, continue sur $\mathbb{R}$.

2.a. En appliquant la méthode de la variation de la constante, *i.e.* en effectuant le changement de fonction inconnue $\lambda(t) = x(t).e^{k.t}$, montrer que x est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe une constante $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \lambda_0.e^{-k.t} + \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.u(\tau)\, d\tau \tag{I}$$

2.b. En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) vérifiant de plus $x(0) = x_0$ et en donner une formule.

⋆⋆⋆

On voudrait considérer une version de l'équation (E) où la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$, présente quelques discontinuités. Bien sûr, l'équation (E) ne peut plus faire sens telle quelle et l'on convient de nommer « solution sur $\mathbb{R}$ au sens généralisé » de l'équation (E) avec entrée u une fonction x vérifiant l'équation (I) pour une certaine constante $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Soit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le graphe est représenté dans la figure 2 et définie comme suit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \tag{H}$$

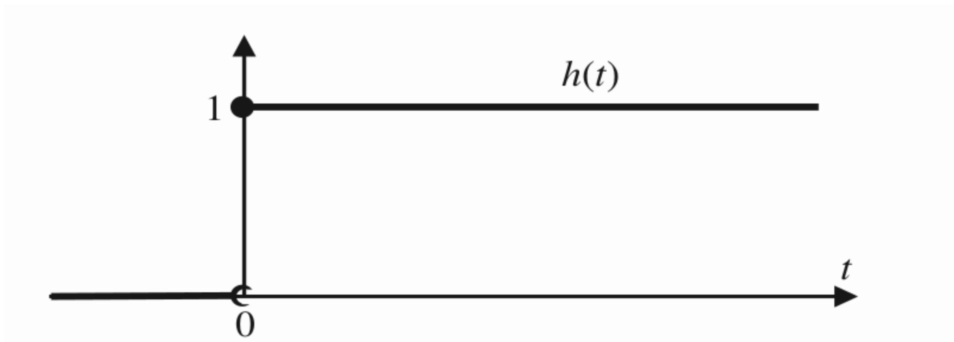

FIGURE 2 – Entrée sous la forme d'une marche.

3. Calculer x, la solution généralisée de (E) avec entrée $u = h$, où h est définie dans (H) et vérifiant $x(0) = 0$.

⋆⋆⋆

Soit $\Delta > 0$ et la fonction $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le graphe est représenté dans la figure 3.

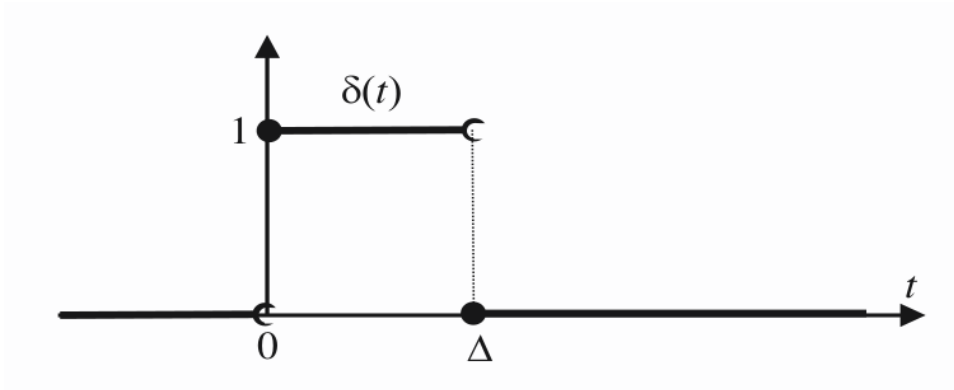

FIGURE 3 – Entrée sous la forme d'un créneau.

4.a. Montrer que l'entrée δ peut s'écrire sous la forme $\delta(t) = h(t) - h(t - \Delta)$

4.b. Déterminer x, la solution généralisée de (E) avec entrée $u = \delta$ avec condition initiale $x(0) = 0$. On séparera trois cas, suivant que $t < 0$, $t \in [0, \Delta]$ et $t \geq \Delta$.

⋆⋆⋆

.

Dans la suite on notera $t_i = i.\Delta$ où $i \in \mathbb{N}$ et on considère une suite réelle $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

5. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on considère u la fonction créneau définie comme suit : $u(t) = u_i$, lorsque t appartient à $[t_{i-1}, t_i[$ et $u(t) = 0$ sinon (*c.f.* Fig. 4) et x, la solution généralisée de (E) avec entrée u et condition initiale $x(0) = 0$. Montrer que :

$$\forall t \geq t_i, x(t) = u_i.\frac{1-e^{-k.\Delta}}{k}e^{-k(t-t_i)}.$$

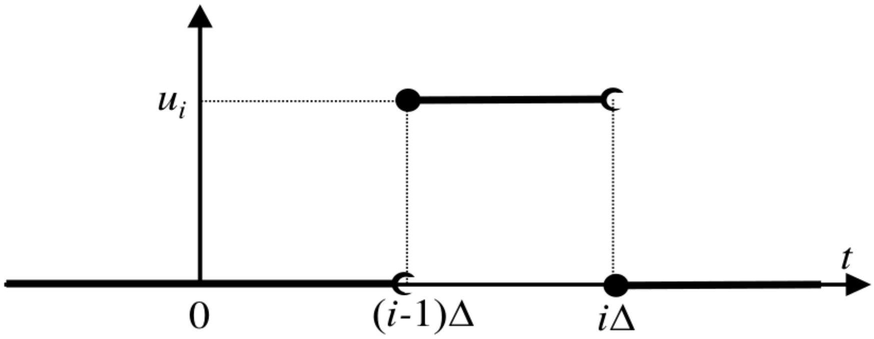

FIGURE 4 – Entrée sous forme d'un créneau entre $[t_{i-1}, t_i]$.

6. Dans cette question on suppose que u est une fonction constante par morceaux définie comme suit : $u(t) = u_i$, lorsque t appartient à $[t_{i-1}, t_i[$, pour un certain $i \in \mathbb{N}^*$ et $u(t) = 0$ sinon (*c.f.* Fig. 4) et x, la solution généralisée de (E) avec $u = \delta$ avec condition initiale $x(0) = 0$. Montrer que pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$x(t_i) = \sum_{j=1}^{i} u_j \frac{1-e^{-k.\Delta}}{k}e^{-k(t_i-t_j)}$$

7. En effectuant un changement d'indice sur la sommation, montrer que le résultat de la question précédente $x(t_i)$ peut s'écrire :

$$x(t_i) = \nu.\sum_{\ell=0}^{i-1} u_{i-\ell}\Phi^{\ell} \qquad \text{(ID)}$$

où les nombres ν et Φ sont à expliciter.

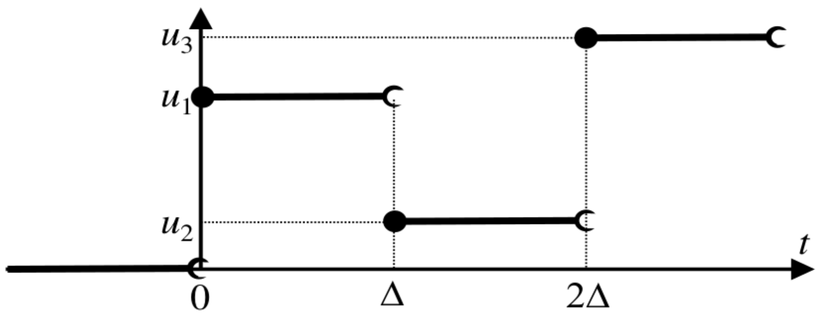

FIGURE 5 – Entrée sous forme d'une fonction en escalier.

Correction DS 04

Correction Ex.–1 Soient a, b et c les trois racines complexes du polynôme

$$P = X^3 - 5X + \sqrt{2}$$

1. On a, en factorisant, du fait que le coefficient dominant de P est 1 que

$$P = (X-a).(X-b).(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (a.b+b.c+c.a)X - a.b.c$$

et donc, par identification des coefficients

$$a+b+c = 0,\ a.b.c = -\sqrt{2} \text{ et } a.b+b.c+c.a = -5.$$

2. On a

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(a.b+b.c+c.a)$$

ce qui se réécrit

$$0 = S_2 + 2.(-5)$$

et donc $S_2 = 10$.
3. Si $P(x) = 0$, on a

$$x^3 = 5.x - \sqrt{2}$$

et donc, en multipliant par x

$$x^4 = 5.x^2 - \sqrt{2}.x$$

Ceci est valable pour toutes les racines de P et donc

$$a^4 = 5.a^2 - \sqrt{2}.a,\ b^4 = 5.b^2 - \sqrt{2}.b \text{ et } c^4 = 5.c^2 - \sqrt{2}.c$$

En sommant ces identités, on trouve que $S_4 = 5S_2 - \sqrt{2}.0 = 50$.
Correction Ex.–2 Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on considère le polynôme

$$P_n(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - 1.$$

On pose par ailleurs, pour $z \in \mathbb{C}$, $f_n(z) = z^{n+1} - 2.z^n + 1$.
1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a, par la formule sur les somme géométriques,

$$\begin{aligned} P_n(z) &= z^n - \frac{z^n - 1}{z-1} \\ &= \frac{f_n(z)}{z-1} \end{aligned}$$

et donc, pour un tel $z \neq 1$, $P_n(z) = 0 \Leftrightarrow f_n(z) = 0$.

2.a. On a
$$\forall x \in [0,+\infty[\,,\, f_n(x) = x^{n+1} - 2.x^n + 1$$
et, en dérivant cette fonction polynômiale, on obtient
$$\forall x \in [0,+\infty[\,,\, f_n'(x) = (n+1).x^n - 2.n.x^{n-1} = x^{n-1}.((n+1)x - 2.n).$$
Le signe de la dérivée f_n' sur $[0,+\infty[$ est facile à déterminer :
$$\forall x \in [0,+\infty[\,,\, f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{2n}{n+1}$$
et
$$\forall x \in [0,+\infty[\,,\, f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{2n}{n+1}\right[$$
On peut donc établir le tableau de variations de f_n sur $[0,+\infty[$ et y placer quelques valeurs particulières ($f_n(0) = 1$, $f_n(1) = 0$, $f_n(2) = 1$ (pour la question suivante)) ainsi que $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Ce qui donne
$$\begin{array}{c|ccccccccc}
x & 0 & & 1 & & \frac{2n}{n+1} & & 2 & & +\infty \\
\hline
 & 1 & & & & & & & & +\infty \\
 & & \searrow & & & & & & \nearrow & \\
f(x) & & & 0 & & & & 1 & & \\
 & & & & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & & & & <0 & & & &
\end{array}$$

L'observation de ce tableau (en conjonction avec une utilisation raisonnée du théorème de la bijection continue), permet de conclure que f_n s'annule exactement deux fois sur $[0,+\infty[$, une fois en 1, l'autre fois en un certain $a_n > \frac{2n}{n+1}$. Comme $P_n(1) = 1 - n < 0$ et vu l'équivalence montrée à la question 1, on en déduit que P_n admet en a_n son unique racine réelle positive.

2.b. Comme $f_n(2) = 1$, par le tableau précédent, on a $2 > a_n > \frac{2n}{n+1}$. Par le théorème des gendarmes, la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est convergente, de limite 2.

3. La fonction f_n est polynomiale, de polynôme associé $F_n = X^{n+1} - 2.X^n + 1$, de degré $n+1$. Les solutions de l'équation $f_n(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont les racines du polynôme F_n. Par D'ALEMBERT–GAUSS, F_n admet $n+1$ racines complexes distinctes si les racines complexes de F_n sont toutes simples.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine multiple de F_n. On a alors $F_n(\alpha) = 0$ et $F_n'(\alpha) = 0$, *i.e.*
$$\alpha^{n+1} - 2.\alpha^n + 1 + 1 = 0 \text{ et } (n+1).\alpha^n - 2n.\alpha^{n-1} = 0$$
i.e.
$$\alpha^{n+1} - 2.\alpha^n + 1 + 1 = 0 \text{ et } \alpha^{n-1}((n+1).\alpha - 2n) = 0$$
i.e.
$$\alpha^{n+1} - 2.\alpha^n + 1 + 1 = 0 \text{ et } (\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \frac{2n}{2n+1})$$
On a vu à la question précédente que ni 0 ni $\frac{2n}{n+1}$ ne sont racines de F_n et donc on peut conclure au fait que toutes les racines de F_n sont simples (et donc qu'il y en a $n+1$). Le nombre 1 est racine de F_n car $f_n(1) = 1^{n+1} - 2.1^n + 1 = 0$ et donc, dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, F_n comporte n racines distinctes (qui sont les solutions de l'équation $f_n(z) = 0$ d'inconnnue $z \in \mathbb{C}$).

Par la question 1, ces n nombres sont tous racines de P_n et comme P_n est de degré n, (par décompte maximal des racines d'un polynôme de degré n), ces n nombresx distincts constituent *toutes* les racines de P_n et celles-ci sont simples.

4. Soit z une racine de P_n.

4.a. Si z une racine de P_n alors

$$z^n = 1 + z + \cdots + z^{n-1}$$

et donc par inégalité triangulaire (et multiplicatiivté du module)

$$|z|^n \leq 1 + |z| + \cdots + |z|^{n-1}$$

Donc, si $|z| \neq 1$ alors

$$|z|^n \leq \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}$$

i.e.

$$|z|^n - \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \leq 0$$

i.e.

$$\frac{f_n(|z|)}{|z| - 1} \leq 0.$$

4.b. On peut établir le tableau de signe de $\frac{f(x)}{x-1}$ lorsque x parcourt $[0, +\infty[\setminus \{1\}$ en se servant du tableau de variation de la question 2.b (y placer a_n entre $\frac{2n}{n+1}$ et 2) pour obtenir que

$$\forall x \geq 0, x \neq 1, \frac{f(x)}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq a_n$$

Si z une racine de P_n :
- si $|z| \neq 1$ alors $\frac{f(|z|)}{|z|-1} \leq 0$ et donc $|z| \leq a_n$;
- si $|z| = 1$ alors $|z| \leq a_n$;

et donc, dans tous les cas :

Si z une racine de P_n, $|z| \leq a_n$.

Correction Ex.–3 On considère la partie D de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 < 2x\}$$

et on s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles d'inconnue $\phi : D \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur D :

$$\forall (x, y) \in D, (2x - y^2)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - 16\phi = 0 \tag{E}$$

1. On a

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 < 2x\} = D = \{(x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, -\sqrt{2x} < y < \sqrt{2x}\}$$

Pour représenter graphiquement D, il suffit donc de tracer les graphes (de fonctions) d'équations $y = \sqrt{2x}$ et $y = -\sqrt{2x}$ et de considérer la zone D entre ces deux graphes.

2. Soit $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On considère l'application h définie par

$$\forall (u, v) \in \Delta, h(u, v) = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, v\right)$$

2.a. Soit $(x, y) \in D$. Résolvons l'équation $(x, y) = \left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right)$ d'inconnue $(u, v) \in \Delta$. Pour $(x, y) \in D$, $(u, v) \in \Delta$, on a les équivalences

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & \frac{u^2+v^2}{2} \\ y & = & v \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & \frac{u^2+y^2}{2} \\ v & = & y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} u^2 & = & 2x - y^2 \\ v & = & y \end{array}\right. \overset{(u>0, 2x-y^2>0)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcr} u & = & \sqrt{2x - y^2} \\ v & = & y \end{array}\right.$$

et donc h définit une bijection de D sur Δ de bijection réciproque définie par

$$\forall (x, y) \in D, h^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{2x - y^2}, y\right)$$

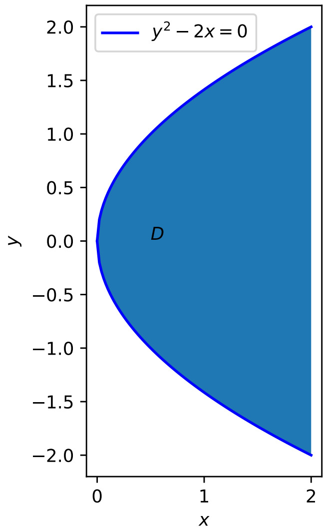

FIGURE 6 – D

2.b. Changement de variables $(x,y) = h(u,v)$.

Soit $\phi : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et $\psi : \Delta \to \mathbb{R}$ définie par $\psi = \phi \circ h$, *i.e.*

$$\forall (u,v) \in \Delta,\ \psi(u,v) = \phi(x,y) = \phi\left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right)$$

On a, par la formule de dérivation composée en deux variables,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\phi\left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right)\right) \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right).\frac{\partial \frac{u^2+v^2}{2}}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right).\frac{\partial v}{\partial u} \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right).u
\end{aligned}$$

et de même, en dérivant cette identité par rapport à u, avec la même technique

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right).u\right) \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right).u^2
\end{aligned}$$

2.c. Du fait que h établisse une bijection de Δ sur D, ϕ vérifie (E) sur D si et seulement si

$$\forall (x,y) \in D,\ (2x - y^2)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) - 16\phi(x,y) = 0$$

i.e. ($u = \sqrt{2x - y^2}$, $x = \frac{u^2+v^2}{2}$, $v = y$)

$$\forall (u,v) \in \Delta,\ u^2.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right) + \frac{\partial \phi}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right) - 16\phi\left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right) = 0$$

et donc, vu le calcul précédent, si et seulement si

$$\forall (u,v) \in \Delta,\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}(u,v) - 16\psi(u,v) = 0$$

i.e. si et seulement si ψ vérifie (E') sur Δ.
3.a. Résolvons (E') sur Δ en fixant $v \in \mathbb{R}$. La fonction $f : u \in]0,+\infty[\mapsto \psi(u,v)$ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'EDO linéaire d'ordre 2 :

$$f'' - 16f = 0$$

La fonction f est solution de cette équation si et seulement si il existe deux constantes réelles λ_+ et λ_- telles que

$$\forall u > 0,\ f(u) = \lambda_+.e^{4u} + \lambda_-.e^{-4u}$$

La fonction ψ est donc solution de (E') sur Δ si et seulement si il existe deux fonctions réelles λ_+ et λ_- telles que

$$\forall v \in \mathbb{R}, \forall u > 0,\ \psi(u,v) = \lambda_+(v).e^{4u} + \lambda_-(v).e^{-4u}$$

Le fait que ψ soit de classe $\mathscr{C}^2$ sur Δ équivaut au fait que λ_+ et λ_- sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3.b. Et donc, en revenant aux variables (x,y), la fonction ϕ est solution de (E) sur D si et seulement si il existe deux fonctions réelles λ_+ et λ_- de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in D,\ \phi(x,y) = \lambda_+(y).e^{4.\sqrt{2x-y^2}} + \lambda_-(y).e^{-4.\sqrt{2x-y^2}}$$

Correction Ex.–4 Soit a un nombre réel strictement positif et (x_n) la suite définie par :

$$x_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} = \frac{x_n}{1+nx_n^2}$$

1.a. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(H_n) : x_n$ existe et $x_n > 0$.
Init. Pour $n = 0$: $x_0 = a$, existe bien et est > 0 par hypothèse sur a. H_0 est vraie.
Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, x_n existe et est > 0, alors $\frac{x_n}{1+n.x_n^2}$ existe (est calculable à partir de x_n) et est bien > 0 comme quotient de deux nombres > 0). On a donc $H_n \Rightarrow H_{n+1}$.
Ccl. Par la principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est démontrée (vraie).
1.b.

```
def x(n,a=1.0):
    xn = a
    for _ in range(n):
        xn =xn/(1+n*xn**2)
    return xn
```

1.c. Lorsque $a = 1$, on a

$$x_0 = 1, x_1 = 1/(1+0.1^2) = 1, x_2 = 1/(1+1.1^2) = 1/2, x_3 = 1/2.1/(1+2.1/4) = 1/3$$

Montrons que $\forall n \geq 1$, $H_n : x_n = \frac{1}{n}$.
$n = 1$: H_1 est vraie.
$H_n \Rightarrow H_{n+1}$: Supposons que H_n soit vraie à un certain rang $n \geq 1$, on a alors

$$x_{n+1} = \frac{1}{n}.\frac{1}{1+n.\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n+\frac{n}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

— Et le principe de récurrence démontre ce qui est annoncé.

2. Il est clair que la suite (x_n) est minorée par 0 (question 1). On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{1+n.x_n^2} - x_n = x_n.\left(\frac{1}{1+n.x_n^2} - 1\right) == -n.\frac{x_n^3}{1+n.x_n^2} < 0$$

et donc la suite (x_n) est strictement décroissante.

Etant décroissante et minorée par 0, la suite (x_n) est convergente vers une certaine limite $\ell \geq 0$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} = \frac{x_n}{1+n.x_n^2}$$

Si $\ell > 0$, le membre de droite de cette identité à pour limite 0 par opérations car $n.x_n^2 \overset{n\to+\infty}{\to} \infty$, ce qui est incompatible avec le fait que la limite du membre de gauche soit $\ell > 0$. On en déduit que $\ell = 0$.

3.a. Soit $n \geq 1$. La fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall x \geq 0,\ f_n(x) = \frac{x}{1+n.x^2}$ est bien définie, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle de définition (en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas). On a

$$\forall x \geq 0,\ f_n'(x) = \frac{(1+n.x^2) - x.2n.x}{(1+n.x^2)^2} = \frac{1-n.x^2}{(1+n.x^2)^2}$$

On peut dresser le tableau de signe de cette dérivée (qui ne s'annule, et change de signe, en $x = n^{-\frac{1}{2}}$) puis le tableau de vvariation de f_n (qui est croissante de 0 à $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, décroissante de $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ à 0 sur $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$) pour obtenir l'inégalité :

$$\forall x > 0,\ 0 < f_n(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

3.b. Montrons par récurrence que $\forall n \geq 2,\ \ x_n \leq \frac{1}{n}$. (On sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$.)

— Pour $n = 2$, $x_2 = f_1(x_1) \leq \frac{1}{2}$ par l'inégalité démontrée précédemment. L'initialisation est faite.

— Supposons que pour un certain $n \geq 2$, $0 < x_n \leq \frac{1}{n}$. Comme $x_{n+1} = f_n(x_n)$ et que $x_n \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et que f_n est croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, on a (même calcul qu'en 1.c)

$$x_{n+1} = f_n(x_n) \leq f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$$

La propriété à démontrer est donc héréditaire.

— et, par le principe de récurrence, on a $\forall n \geq 2,\ \ x_n \leq \frac{1}{n}$.

4.a. Soit $k \geq 2$.

$$\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} \quad = \quad \frac{1+k.x_k^2}{x_k} - \frac{1}{x_k} = \frac{k.x_k^2}{x_k} = k.x_k$$

Soit $n \geq 3$. D'une part, par télescopie,

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_2}$$

et d'autre part, comme $k.x_k \leq 1$,

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} = \sum_{k=2}^{n-1} k.x_k \leq (n-2)$$

On a donc

$$\frac{1}{x_n} \leq n - 2 + \frac{1}{x_2}$$

Pour $n = 2$, cette inégalité est vraie (c'est une égalité !). Avec l'inégalité de la question 3, on obtient donc :

$$\forall n \geq 2,\ \ \frac{1}{n-2+\frac{1}{x_2}} \leq x_n \leq \frac{1}{n}$$

4.b. En multipliant par $n \geq 2$, on obtient

$$\forall n \geq 2,\ \frac{n}{n-2+\frac{1}{x_2}} \leq n.x_n \leq 1$$

et, par le théorème des gendarmes (les termes extrêmes de ces inégalités ont clairement pour limite 1), on obtient

$$n.x_n \overset{n\to+\infty}{\to} 1 \text{ } i.e. \text{ } x_n \sim \frac{1}{n}.$$

Correction Ex.–5 Le modèle d'évolution s'écrit :

$$\frac{dx}{dt}(t) = u(t) - k.x(t) \tag{E}$$

où $k \in \mathbb{R}_+^*$ et u est une fonction réelle connue, appelée « entrée » du système.

1. Existence de solutions à l'équation (E) : cas où u est simple.

1.a. Si u est constante égale à 0 sur $\mathbb{R}$, on a affaire à la résolution d'un EDO linéaire d'ordre 1 à coefficients constants (MALTHUS !), une fonction x est solution de cette équation (cours) si et seulement si il existe une constante λ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \lambda.e^{-k.t}$$

En $t = 0$, on obtient que la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $x(0) = 1$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = e^{-k.t}$$

1.b. Si u est la fonction constante égale à 1 et $x(0) = 0$. On a affaire à la résolution d'un EDO linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants :

— Une solution particulière (constante) est donnée par $x_{part} : t \mapsto \frac{1}{k}$,

— une fonction x est solution de cette équation (cours) si et seulement si il existe une constante λ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \lambda.e^{-k.t} + \frac{1}{k}$$

— En $t = 0$, on obtient que la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $x(0) = 0$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \frac{1}{k}(1 - e^{-k.t})$$

2. Existence de solutions à l'équation (E) : cas où u est quelconque, continue sur $\mathbb{R}$.

2.a. Si x est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction λ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, \lambda(t) = x(t).e^{k.t}$ est elle aussi de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \lambda(t).e^{-k.t}, x'(t) = \lambda'(t).e^{-k.t} - k.x(t).$$

La fonction x est solution de l'équation (E)

$$\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = u(t) - k.x(t)$$

i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t).e^{-k.t} = u(t)$$

i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t) = u(t).e^{+k.t}$$

En intégrant cette égalité entre 0 et t, ceci équivaut à l'existence d'une constante λ_0 telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda(t) = \lambda_0 + \int_0^t u(\tau).e^{+k.\tau}\, d\tau$$

En revenant à l'inconnue x, la fonction x est solution de l'équation (E) si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = e^{-k.t}\left(\lambda_0 + \int_0^t u(\tau).e^{+k.\tau}\, d\tau\right)$$

i.e. , en développant, intégrant le $e^{-k.t}$ dans l'intégrale,..

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \lambda_0.e^{-k.t} + \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.u(\tau)\, d\tau. \tag{I}$$

subsubexo Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, en prenant $t = 0$ dans (I), on obtient $x(0) = \lambda_0$ et donc l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) vérifiant $x(0) = x_0$ est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = x_0.e^{-k.t} + \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.u(\tau)\, d\tau. \tag{I'}$$

3. La solution généralisée de (E) avec $u = h$, et vérifiant $x(0) = 0 = x_0$ est, d'après (I') donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.h(\tau)\, d\tau$$

Simplifions cette intégrale :
— Si $t \leq 0$, $x(t) = \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.1\!\!1_{\{\tau\geq 0\}}\, d\tau = 0$;
— Si $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.1\!\!1_{\tau\geq 0}\, d\tau \\ &= \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}\, d\tau = \left[\frac{1}{k}.e^{-k.(t-\tau)}\right]_0^t \\ &= \frac{1-e^{-k.t}}{k} \end{aligned}$$

4.a. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) - h(t-\Delta) = 1\!\!1_{\{t\geq 0\}} - 1\!\!1_{\{t-\Delta\geq 0\}} = 1\!\!1_{\{t\geq 0\}} - 1\!\!1_{\{t\geq \Delta\}}$$

On a donc trois cas
— Si $t < 0$, $1\!\!1_{\{t\geq 0\}} = 0 = 1\!\!1_{\{t\geq\Delta\}}$ et $h(t) - h(t-\Delta) = 0$;
— Si $0 \leq t < \Delta$, $1\!\!1_{\{t\geq 0\}} = 1$, $1\!\!1_{\{t\geq\Delta\}} = 0$ et $h(t) - h(t-\Delta) = 1$;
— Si $t \geq \Delta$, $1\!\!1_{\{t\geq 0\}} = 1 = 1\!\!1_{\{t\geq\Delta\}}$ et $h(t) - h(t-\Delta) = 0$;
et donc, dans tous les cas, $\delta(t) = h(t) - h(t-\Delta)$.
4.b. La solution généralisée de (E) avec $u = \delta$, et vérifiant $x(0) = 0 = x_0$ est, d'après (I') donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.\delta(\tau)\, d\tau$$

On a donc, par linéarité de l'intégrale, puis changement de variable affine $\tau' = \tau - \Delta$:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, x(t) &= \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.h(\tau)\, d\tau - \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.h(\tau-\Delta)\, d\tau \\ &= \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.h(\tau)\, d\tau - \int_{-\Delta}^{t-\Delta} e^{-k.(t-\tau)-\Delta}.h(\tau)\, d\tau \\ &= \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.1\!\!1_{\{\tau\geq 0\}}\, d\tau - \int_{-\Delta}^{t-\Delta} e^{-k.(t-\tau)-k.\Delta}.1\!\!1_{\{\tau\geq 0\}}\, d\tau \\ \text{(Chasles+intégrande nulle)} &= \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.1\!\!1_{\{\tau\geq 0\}}\, d\tau - .\int_0^{t-\Delta} e^{-k.(t-\Delta)-\tau)}.1\!\!1_{\{\tau\geq 0\}}\, d\tau \end{aligned}$$

Simplifions ces intégrales en se servant du calcul fait en 3 :

— Si $t \leq 0$, $t-\Delta \leq 0$ et $x(t)=0$;
— Si $t \geq 0$, $t-\Delta \leq 0$ et $x(t)=\frac{1-e^{-k.t}}{k}$;
— Si $t \geq \Delta$ et $x(t)=\frac{1-e^{-k.t}}{k}-\frac{1-e^{-k.(t-\Delta)}}{k}$;
Dans la suite on notera $t_i=i.\Delta$ où $i \in \mathbb{N}$.

5. La solution généralisée de (E) avec $u=\delta$, et vérifiant $x(0)=0=x_0$ est, d'après (I') donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t)=\int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.u(\tau)\,d\tau.$$

Pour $t \geq t_i$, en utilisant l'indicatrice, on a donc

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.u_i.1\!\!1_{\{t_{i-1}\leq\tau<t_i\}}\,d\tau = u_i.\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-k.(t-\tau)}\,d\tau \\
&= u_i.\left[\frac{1}{k}.e^{-k.(t-\tau)}\right]_{t_{i-1}}^{t_i} = u_i.\left[\frac{1}{k}.e^{-k.(t-\tau)}\right]_{t_i-\Delta}^{t_i} \\
&= u_i.\frac{e^{-k.(t-t_i)}-e^{-k.(t-(t_i-\Delta))}}{k} = u_i.e^{-k.(t-t_i)}.\frac{1-e^{-k.\Delta}}{k}
\end{aligned}$$

6. La solution généralisée de (E) avec $u=\delta$, et vérifiant $x(0)=0=x_0$ est, d'après (I') donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t)=\int_0^t e^{-k.(t-\tau)}.u(\tau)\,d\tau.$$

Pour $t=t_i$, comme sur $[0,t_i[$,

$$u(\tau)=\sum_{j=1}^{i} u_j.1\!\!1_{\{t_{j-1}\leq\tau<t_j\}}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
x(t_i) &= \int_0^{t_i} e^{-k.(t_i-\tau)}.\sum_{j=1}^{i} u_j.1\!\!1_{\{t_{j-1}\leq\tau<t_j\}}\,d\tau = \sum_{j=1}^{i} u_j.\int_{t_{j-1}}^{j_i} e^{-k.(t_i-\tau)}\,d\tau \\
&= \sum_{j=1}^{i} u_j.\left[\frac{1}{k}.e^{-k.(t_i-\tau)}\right]_{t_{j-1}}^{t_j} = \sum_{j=1}^{i} u_j.\left[\frac{1}{k}.e^{-k.(t_i-\tau)}\right]_{t_j-\Delta}^{t_j} \\
&= \sum_{j=1}^{i} u_j.e^{-k.(t_i-t_j)}.\frac{1-e^{-k.\Delta}}{k}
\end{aligned}$$

7. En effectuant le changement d'indice sur $\ell=i-j$, $j=i-\ell$, vu que $t_i-t_j=(i-j).\Delta$, on a donc

$$x(t_i)=\sum_{\ell=0}^{i-1} u_{i-\ell}.e^{-k.\ell\Delta}.\frac{1-e^{-k.\Delta}}{k}$$

i.e.

$$x(t_i)=\nu.\sum_{\ell=0}^{i-1} u_{i-\ell}\Phi^{\ell} \tag{ID}$$

où $\nu=\frac{1-e^{-k.\Delta}}{k}$ et $\Phi=e^{-k.\Delta}$.