

Devoir Surveillé 05

Le 24 février
durée 3h30

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits

La plus grande attention sera apportée à la qualité de la rédaction, syntaxe et orthographe comprise.

Numérotez les copies et questions et soulignez ou encadrez les résultats.

Vous pouvez utiliser les résultats des questions en amont d'une question donnée en la référençant clairement

Les calculs, même longs et fastidieux doivent figurer sur la copie

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème I

Les quatre parties de ce problème sont indépendantes, le candidat peut les traiter dans l'ordre de son choix (mais pour comprendre ce problème, il vaut mieux le traiter dans l'ordre).



FIGURE 1 – LE VERRIER par DUPAIN.

Urbain LE VERRIER (1811-1877) doit sa célébrité à la découverte de la planète Neptune en 1846. Nous intéressons ici à des travaux antérieurs à cette découverte. A cette époque, seules 7 planètes sont connues (Mercure, Vénus, La Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus). Les mouvements des planètes sont régis par les lois de NEWTON. Quand on ne néglige pas les interactions entre planètes, les équations caractérisant les trajectoires des planètes sont impossibles à résoudre analytiquement. En supposant les interactions interplanétaires petites, LAGRANGE, puis LAPLACE ont mis en place une méthode perturbative permettant de déterminer l'essentiel de la différence entre situation réelle et situation idéale sans interaction. Leur méthode nécessite une mise en oeuvre numérique délicate qu'ils n'ont pu mener à terme. En reprenant et concluant ce travail, LE VERRIER invente au passage une méthode de détermination de ce qui sera plus tard identifié sous le nom de valeurs propres d'une matrice.

La trajectoire que LE VERRIER prédit concernant la planète Uranus contredit les observations de HERSCHEL effectuées en 1781 : Uranus ne se trouve pas là où elle devrait être ! Ces écarts inexplicables entre la position réelle d'Uranus sur son orbite et celle déduite par la théorie suggèrent l'existence d'un astre inconnu, plus lointain, exerçant une force gravitationnelle perturbatrice. Cet astre s'avérera être la planète Neptune.

Analyser les relations mécaniques entre les planètes du système solaire est un problème fondamental. La complexité des interactions en jeu a mené LAPLACE, LAGRANGE et enfin LE VERRIER à une approche simplificatrice par perturbations dont nous allons tenter de décrire les premières étapes. Les trajectoires des objets célestes sont construites par approximations successives, chaque étape étant issue d'une perturbation de l'étape précédente.

En première approximation, la trajectoire de la terre autour du soleil est une ellipse située dans un plan que l'on nomme le plan de l'écliptique, que nous noterons P .

Toujours en première approximation, on peut considérer que le système solaire tout entier¹, à l'exception de la planète Pluton (que LE VERRIER ne pouvait connaître), est intégralement situé dans ce plan et que les trajectoires de chacune des planètes sont des ellipses ayant toute le soleil pour *foyer*—ce terme est défini en introduction de la partie A—

Le plan de l'écliptique est un plan euclidien, doté d'un repère orthonormé particulier, le repère écliptique, $\mathcal{E} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ où O , le centre du repère, est identifié avec le centre du soleil².



FIGURE 2 – Le plan de l'écliptique, les trajectoires des planètes.

Si M et N sont deux points de ce plan, on note MN ou $d(M, N)$ la longueur du segment d'extrémités M et N , c.à.d. la distance de M à N . On rappelle au passage que si P est doté d'un repère orthonormé \mathcal{R} , si M et N sont deux points de P , de coordonnées respectives (x, y) et (a, b) dans \mathcal{R} , le théorème de PYTHAGORE implique que $d(M, N) = MN = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$.

Partie A

Ellipses et trajectoires de planètes soumises à la seule attraction du soleil.

Dans un plan euclidien P , soit D une droite et F un point de P , $e \in]0, 1[$ un nombre réel. On appelle *ellipse* de foyer F , de directrice D et d'excentricité e l'ensemble de points :

$$E = \{M \in P, d(M, F) = e \cdot d(M, D)\}$$

où $d(M, D)$ désigne la distance du point M à la droite D , $d(M, F)$ la distance du point M au point F .

On suppose un nombre $p > 0$ donné—le paramètre de l'ellipse— et que dans un repère orthonormé \mathcal{R} du plan P , la droite D a pour équation $y = \frac{p}{e}$ et le point F est à l'origine du repère \mathcal{R} , i.e. F a pour coordonnées $(0, 0)$.

1. Les plans des orbites des autres planètes sont en fait légèrement inclinés par rapport à ce plan.
 2. Pour être complet ; ces précisions ne nous servant pas dans le reste du texte, l'axe des abscisses est la droite dite « droite des équinoxes », dirigée par le vecteur \vec{i} pointant vers un point « fixe » dans le temps pour l'approximation faite, le point *vernal* ou « équinoxe de printemps ». Le vecteur \vec{j} est choisi orthonormal à \vec{i} de sorte que la rotation de la terre autour de son axe Nord-Sud se fasse dans le sens direct.

A.1. En coordonnées cartésiennes.

A.1.a. Montrer l'équivalence, pour un point M quelconque de P , de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} ,

$$M \in E \Leftrightarrow (1 - e^2) \cdot y^2 + 2 \cdot e \cdot p \cdot y + x^2 - p^2 = 0$$

A.1.b. Montrer l'équivalence, pour un point M quelconque de P , de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} ,

$$M \in E \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{p}{1-e}, \frac{p}{1+e} \right] \text{ et } x^2 = (1 - e^2) \left(y + \frac{p}{1-e} \right) \cdot \left(-y + \frac{p}{1+e} \right)$$

A.1.c. Dresser le tableau de variations, ainsi que le tableau de signe de sa dérivée, de la fonction réelle de variable réelle, f , définie par

$$\forall u \in \left[-\frac{p}{1-e}, \frac{p}{1+e} \right], f(u) = \sqrt{(1 - e^2) \left(u + \frac{p}{1-e} \right) \cdot \left(-u + \frac{p}{1+e} \right)}.$$

On y indiquera notamment valeurs maximale, en 0 et aux extrémités de l'intervalle de définition.

A.1.d. Sur une page complète, faire un tracé soigneux et cohérent, dans un repère orthonormé \mathcal{R} , de la droite D , du point F et de l'ellipse E . On pourra prendre $p = 1$ et, à titre indicatif, une excentricité e valant $\frac{3}{4}$. Ce tracé sera complété à la question A.2.b et les éléments décrits dans cette question peuvent constituer une aide non négligeable pour un tracé cohérent.

A.2. Passage en coordonnées polaires.

A.2.a. Montrer l'équivalence, pour un point $M = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)$, $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M \in E \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 + e \cdot \sin \theta} = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{2})}$$

A.2.b. Indiquer sur le tracé obtenu en A.1.d, et sans justification autre que la donnée des coordonnées polaires ou distance en fonction de p et e , les éléments suivants de l'ellipse E :

1. son *périhélie* H , point de E le plus proche de F ;
2. son *aphélie* A , point de E le plus éloigné de F ;
3. son demi-grand axe, a , moitié de la distance entre aphélie et périhélie.

La résolution des équations du mouvement (la relation fondamentale de la dynamique) pour le système à deux corps composé du soleil et d'une planète située à l'instant t au point de coordonnées $(r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)$ dans le repère écliptique \mathcal{E} (où r et θ sont fonctions de l'instant t , on rappelle que le soleil est à l'origine de ce repère) mène à la relation, valable à tout instant t ,

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta - \varpi)}$$

où ϖ , $a \geq 0$ et $e \in [0, 1[$, des constantes par rapport au temps, se déterminent en fonction de la distance, de la vitesse et de la masse de la planète à un instant donné, choisi conventionnellement comme origine des temps.

L'angle³ ϖ s'appelle la *longitude du périhélie*. La longueur a s'appelle le demi-grand-axe de l'ellipse. (c.f. A.2.b)

Les trajectoires des planètes sont donc, dans cette première approximation où les seules interactions prises en compte sont les interactions gravitationnelles planète-soleil, des ellipses dont le foyer F est placé au soleil.

Actuellement, les excentricités⁴ de ces ellipses varient de 0.006 pour Vénus à 0.2 pour Mercure. Les longitudes du périhélie (en radians) de Vénus et Mercure sont respectivement de $\approx \frac{22}{30}\pi$ et $\approx \frac{13}{30}\pi$.

3. Il s'agit d'un glyphe grec peu utilisé, variante du π ; vous pouvez faire un ω avec une barre par dessus.

4. la virgule décimale est ici écrite avec le . anglo-saxon, comme dans tout ce texte

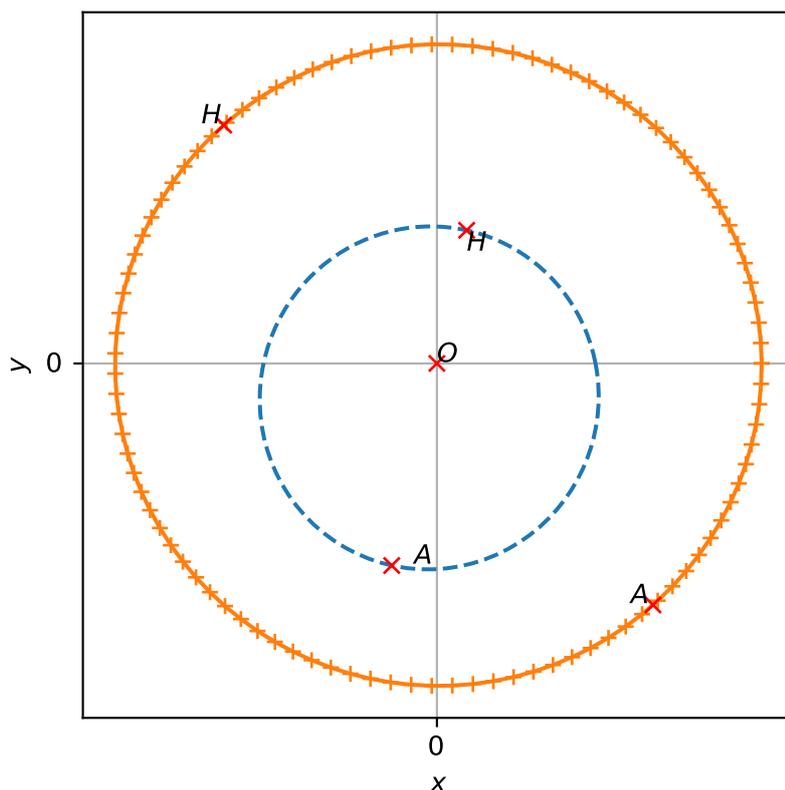


FIGURE 3 – Les ellipses, trajectoires de Mercure et Venus.

A.3. Identifier (en indiquant $-$ ou $+$), en justifiant votre réponse, les trajectoires de Vénus et Mercure sur la figure 3. Périhélies (H) et aphélies (A) sont indiquées sur les trajectoires. Donner une interprétation géométrique de la longitude du périhélie.

Pour traiter le cas où les interactions entre planètes ne sont plus considérées comme négligeables, LE VERRIER considère que chaque planète, à l'instant t , est située sur une ellipse dont les paramètres $p = a.(1 - e^2)$, e et ϖ sont considérés comme eux aussi variables—il s'agit d'une incarnation de la méthode de variation de la constante—en un sens, ils varient moins rapidement dans le temps que l'angle θ et le rayon r . LAPLACE ayant démontré que les demi-axes principaux a sont constants⁵, LE VERRIER s'intéresse uniquement aux paramètres e et ϖ pour chacune des 7 trajectoires.

A titre d'exemple, les trajectoires de Vénus et Mercure présentées en figure 3 sont en fait les ellipses calculées avec les paramètres e et ϖ du 11 Février 2020. Ce jour là et ceux d'après, les planètes se déplacent essentiellement sur ces ellipses mais quelques années plus tard, on devra tracer des ellipses différentes.

Pour une planète p donnée, $p \in \{1, \dots, 7\}$, l'étude des paramètres e_p et ϖ_p en fonction du temps est équivalente à l'étude des deux quantités

$$h_p = e_p \cdot \cos \varpi_p \text{ et } \ell_p = e_p \cdot \sin \varpi_p. \quad (+)$$

Ces 14 fonctions du temps, que l'on suppose suffisamment régulières sur l'intervalle de temps considéré sont, d'après LAGRANGE et LAPLACE, régies en deuxième approximation par un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants que l'on décrira en partie B.

5. Ce que les tables astronomiques montraient depuis longtemps.

A.4. Une version extrêmement simplifiée de ce système est que pour chaque p , pour une constante $\beta_p \in \mathbb{R}$, sur l'intervalle temporel $I = \mathbb{R}$, on a les relations

$$\frac{dh_p}{dt} = \beta_p \cdot \ell_p \text{ et } \frac{d\ell_p}{dt} = -\beta_p \cdot h_p. \quad (++)$$

A.4.a. Résoudre, pour une valeur de p fixée, le système différentiel $(++)$ et donner les solutions h_p, ℓ_p en fonction du temps t , de β_p et des valeurs $h_p(0), \ell_p(0)$ de h_p et ℓ_p en $t = 0$.

On pourra traiter à part le cas $\beta_p = 0$ et, dans l'autre cas, constater que h_p et ℓ_p sont solutions d'une certaine équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

A.4.b. En déduire des expressions pour e_p et ϖ_p , en fonction du temps t , de β_p et de leurs valeurs $e_p(0), \varpi_p(0)$ à $t = 0$ de sorte que $(+)$ soit vérifié.

Partie B

Étude du mouvement des planètes massives du système solaire avec interactions.

Les mouvements des planètes sont régis par les interactions entre chacune d'entre elles et le soleil mais aussi par les interactions qu'elles entretiennent entre elles. Si les interactions avec le soleil sont prédominantes et déterminent l'essence elliptique des trajectoires, la prise en compte des interactions entre planètes apporte une correction à ces trajectoires idéales.

Pour affiner la détermination des trajectoires, il faut donc prendre en compte les interaction existantes entre les $\binom{7}{2}$ paires de planètes prises parmi les 7 planètes connues du temps de LE VERRIER. Concernant les trajectoires des planètes massives (Uranus, Jupiter et Saturne), LE VERRIER a, dans un premier temps, négligé l'influence des petites planètes (Mercure, Vénus, Terre et Mars). Cela revient à se placer dans un système solaire ne comportant que les 3 planètes massives.

Pour chacune des 3 planètes massives, LE VERRIER définit les quantités h_p et ℓ_p , fonctions du temps, vues en fin de partie A. Ainsi, pour tout p de $\{1, \dots, 3\}$, on définit les fonctions réelles h_p et ℓ_p , supposées régulières (*a priori* de classe \mathcal{C}^1) sur l'intervalle temporel $I = \mathbb{R}$, de sorte que pour tout $p \in \{1, \dots, 3\}$, toujours avec la convention

$$h_p = e_p \cdot \cos \varpi_p \text{ et } \ell_p = e_p \cdot \sin \varpi_p, \quad (+)$$

les coordonnées (x_p, y_p) de la planète p dans le repère de l'écliptique \mathcal{E} soient données par

$$x_p = r_p \cdot \cos \theta_p, y_p = r_p \cdot \sin \theta_p \text{ avec } r_p = \frac{a_p \cdot (1 - e_p^2)}{1 + e_p \cdot \cos(\theta_p - \varpi_p)}.$$

Les calculs de LAGRANGE et LAPLACE montrent qu'il existe une matrice B de taille 3×3 (dont les coefficients sont des réels constants et ne dépendent donc pas du temps) telle que, pour tout réel t , on ait :

$$\begin{cases} H'(t) &= B \cdot L(t) \\ L'(t) &= -B \cdot H(t) \end{cases} \quad (**)$$

où

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix}, L(t) = \begin{pmatrix} \ell_1(t) \\ \ell_2(t) \\ \ell_3(t) \end{pmatrix}, H'(t) = \begin{pmatrix} h'_1(t) \\ h'_2(t) \\ h'_3(t) \end{pmatrix} \text{ et } L'(t) = \begin{pmatrix} \ell'_1(t) \\ \ell'_2(t) \\ \ell'_3(t) \end{pmatrix}.$$

B.1. Montrer que, en supposant les fonctions h_p et ℓ_p de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , elles sont en fait de classe \mathcal{C}^2 et que, en définissant pour tout réel t ,

$$H''(t) = \begin{pmatrix} h''_1(t) \\ h''_2(t) \\ h''_3(t) \end{pmatrix} \text{ et } L''(t) = \begin{pmatrix} \ell''_1(t) \\ \ell''_2(t) \\ \ell''_3(t) \end{pmatrix},$$

on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, H''(t) = A \cdot H(t) \text{ et } L''(t) = A \cdot L(t) \text{ où } A = -B^2.$$

B.2. On suppose qu'il existe une matrice Q inversible de taille 3×3 et trois nombres réels $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ tels que

$$A = Q \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}. \quad (\text{D})$$

B.2.a. Pour tout réel t , on pose $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = Y(t)$ avec $Y(t) = Q^{-1} \cdot H(t)$. Montrer que pour tout i de $\{1, \dots, 3\}$,

y_i est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on exhibera et dont on donnera la forme générale des solutions suivant le signe de α_i .

B.2.b. On suppose que α_3 est positif (strictement). Montrer en quoi, en ne donnant que l'idée force, ceci risque d'être contradictoire avec le fait que pendant la durée d'existence du système solaire, chaque excentricité e_p devrait rester comprise entre 0 et 1.

On suppose dorénavant que $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 0$. (Les cas d'égalité sont des cas singuliers que nous ne traitons pas.)

B.2.c. Donner la forme générale des fonctions h_1, h_2 et h_3, ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 . Combien de paramètres réels distincts apparaissent pour décrire ces 6 fonctions ?

B.2.d. Prouver que A et B sont inversibles. Montrer que 6 paramètres suffisent.

Partie C

Méthode de LE VERRIER pour déterminer les valeurs propres α_i .

On appelle trace d'une matrice carrée M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices 3×3 à coefficients réels, de coefficients $(m_{i,j})_{1 \leq i \leq 3; 1 \leq j \leq 3}$, la quantité notée $\text{Tr}(M)$, définie par

$$\text{Tr}(M) = m_{1,1} + m_{2,2} + m_{3,3}.$$

C.1.a. Soient A et B deux matrices de taille 3×3 . Montrer que $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$.

C.1.b. En déduire que deux matrices de taille 3×3 semblables ont même trace.

C.2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si on peut écrire l'équation (D) (question B.2), pour α_1, α_2 et α_3 trois réels et $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible,

$$A = Q \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1},$$

on qualifie le polynôme $P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$ de *polynôme caractéristique* de A . On pose :

$$p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + X^3 = P \text{ et } S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, S_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \text{ et } S_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3.$$

C.2.a. Exprimer $\text{Tr}(A)$, $\text{Tr}(A^2)$ et $\text{Tr}(A^3)$ en fonction de S_1, S_2 et S_3 .

C.2.b. Exprimer p_1, p_2 et p_0 en fonction de α_1, α_2 et α_3 .

C.2.c. Exprimer p_1 et p_2 en fonction de S_1 et S_2 . On admet que p_0 est $\frac{3S_1 S_2 - S_1^3 - 2S_3}{6}$.

C.2.d. Des trois questions précédentes on tire le fait que le polynôme caractéristique pour une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, s'il existe, est unique et qu'il est calculable en fonction des coefficients de A . On le note P_A .

Écrire une fonction Python, appelée `polynome_caracteristique` prenant en entrée une matrice A (de taille 3×3) et renvoyant la liste des coefficients de P_A , en ordre croissant de degré (sans oublier le 1 dominant). On rappelle que en Python/numpy l'expression `numpy.dot(A, B)` retourne la matrice produit de deux matrices A et B , A et B étant des `ndarray`'s de formes compatibles.

C.2.e. Si le polynôme caractéristique $P_A = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + X^3$ d'une matrice A est bien défini, vérifier qu'alors $p_0 \cdot I_3 + p_1 \cdot A + p_2 \cdot A^2 + A^3$ est forcément la matrice nulle.

C.3. On suppose que

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 11 & 13 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche à écrire cette matrice sous la forme (D) (question B.2). Dans une phase d'analyse du problème, on suppose que A est sous la forme (D) avec de plus $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$. On note P_A le polynôme caractéristique (c.f. question C.2) de A .

C.3.a. Calculer A^2 et A^3 .

C.3.b. En déduire que P_A est $X^3 + X^2 - 14X - 24$

3.b.i. et vérifier que $A^3 + A^2 - 14A - 24.I_3 = 0$.

3.b.ii. Vérifier que la famille de matrices (I_3, A, A^2) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

C.3.c. Calculer $P_A(-2)$, en déduire les racines de P_A et les valeurs de α_1, α_2 et α_3 .

C.3.d. En guise de synthèse :

3.d.i. Pour chaque valeur α_i trouvée en C.3.c, montrer qu'il existe un vecteur V_i non nul vérifiant $A.V_i = \alpha_i.V_i$; on pourra vérifier que $(A - \alpha_1.I_3).(A - \alpha_2.I_3).(A - \alpha_3.I_3) = 0$

3.d.ii. En déduire la construction d'une matrice Q inversible telle que $A = Q \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}$.

Partie D

Algorithmique autour du calcul effectif de LE VERRIER.

L'étude du système réduit aux trois planètes massives Jupiter, Saturne et Uranus fait en réalité intervenir les matrices

$$B = - \begin{pmatrix} -7.489 & 4.815 & 0.035 \\ 11.894 & -18.585 & 0.232 \\ 0.314 & 0.835 & -2.325 \end{pmatrix} \text{ et } A = -B^2 = \begin{pmatrix} -113.38 & 125.53 & -0.77 \\ 310.05 & -402.88 & 4.43 \\ -6.85 & 15.95 & -5.61 \end{pmatrix}.$$

Au niveau des unités⁶, les coefficients de B sont en secondes d'arc/an.

Le polynôme caractéristique de A , s'il existe, est calculé avec la fonction `polynome_caracteristique`, (c.f. question C.2.d, les coefficients sont arrondis à 10^{-2} près)

$$P_A = 35427.67 + 9581.38X + 521.88X^2 + X^3.$$

Il nous faut en trouver les racines afin de pouvoir déterminer les valeurs propres de la matrice A .

On va donc expliciter un algorithme capable de localiser les racines réelles d'un polynôme de degré 3.

D.1. Soit $P = X^3 + p_2.X^2 + p_1.X + p_0$ un polynôme degré 3 à coefficients réels. En analysant les différents tableaux de variations possibles pour la fonction $x \mapsto P(x)$, montrer que on a l'équivalence entre

(i) P admet trois racines réelles distinctes $\alpha_- < \alpha_0 < \alpha_+$;

(ii) P' admet deux racines réelles distinctes $\beta_- < \beta_+$ et $P(\beta_+).P(\beta_-) < 0$;

Au cas où l'une de ces deux conditions est remplie, classez, en justifiant votre ordonnancement les racines de P et de P' .

On code en Python un polynôme P par la liste de ses coefficients dans l'ordre croissant d'indice, avec éventuellement une suite de zéros finaux, par exemple les polynômes $P = 1 + X - X^2 + 2.X^4$ et $Q = 0.2 - 0.4.X^2 + 0.3X^3$ peuvent être codés respectivement en

$$P = [1, 1, -1, 0, 2] \text{ et } Q = [0.2, 0, -0.4, 0.3, 0].$$

6. Ces unités sont celles utilisées dans les mémoires d'époque de LAGRANGE, LAPLACE et LE VERRIER, elles sont encore utilisées de nos jours.

D.2. Écrire une fonction Python `racines_deg2` d'argument P où P est un polynôme de degré 2 retournant la liste des racines réelles de P .

D.3.a. On considère la fonction Python `mystere1` du script suivant dont les arguments sont décrits dans la docstring. Décrire ce que calcule et retourne cette fonction.

```
def mystere1(x,P):
    """
    Entrée : x flottant, P polynome sous forme de liste
    Sortie : ???
    """
    s = 0
    u = 1
    for i in range(len(P)):
        s += P[i]*u
        u = u*x
    return s
```

D.3.b. On considère la fonction Python `mystere2` du script suivant dont les arguments sont décrits dans la docstring. Décrire ce que calcule et retourne cette fonction.

```
def mystere2(f,a,b,epsilon = 0.000001):
    """
    Entrée : f fonction float->float
    a,b deux floats tels que f(a).f(b)<=0
    """
    while True :
        c = (a+b)*0.5
        if f(a)*f(c) <= 0:
            b = c
        else :
            a = c
        if abs(b-a)< epsilon :
            break
    return c
```

D.4. La fonction `racines_deg3` d'argument P où P est un polynôme de degré 3 ayant trois racines distinctes retourne la liste des racines réelles de P . Expliquer étape par étape son fonctionnement mathématique et notamment la construction des deux polynômes P_p et Q .

```
def racines_deg3(P):
    """
    P un polynome de degré 3 avec 3 racines réelles distinctes
    retourne la liste de ces 3 racines
    """
    Pp = [ i*P[i] for i in range(1,len(P))]
    beta_pm = racines_deg2(Pp)
    def f(x):
        return mystere1(x,P)
    alpha = mystere2(f,beta_pm[0],beta_pm[1])
    Q = [P[1]+P[2]*alpha+P[3]*alpha**2,P[2]+P[3]*alpha,P[3]]
    alpha_pm = racines_deg2(Q)
    return [alpha_pm[0],alpha,alpha_pm[1]]
```

D.5. Faire une synthèse du calcul en décrivant la procédure menant de la donnée de la matrice A au calcul du polynôme P_A et enfin au calcul (approché) des trois valeurs propres et des racines carrées de leurs opposées :

les pulsations de Le Verrier sont en (s/an): [22.427, 3.715, 2.258]

Correction DS 05

Correction Ex.-1

Partie A

Ellipses et trajectoires de planètes soumises à la seule attraction du soleil.

Dans un plan euclidien P , soit D une droite et F un point de P , $e \in]0, 1[$ un nombre réel. On appelle *ellipse* de foyer F , de directrice D et d'excentricité e l'ensemble de points :

$$E = \{M \in P, d(M, F) = e \cdot d(M, D)\}$$

où $d(M, D)$ désigne la distance du point M à la droite D , $d(M, F)$ la distance du point M au point F .

On suppose un nombre $p > 0$ donné—le *paramètre* de l'ellipse— et que dans un repère orthonormé \mathcal{R} du plan P , la droite D a pour équation $y = \frac{p}{e}$ et le point F est à l'origine du repère \mathcal{R} , *i.e.* F a pour coordonnées $(0, 0)$.

A.1. En coordonnées cartésiennes.

A.1.a. Soit un point M quelconque de P , de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} .

On a $d(M, D) = |y - \frac{p}{e}|$ et $d(M, F) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et donc on tire l'équivalence

$$M \in E \Leftrightarrow d(M, F)^2 - e^2 \cdot d(M, D)^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - e^2) \cdot y^2 + 2 \cdot e^2 \cdot y \cdot \frac{p}{e} + x^2 - e^2 \cdot \frac{p^2}{e^2} = 0 \Leftrightarrow (1 - e^2) \cdot y^2 + 2 \cdot e \cdot p \cdot y + x^2 - p^2 = 0$$

A.1.b. On peut factoriser le trinôme $(1 - e^2) \cdot y^2 + 2 \cdot e \cdot p \cdot y - p^2$ en calculant son discriminant et ses racines

$$\Delta = 4e^2 \cdot p^2 + 4 \cdot p^2 \cdot (1 - e^2) = (2p)^2 \text{ et } y_{\pm} = \frac{-2e \cdot p \pm 2p}{2(1 - e^2)} = p \cdot \frac{-e \pm 1}{1 - e^2} = \begin{cases} \frac{p}{1+e} \\ \text{ou} \\ -\frac{p}{1-e} \end{cases} .$$

Il vient

$$(1 - e^2) \cdot y^2 + 2 \cdot e \cdot p \cdot y - p^2 = (1 - e^2) \left[y + \frac{p}{1-e} \right] \cdot \left[y - \frac{p}{1+e} \right].$$

Soit un point M quelconque de P , de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} .

$$M \in E \Leftrightarrow (1 - e^2) \cdot y^2 + 2 \cdot e \cdot p \cdot y + x^2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - e^2) \left[y + \frac{p}{1-e} \right] \cdot \left[y - \frac{p}{1+e} \right] = -x^2$$

et

$$M \in E \Leftrightarrow x^2 = (1 - e^2) \left[y + \frac{p}{1-e} \right] \cdot \left[-y + \frac{p}{1+e} \right] \text{ et } x^2 \geq 0$$

i.e.

$$M \in E \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{p}{1-e}, \frac{p}{1+e} \right] \text{ et } x^2 = (1 - e^2) \left(y + \frac{p}{1-e} \right) \cdot \left(-y + \frac{p}{1+e} \right)$$

A.1.c. La fonction réelle de variable réelle, f , définie par

$$\forall u \in \left[-\frac{p}{1-e}, \frac{p}{1+e}\right], f(u) = \sqrt{(1-e^2) \left(u + \frac{p}{1-e}\right) \cdot \left(-u + \frac{p}{1+e}\right)}.$$

est bien définie \mathcal{C}^0 sur l'intervalle $\left[-\frac{p}{1-e}, \frac{p}{1+e}\right]$, du fait de la positivité, continuité de l'argument de la racine carrée sur cet intervalle.

On a $f(0) = p$.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle ouvert $\left]-\frac{p}{1-e}, \frac{p}{1+e}\right[$, car sur cet intervalle, l'argument de la racine carrée est de classe \mathcal{C}^1 et ne s'annule pas.

On a

$$\forall u \in \left]-\frac{p}{1-e}, \frac{p}{1+e}\right[, f'(u) = \frac{(1-e^2) \cdot \left[-2u - \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e}\right]}{2f(u)} = 2 \frac{(1-e^2) \cdot \left[-u - \frac{p \cdot e}{1-e^2}\right]}{2f(u)}$$

Le numérateur est une expression affine en u dont le signe est facilement déterminable sachant que $f(u) > 0$.

Le maximum est atteint en $-\frac{p \cdot e}{(1-e^2)}$ et f y vaut $\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$.

On a donc le tableau de signe/variations :

u	$-\frac{p}{1-e}$		$-\frac{pe}{1-e^2}$		$\frac{p}{1+e}$
$f'(u)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f(u)$	0	\nearrow	$\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$	\searrow	0

A.1.d. Le lien entre l'ellipse E et la fonction f est l'équivalence

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow (y \in \left[-\frac{p}{1-e}, \frac{p}{1+e}\right]) \text{ et } (x = f(y) \text{ ou } x = -f(y))$$

Il s'agit donc de tracer le graphe de f relativement à une disposition d'axes un peu inhabituelle.

A.2. Passage en coordonnées polaires.

A.2.a. Soit $M = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)$, $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence, du fait que $d(M, D)^2 = |r \cdot \sin \theta - p/e|^2$ et $d(M, F)^2 = d(M, O)^2 = r^2$,

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow e^2 \cdot |r \cdot \sin \theta - p/e|^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow e \cdot (r \cdot \sin \theta - p/e) = \pm r \Leftrightarrow p = r \cdot (e \cdot \sin \theta - 1) \text{ ou } p = r \cdot (e \cdot \sin \theta + 1)$$

et, comme $e < 1$, $-1 < e \cdot \sin \theta < +1$ i.e. $e \cdot \sin \theta - 1 < 0$ et $e \cdot \sin \theta + 1 > 0$, on peut diviser pour obtenir

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow r = \frac{p}{e \cdot \sin \theta - 1} \text{ ou } r = \frac{p}{e \cdot \sin \theta + 1}$$

Or $p > 0$ et donc, comme $r \geq 0$, la première possibilité est exclue (en effet, $e \cdot \sin \theta - 1 \leq e - 1 < 0$ et donc $\frac{p}{e \cdot \sin \theta - 1} < 0$). Il reste

$$M \in E \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 + e \cdot \sin \theta}$$

Par les relations trigonométriques usuelles, $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin \theta$ et notre équivalence devient

$$M \in E \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 + e \cdot \sin \theta} = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{2})}$$

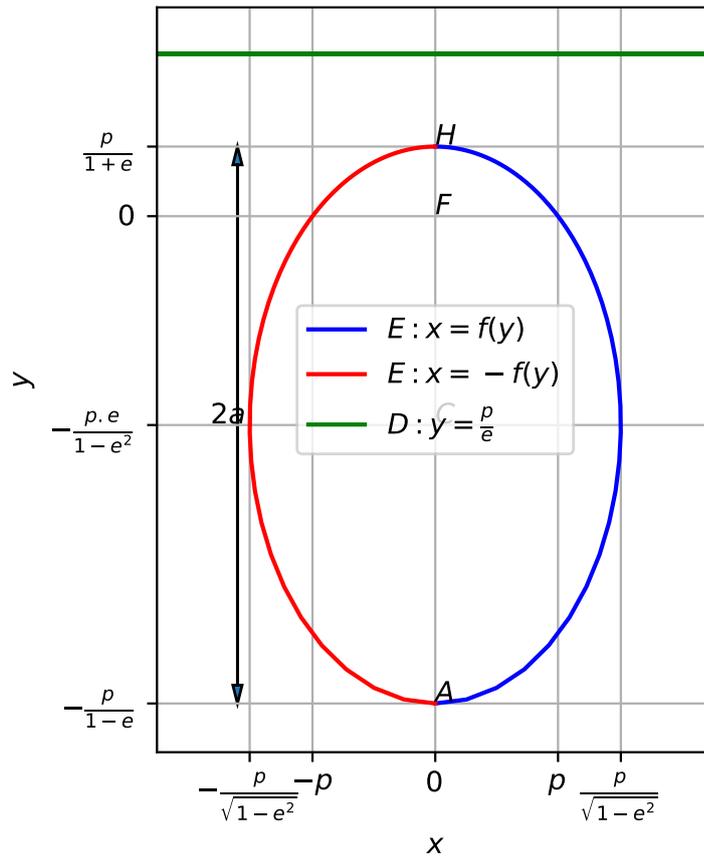


FIGURE 4 – Une ellipse, union des deux graphes $x = f(y)$ et $x = -f(y)$.

A.2.b. Voir la figure 4.

1. le *périhélie* H , point de E le plus proche de F , $r = d(H, F) = \frac{p}{1-e}$, obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{2}$;
2. l'*aphélie* A , point de E le plus éloigné de F , $r = d(H, F) = \frac{p}{1+e}$, obtenu pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$;
3. le demi-grand axe, a , moitié de la distance entre aphélie et périhélie, vaut

$$a = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} \right) = \frac{p}{1-e^2};$$

A.3. Les excentricités des trajectoires des planètes sont 0,006 pour Vénus et 0,2 pour Mercure. Cela signifie que la trajectoire de Vénus est plus "circulaire" que celle de Mercure, plus "allongée", de ceci, on en déduirait que la trajectoire en + est celle de Vénus et la trajectoire en - est celle de Mercure.

Le fait que le périhélie de la courbe en + (Venus donc) a une coordonnée angulaire θ entre $\frac{\pi}{2}$ et π alors que le périhélie de la courbe en - (Mercure) a une coordonnée angulaire θ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ est cohérent avec le fait que les longitudes du périhélie de Vénus et Mercure sont respectivement approximativement de $\frac{22}{30}\pi \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et $\frac{13}{30}\pi \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

A.4.a. Il s'agit de résoudre, sur l'intervalle temporel $I = \mathbb{R}$, le système d'équations différentielles

$$\frac{dh_p}{dt} = \beta_p \cdot \ell_p \text{ et } \frac{d\ell_p}{dt} = -\beta_p \cdot h_p. \quad (++)$$

Analyse On suppose que l'on dispose de deux fonctions h_p et ℓ_p solutions de ce système sur I .

Remarquons tout d'abord que comme h_p et ℓ_p sont solutions de ce système, elles sont au moins dérivables sur I et donc continues. Le fait que leurs dérivées s'expriment à en fonctions (ici, linéaires)

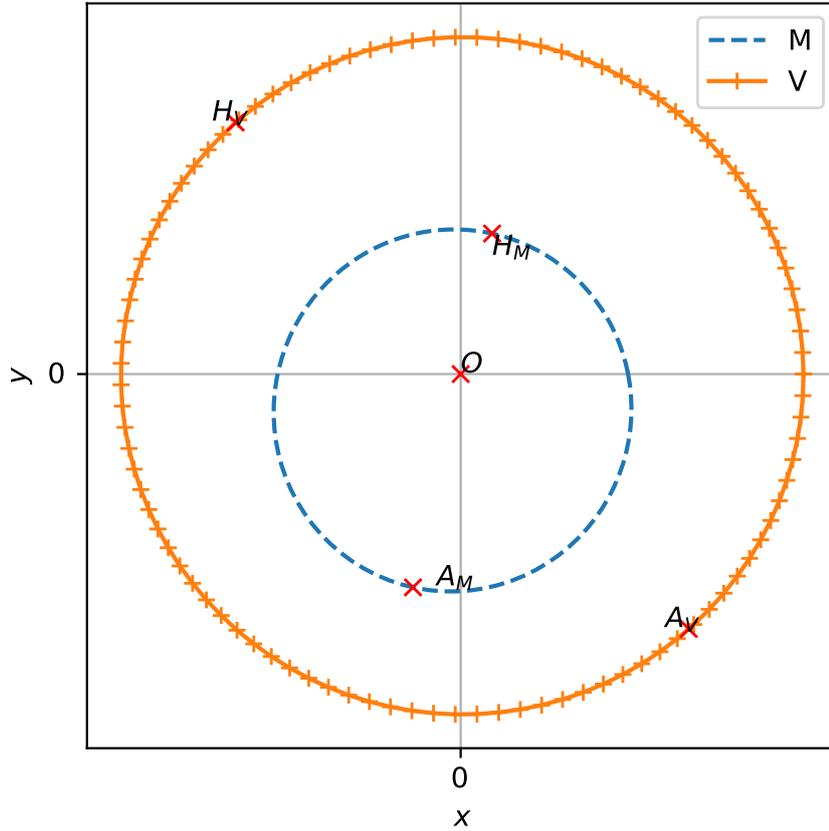


FIGURE 5 – Les ellipses, trajectoires de Mercure et Venus.

d'elles mêmes garantit immédiatement le caractère continu des dérivées et, dans une récurrence assez claire le caractère \mathcal{C}^k sur I des fonctions h_p et ℓ_p . En dérivant les deux EDO de (++) et en les réinjectant dans les identités obtenues, on obtient que sur I ,

$$\frac{d^2 h_p}{dt^2} = \beta_p \cdot \frac{d\ell_p}{dt} \text{ et } \frac{d^2 \ell_p}{dt^2} = -\beta_p \cdot \frac{dh_p}{dt},$$

puis

$$\frac{d^2 h_p}{dt^2} = -\beta_p^2 \cdot h_p \text{ et } \frac{d^2 \ell_p}{dt^2} = -\beta_p^2 \cdot \ell_p. \quad (+++)$$

Les fonctions h_p et ℓ_p sont donc solutions de la même équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $\alpha^2 + \beta_p^2 = 0$. Les solutions de (+++) ont une forme bien connue : dont les racines sont

1. Si $\beta_p = 0$: Il existe des constantes réelles $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1$ telles que

$$\forall t \in I, h_p(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot t \text{ et } \ell_p(t) = \mu_0 + \mu_1 \cdot t$$

2. Si $\beta_p \neq 0$: Il existe des constantes réelles $\lambda_c, \lambda_s, \mu_c, \mu_s$ telles que

$$\forall t \in I, h_p(t) = \lambda_c \cdot \cos(\beta_p \cdot t) + \lambda_s \cdot \sin(\beta_p \cdot t) \text{ et } \ell_p(t) = \mu_c \cdot \cos(\beta_p \cdot t) + \mu_s \cdot \sin(\beta_p \cdot t).$$

On peut réutiliser (++) pour trouver des contraintes additionnelles sur les constantes introduites :

1. Si $\beta_p = 0$: h_p et ℓ_p sont en fait constantes, *i.e.* $\lambda_1 = \mu_1 = 0$.

2. Si $\beta_p \neq 0$: On a

$$\forall t \in I, h_p'(t) = -\beta_p \cdot (\lambda_c \cdot \sin(\beta_p \cdot t) - \lambda_s \cdot \cos(\beta_p \cdot t)) \text{ et } \ell_p'(t) = \beta_p \cdot (-\mu_c \cdot \sin(\beta_p \cdot t) + \mu_s \cdot \cos(\beta_p \cdot t)).$$

Par (++) , on a donc

$$\forall t \in I, \ell_p(t) = (\lambda_c \cdot \sin(\beta_p \cdot t) - \lambda_s \cdot \cos(\beta_p \cdot t)) \text{ et } h_p(t) = (-\mu_c \cdot \sin(\beta_p \cdot t) + \mu_s \cdot \cos(\beta_p \cdot t))$$

et donc, par liberté de la famille de fonctions $(t \mapsto \cos(\beta_p \cdot t), t \mapsto \sin(\beta_p \cdot t))$, on a forcément

$$-\lambda_s = \mu_c / \text{et } \mu_s = \lambda_c.$$

En résumé, si h_p et ℓ_p sont solutions de (++) , alors il existe deux constantes réelles λ_c, λ_s telles que

$$\forall t \in I, h_p(t) = \lambda_c \cdot \cos(\beta_p \cdot t) + \lambda_s \cdot \sin(\beta_p \cdot t) \text{ et } \ell_p(t) = -\lambda_s \cdot \cos(\beta_p \cdot t) + \lambda_c \cdot \sin(\beta_p \cdot t). \quad (++++)$$

Synthèse Réciproquement, dans le cas $\beta_p \neq 0$, les fonctions de la forme donnée par (++++) sont clairement⁷ solutions de (++) . Dans le cas $\beta_p = 0$, sachant que $\cos(\beta_p \cdot t) = 1$ et $\sin(\beta_p \cdot t) = 0$, la solution en couple de constantes quelconques s'écrit de la même manière.

On peut déterminer les constantes λ_c, λ_s en constatant qu'à $t = 0$, on a

$$\lambda_c = h_p(0), \lambda_s = -\ell_p(0)$$

On en conclut que h_p, ℓ_p sont solutions de (++) si et seulement si

$$\forall t \in I, h_p(t) = h_p(0) \cdot \cos(\beta_p \cdot t) - \ell_p(0) \cdot \sin(\beta_p \cdot t) \text{ et } \ell_p(t) = \ell_p(0) \cdot \cos(\beta_p \cdot t) + h_p(0) \cdot \sin(\beta_p \cdot t). \quad (*)$$

A.4.b. Il s'agit de trouver des fonctions e_p et ϖ_p telles que

$$\forall t \in I, h_p(t) = e_p(t) \cdot \cos(\varpi_p(t)) \text{ et } \ell_p(t) = e_p(t) \cdot \sin(\varpi_p(t)) \quad (+)$$

En posant $e_p(t) = \sqrt{h_p(t)^2 + \ell_p(t)^2}$ et donc, d'après (*), pour tout t , $e_p(t) = \sqrt{h_p(0)^2 + \ell_p(0)^2} = e_p(0)$, on s'aperçoit que e_p est constante sur I et en posant

$$h_p(0) = e_p(0) \cdot \cos \varpi_p(0) \text{ et } \ell_p(0) = e_p(0) \cdot \sin \varpi_p(0),$$

en substituant dans (*), il vient que

$$\forall t \in I, h_p(t) = e_p(0) \cdot \cos(\beta_p \cdot t + \varpi_p(0)) \text{ et } \ell_p(t) = e_p(0) \cdot \sin(\beta_p \cdot t + \varpi_p(0)). \quad (**)$$

On peut donc prendre $\varpi_p(t) = \beta_p \cdot t + \varpi_p(0)$.

Partie B

Étude du mouvement des planètes massives du système solaire avec interactions.

On suppose que pour tout réel t ,

$$\begin{cases} H'(t) &= B \cdot L(t) \\ L'(t) &= -B \cdot H(t) \end{cases} \quad (**)$$

où

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix}, L(t) = \begin{pmatrix} \ell_1(t) \\ \ell_2(t) \\ \ell_3(t) \end{pmatrix}, H'(t) = \begin{pmatrix} h_1'(t) \\ h_2'(t) \\ h_3'(t) \end{pmatrix} \text{ et } L'(t) = \begin{pmatrix} \ell_1'(t) \\ \ell_2'(t) \\ \ell_3'(t) \end{pmatrix}.$$

7. les calculs se résument à des dérivations de sin et cos d'un niveau en deçà des calculs déjà faits.

B.1. Si on suppose toutes les fonctions h_p et ℓ_p de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , alors, du fait de $(\star\star)$, par exemple, h'_1 est combinaison linéaire des fonctions ℓ_p , $p \in \{1, \dots, 3\}$ et donc h'_1 est elle-même de classe \mathcal{C}^1 . Plus précisément si on désigne par $b_{1,1}, \dots, b_{1,3}$ les coefficients de la première ligne de la matrice B , on a, sur \mathbb{R} ,

$$h'_1 = b_{1,1} \cdot \ell_1 + \dots + b_{1,3} \cdot \ell_3$$

et donc, en dérivant

$$h''_1 = b_{1,1} \cdot \ell'_1 + \dots + b_{1,3} \cdot \ell'_3.$$

En agissant de même pour les autres lignes, *i.e.* les fonctions h_2 et h_3 , on obtient que

$$\forall t \in \mathbb{R}, H''(t) = B.L'(t)$$

et en remplaçant $L'(t)$ par $-B.H(t)$, on obtient que, en posant $A = -B^2$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, H''(t) = A.H(t)$$

Un raisonnement similaire sur les fonctions ℓ_i donne successivement

$$\forall t \in \mathbb{R}, L''(t) = -B.H'(t)$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}, L''(t) = A.L(t)$$

B.2. On suppose qu'il existe une matrice Q inversible de taille 3×3 et trois nombres réels $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ tels que $A = Q \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}$.

B.2.a. On a $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = Q^{-1} \cdot H(t)$. En tant que combinaison linéaire de h_1, h_2 et h_3 , on peut affirmer que y_1, y_2 et y_3 sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et donc le vecteur $Y''(t) = \begin{pmatrix} y''_1(t) \\ y''_2(t) \\ y''_3(t) \end{pmatrix}$ est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. De

$\forall t, Y(t) = Q^{-1} \cdot H(t)$, on déduit (car la dérivée d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées et car les coefficients de Q^{-1} ne dépendent pas du temps, ils sont constants) $\forall t, Y''(t) = Q^{-1} \cdot H''(t)$ et les égalités suivantes :

$$Y''(t) = Q^{-1} \cdot H''(t)$$

$$= -Q^{-1} \cdot B^2 \cdot H(t)$$

$$[\text{d'après la question B.1 de cette partie}] = Q^{-1} \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1} \cdot H(t)$$

$$[\text{d'après la question précédente}] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1} \cdot H(t)$$

$$[\text{par définition de } Y] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot Y(t)$$

Cela signifie donc que, pour tout i de $\{1, \dots, 3\}$, pour tout réel positif t , on a :

$$y''_i(t) = \alpha_i y_i(t).$$

Pour tout i de $\{1, \dots, 3\}$, y_i est bien une solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

B.2.b. On suppose que α_3 est positif (strictement). En résolvant $y_3'' = \alpha_3 \cdot y_3$, on obtient que y_3 est combinaison linéaire de $t \mapsto e^{+\sqrt{\alpha_3} \cdot t}$ et $t \mapsto e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot t}$. La première de ces deux fonctions tend vers $+\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. En exprimant H sous la forme $H = Q \cdot Y$, on voit que les composantes de H risquent d'être non bornées sur \mathbb{R} , cela impliquerait que les (? au moins une ?) excentricités des ellipses soient non bornées, ce qui serait embêtant pour des ellipses.

On suppose dorénavant que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 < 0$.

B.2.c. En posant $\beta_k = \sqrt{-\alpha_k}$, on peut résoudre les équations portant sur les fonctions y_i de la même manière qu'en A.3 pour voir que si H (et L) est solution de $(\star\star)$ alors chaque h_p (et chaque ℓ_p) est combinaison linéaire des fonctions

$$c_k : t \mapsto \cos(\beta_k \cdot t), s_k : t \mapsto \sin(\beta_k \cdot t), k \in \{1, \dots, 3\}$$

Cela fait en tout 12 paramètres réels distincts apparaissant pour décrire ces 6 fonctions : il suffit en effet de deux paramètres par fonction y_i pour les fonctions h_p et autant pour les fonctions ℓ_p .

Plus précisément, en résolvant pour Y , on en conclut à l'existence de 6 constantes réelles $\lambda_{s,k}, \lambda_{c,k}$ telles que

$$Y_h = \begin{pmatrix} \lambda_{c,1} \cdot c_1 + \lambda_{s,1} \cdot s_1 \\ \lambda_{c,2} \cdot c_2 + \lambda_{s,2} \cdot s_2 \\ \lambda_{c,3} \cdot c_3 + \lambda_{s,3} \cdot s_3 \end{pmatrix}$$

et

$$H = Q \cdot Y_h = Q \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{c,1} \cdot c_1 + \lambda_{s,1} \cdot s_1 \\ \lambda_{c,2} \cdot c_2 + \lambda_{s,2} \cdot s_2 \\ \lambda_{c,3} \cdot c_3 + \lambda_{s,3} \cdot s_3 \end{pmatrix}$$

En agissant de même avec L , on en conclut à l'existence de 6 constantes réelles $\lambda'_{s,k}, \lambda'_{c,k}$ telles que

$$L = Q \cdot \begin{pmatrix} \lambda'_{c,1} \cdot c_1 + \lambda'_{s,1} \cdot s_1 \\ \lambda'_{c,2} \cdot c_2 + \lambda'_{s,2} \cdot s_2 \\ \lambda'_{c,3} \cdot c_3 + \lambda'_{s,3} \cdot s_3 \end{pmatrix}$$

B.2.d. La matrice A est inversible car semblable à une matrice inversible (car diagonale sans termes nuls sur la diagonale). Comme $A = -B^2$, la matrice B est elle aussi inversible, car dans le cas contraire, un vecteur non nul de son noyau serait dans le noyau de A .

Sachant que $H' = B \cdot L$, on a alors

$$Q \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{c,1} \cdot c'_1 + \lambda_{s,1} \cdot s'_1 \\ \lambda_{c,2} \cdot c'_2 + \lambda_{s,2} \cdot s'_2 \\ \lambda_{c,3} \cdot c'_3 + \lambda_{s,3} \cdot s'_3 \end{pmatrix} = B \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} \lambda'_{c,1} \cdot c_1 + \lambda'_{s,1} \cdot s_1 \\ \lambda'_{c,2} \cdot c_2 + \lambda'_{s,2} \cdot s_2 \\ \lambda'_{c,3} \cdot c_3 + \lambda'_{s,3} \cdot s_3 \end{pmatrix}$$

En y ajoutant le fait que $c'_k = -\beta_k \cdot s_k$ et $s'_k = \beta_k \cdot c_k$, on voit que la connaissance des λ' suffit à définir les λ et que finalement 6 paramètres réels suffisent.

Partie C

Méthode de LE VERRIER pour déterminer les valeurs propres α_i .

On appelle trace d'une matrice carrée M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de coefficients $(m_{i,j})_{1 \leq i \leq 3; 1 \leq j \leq 3}$, la quantité $m_{1,1} + m_{2,2} + m_{3,3}$. On la note $\text{Tr}(M)$.

C.1.a. Soient A et B deux matrices de taille 3×3 . Les coefficients diagonaux de $A \cdot B$ sont

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}, a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \text{ et } a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$$

et la trace de $A \cdot B$ vaut donc

$$\text{Tr}(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}.$$

Par symétrie, on a

$$\text{Tr}(B \cdot A) = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} + b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33}$$

et on voit que ces deux sommes sont égales ! Finalement $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$.

C.1.b. Si M et N sont deux matrices de taille 3×3 semblables, c'est qu'il existe une matrice (de taille 3×3) P inversible telle que $M = P.N.P^{-1}$. On a alors, en appliquant la règle de la question précédente avec des regroupements habiles :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M) &= \text{Tr}(\underbrace{P.N}_A \cdot \underbrace{P^{-1}}_B) = \text{Tr}(B.A) \\ &= \text{Tr}(P^{-1}.P.N) = \text{Tr}(I_3.N) = \text{Tr}(N) \end{aligned}$$

C.2.a. Posons $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$. On a

$$D^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 \end{pmatrix} \text{ et } D^3 = \begin{pmatrix} \alpha_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^3 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, de $A = Q.D.Q^{-1}$, on tire

$$A^2 = Q.D^2.Q^{-1} \text{ et } A^3 = Q.D^3.Q^{-1}$$

et donc chacune des paires $\{A, D\}$, $\{A^2, D^2\}$ et $\{A^3, D^3\}$ sont des paires de matrices semblables.

On a donc

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \text{Tr}(D) = S_1 \\ \text{Tr}(A^2) &= \text{Tr}(D^2) = S_2 \\ \text{Tr}(A^3) &= \text{Tr}(D^3) = S_3 \end{aligned}$$

C.2.b. Développons, on obtient :

$$\begin{aligned} P_A &= (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) \\ &= (X^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)X + \alpha_1\alpha_2)(X - \alpha_3) \\ &= X^3 - (\alpha_1 + \alpha_2)X^2 + \alpha_1\alpha_2X - \alpha_3X^2 + \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2)X - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ &= X^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)X^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2)X - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit :

p_3	$=$	1
p_2	$=$	$-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$
p_1	$=$	$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2$
p_0	$=$	$-\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

C.2.c. Sans problème, on peut affirmer que $p_2 = -S_1$. D'après la question C.2.a, on a :

$$\begin{aligned} S_1^2 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2) \\ &= S_2 + 2\alpha_1 \end{aligned}$$

ce qui donne donc $p_1 = \frac{S_1^2 - S_2}{2}$.

On a : $p_1 = \frac{S_1^2 - S_2}{2}$ et $p_2 = -S_1$.
--

C.2.d. L'idée est que l'on calcule par produits matriciels les matrices A^2 et A^3 , leurs traces et celle de A et qu'à partir de là, on peut reconstituer les coefficients de ce polynôme. On peut noter qu'on peut faire ce calcul pour toute matrice 3×3 mais le résultat ne prend le sens de polynôme caractéristique (au sens défini dans ce problème) qu'à partir du moment où A est semblable à une matrice diagonale.

```
def polynome_caracteristique(A):
    """
    Calcule le polynome carac. de A (3x3) à l'aide la méthode des traces
    """
    A2 = np.dot(A, A)
    A3 = np.dot(A2, A)
    def tr(A):
        return A[0,0] + A[1,1] + A[2,2]
    S1 = tr(A)
    S2 = tr(A2)
    S3 = tr(A3)
    #On prépare le polynome sous forme de liste
    P = []
    P.append(-(S1**3 + 2*S3 - 3*S2*S1)/6)
    P.append((S1**2 - S2)*0.5)
    P.append(- S1)
    P.append(1)
    return P
```

C.2.e. Si le polynôme caractéristique $P_A = p_0 + p_1X + p_2X^2 + X^3$ d'une matrice A est bien défini, c'est que $A = Q.D.Q^{-1}$ pour une certaine matrice Q inversible, une certaine matrice D diagonale.

On a :

$$p_0.I_3 + p_1.A + p_2.A^2 + A^3 = Q.(p_0.I_3 + p_1.D + p_2.D^2 + D^3).Q^{-1}$$

Maintenant, il est aisé de calculer $(p_0.I_3 + p_1.D + p_2.D^2 + D^3)$ vu que D est diagonale. Cette matrice vaut

$$p_0.I_3 + p_1.D + p_2.D^2 + D^3 = \begin{pmatrix} P_A(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & P_A(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & P_A(\alpha_3) \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$p_0.I_3 + p_1.A + p_2.A^2 + A^3 = 0.$$

C.3. On suppose que A est $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 11 & 13 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

C.3.a. Sans difficulté, par simples produits matriciels, on obtient que :

$$A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 29 & 19 \\ 0 & 25 & 7 \\ 0 & 7 & 25 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -16 & 125 & 163 \\ 0 & 37 & 91 \\ 0 & 91 & 37 \end{pmatrix}.$$

C.3.b. On utilise les notations précédentes. On obtient alors :

$$S_1 = \text{Tr}(A) = -1, S_2 = \text{Tr}(A^2) = 29, S_3 = \text{Tr}(A^3) = 29$$

D'après la question C.2.c, on a alors :

- $p_3 = 1$.
- $p_2 = -S_1$ donc $p_2 = 1$.

- $p_1 = \frac{S_1^2 - S_2}{2}$ donc $p_1 = \frac{1-29}{2}$ soit $p_1 = -14$.
- $p_0 = \frac{3S_1S_2 - S_1^3 - 2S_3}{6}$ donc $p_0 = \frac{-3 \cdot 29 - 1 - 58}{6}$ soit $p_0 = \frac{-144}{6}$ soit $p_0 = -24$.

$$P_A \text{ est bien } X^3 + X^2 - 14X - 24.$$

3.b.i. Là encore le calcul matriciel direct montre que $A^3 + A^2 - 14A - 24.I_3 = 0$.

3.b.ii. Soient λ_0, λ_1 et λ_2 trois nombres réels tels que $(\lambda_0.I_3 + \lambda_1.A + \lambda_2.A^2) = 0$. On a alors

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2\lambda_0 - 4\lambda_1 + 8\lambda_2 & 11\lambda_1 + 29\lambda_2 & 13\lambda_1 + 19\lambda_2 \\ 0 & 2\lambda_0 + \lambda_1 + 25\lambda_2 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} = 0$$

La nullité de la première ligne matricielle suffit à garantir que forcément $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ et donc on a montré la liberté de la famille (I_3, A, A^2) dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

C.3.c. On a $P_A(-2) = -8 + 4 + 28 - 24 = 0$. On peut donc factoriser $X + 2$ dans le polynôme P_A pour obtenir

$$P_A = (X + 2).(X^2 - X - 12) = (X + 2).(X - 4).(X + 3)$$

et donc les valeurs sont $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = -2$ et $\alpha_3 = +4$.

3.d.i.

3.d.ii. Il y a (au moins) deux façons de régler globalement ces questions :

- Soit naïvement, en menant tous les calculs explicites (3 résolutions de systèmes linéaires homogènes, à chaque fois on détermine explicitement pour V_i un vecteur directeur du noyau $\text{Ker } A - \alpha_i.I_3$ et finalement, on compose la matrice $Q = (V_1|V_2|V_3)$).
- Soit plus abstraitement en suivant une démarche du cours sur vecteurs propres/valeurs propres :
 1. Tout d'abord chaque $\text{Ker } A - \alpha_i.I_3$ contient au moins un vecteur non nul V_i . Si ce n'était pas le cas, par exemple pour $i = 1$, on aurait $A - \alpha_1.I_3$ inversible (matrice carrée de noyau nul). Comme $0 = A^3 + A^2 - 14A - 24.I_3 = (A - \alpha_1.I_3).(A - \alpha_2.I_3).(A - \alpha_3.I_3)$, en multipliant par l'inverse de $A - \alpha_1.I_3$, on obtient $(A - \alpha_2.I_3).(A - \alpha_3.I_3) = 0$, *i.e.* $A^2 - (\alpha_2 + \alpha_3).A + \alpha_2.\alpha_3.I_3 = 0$, ce qui est impossible par C.3.b.ii.
 2. La famille (V_1, V_2, V_3) est libre (composée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes : il s'agit d'un résultat de cours !). En effet, si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont tels que

$$\lambda_1.V_1 + \lambda_2.V_2 + \lambda_3.V_3 = 0$$

alors en appliquant la matrice A à cette identité, puis la matrice A^2 , on obtient

$$\lambda_1.\alpha_1.V_1 + \lambda_2.\alpha_2.V_2 + \lambda_3.\alpha_3.V_3 = 0 \text{ et } \lambda_1.\alpha_1^2.V_1 + \lambda_2.\alpha_2^2.V_2 + \lambda_3.\alpha_3^2.V_3 = 0$$

De ce système et de l'inversibilité de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{pmatrix}$, on en déduit que $\lambda_1.V_1 =$

$\lambda_2.V_2 = \lambda_3.V_3 = 0$ et finalement que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. *i.e.* la famille (V_1, V_2, V_3) de trois vecteurs est libre (c'est une base de \mathbb{R}^3 vu qu'elle comporte 3 vecteurs).

3. Finalement la matrice $Q = (V_1|V_2|V_3)$ est inversible et répond à la question.

Partie D

Algorithmique autour du calcul effectif de LE VERRIER.

D.1. Soit $P = X^3 + p_2.X^2 + p_1.X + p_0$ un polynôme degré 3 à coefficients réels et $p : x \mapsto P(x)$. La fonction polynomiale p admet pour dérivée p' avec $\forall x \in \mathbb{R}, p'(x) = x^2 + 2p_2.x + p_1$. De deux choses l'une :

1. Si cette fonction trinôme a un discriminant $\Delta \leq 0$, la fonction p' est strictement positive sur \mathbb{R} (sauf peut-être en un point en cas de $\Delta = 0$) et donc p est strictement croissante sur \mathbb{R} . Elle est injective et ne peut admettre trois racines distinctes.
2. Si, *a contrario*, cette fonction trinôme admet deux racines distinctes (β_-, β_+) , la fonction p est strictement croissante sur $]-\infty, \beta_-]$, strictement décroissante sur $[\beta_-, \beta_+]$, strictement croissante sur $[\beta_+, +\infty[$. La fonction p admet au plus une racine sur chacun de ces trois intervalles et, elle admet trois racines distinctes si et seulement si $p(\beta_-) > 0$ et $p(\beta_+) < 0$, *i.e.* $p(\beta_-).p(\beta_+) < 0$.

L'un dans l'autre on a obtenu l'équivalence voulue et le fait que si l'un de ces deux conditions est remplie, alors

$$\alpha_- < \beta_- < \alpha_0 < \beta_+ < \alpha_+$$

D.2. Il s'agit de faire la discussion sur le discriminant :

```
def racines_deg2(P):
    """
    Etant donné un polynome de degré 2 (P[2] existe et est non nul)
    """
    Delta = P[1]**2 - 4*P[0]*P[2]
    if Delta < 0 :
        return []
    elif Delta == 0.0:
        return [-P[1]*0.5]
    delta = np.sqrt(Delta)
    return [(-P[1] - delta)*0.5, (-P[1] + delta)*0.5]
```

D.3.a. La fonction Python `mystere1` a pour arguments P un polynôme et x un flottant : elle retourne $P(x)$ la valeur du polynôme P en x .

D.3.b. La fonction Python `mystere2` a pour arguments obligatoires f une fonction réelle de variable réelle, a et b deux flottants et pour argument nommé avec valeur par défaut, un flottant ε . D'aucun aura reconnu le célèbre algorithme de dichotomie calculant une racine d'une fonction f pourvu que 0 soit intermédiaire entre les valeurs de f aux extrêmes.

D.4. Pour la fonction `racines_deg3` :

1. P_p est le polynôme dérivé de P , on en évalue ses deux racines $\beta_- < \beta_+$ placées dans la liste `beta_pm` ;
2. on calcule ensuite α en appliquant l'algorithme de dichotomie (*c.f.* Question précédente) au polynôme P entre les deux bornes β_- et β_+ ;
3. Une fois cette racine trouvée, on factorise $P = P - P(\alpha) = (X - \alpha).Q$ pour obtenir le polynôme Q . Les formules pour Q proviennent des identités

$$P - P(\alpha) = \sum_{k=0}^3 p_k.(X^k - \alpha^k) \text{ et } X^k - \alpha^k = (X - \alpha).(X^{k-1} + \alpha.X^{k-2} + \dots + \alpha^{k-1});$$

4. On conclut en calculant les racines du polynôme Q et en retournant les trois racines en liste.

D.5. Le calcul à faire est le suivant

1. Partir de la matrice A (trouvée dans la littérature ou partir de B en calculant $A = -B^2$);
2. En calculer le polynôme caractéristique par la fonction `polynome_caracteristique` définie en question D.5;
3. Calculer les trois racines de ce polynôme en utilisant la question `racines_deg3`;
4. Finalement, obtenir les pulsations voulues en calculant les racines carrées des opposés de ces nombres.