Devoir Surveillé 06

Le 07 mars
durée 3h30

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits
La plus grande attention sera apportée à la qualité de la rédaction, syntaxe et orthographe comprise.
Numérotez les copies et questions et soulignez ou encadrez les résultats.
Vous pouvez utiliser les résultats des questions en amont d'une question donnée en la référençant clairement
Les calculs, même longs et fastidieux doivent figurer sur la copie

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice I

On rappelle que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices a p lignes et p colonnes et à coefficients réels. Par convention, si $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ alors M^0 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel. On s'intéresse à deux populations d'oiseaux notées $\mathscr{P}_1$ (étudiée dans la partie A) et $\mathscr{P}_2$ (étudiée dans la partie B). Dans chacune de ces populations, la moitié sont des oiselles (c'est-à-dire des femelles) et on modélise l'évolution de l'effectif de ces oiselles en fonction de n, le nombre d'années écoulées depuis un instant initial correspondant à $n = 0$.

Ces deux parties peuvent être abordées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

Premier exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

A.1. Soient les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ \frac{3}{20} & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

A.1.a. Calculer $\det(P)$ puis P^{-1}.
A.1.b. Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice diagonale D telle que $A = P.D.P^{-1}$.
A.2. Les oiselles de $\mathscr{P}_1$ sont classées en deux catégories :

— les oiselles jeunes, âgées de moins d'un an. L'effectif des oiselles jeunes est noté j_n.
— les oiselles adultes, âgées d'au moins un an. L'effectif des oiselles adultes est noté a_n.

Une étude sur le terrain a permis de conclure que :

— chacune de ces oiselles donne naissance en moyenne a une oiselle pendant sa première année de vie et a 5 oiselles pendant sa deuxième année.
— 15% des oiselles survivent au dela de leur première année mais jamais au dela de leur seconde année.

On note :

$$X_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} \text{ et } X'_n = P^{-1}.X_n$$

A.2.a. Justifier que $X_{n+1} = A.X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
A.2.b. En déduire une expression de X'_n en fonction de X'_0, n, P et D. On rédigera une démonstration par récurrence.
A.2.c. En supposant j_0 et a_0 non nuls, démontrer que j_n et a_n sont équivalents à des termes généraux de suites géométriques.

Partie B

Second exemple dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

B.1. Soit la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

B.1.a. Démontrer que 2 et -1 sont les deux seules valeurs propres de B, déterminer les espaces propres de B et en déduire que B n'est pas diagonalisable.
B.1.b. Démontrer que B est semblable a la matrice T ci-dessous :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

B.1.c. Déterminer T^n a l'aide de la formule du binôme de NEWTON.
B.2. Les oiselles de $\mathscr{P}_2$ sont classées en trois catégories :

- les oiselles jeunes, agées de moins d'un an. L'effectif des oiselles jeunes est noté J_n.
- les oiselles préadultes, agées d'un an a moins de deux ans. L'effectif des oiselles préadultes est noté P_n.
- les oiselles adultes, agées d'au moins deux ans. L'effectif des oiselles adultes est noté A_n.

Une étude sur le terrain a permis de conclure que :

- une oiselle de moins d'un an n'est pas féconde.
- chaque oiselle donne, en moyenne, naissance a 4 oiselles durant sa deuxième année de vie et autant pendant sa troisième année.
- 75% des oiselles survivent au dela de leur première année.
- les deux tiers des oiselles vivantes à la fin de la deuxième année survivent, mais jamais au dela de la troisième année.

B.2.a. Établir une relation entre la matrice colonne de coefficients J_{n+1}, P_{n+1} et A_{n+1} et la matrice colonne de coefficients J_n, P_n et A_n puis en déduire qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix} = Q.T^n.Q^{-1}. \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

B.2.b. En déduire enfin qu'il existe trois matrices C_1, C_2 et C_3 appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix} = (2^n.C_1 + (-1)^n.C_2 + n(-1)^n.C_3) \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

B.3. On note S_n l'effectif total des oiselles de $\mathscr{P}_2$, on admet que J_0, A_0 et P_0 sont non nuls et que :

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{32}{27} & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

B.3.a. Démontrer que les suites (J_n), (P_n) et (A_n) divergent vers $+\infty$.
B.3.b. Calculer $\text{rg}(C_1)$ puis déterminer également les limites des suites $(\frac{J_n}{S_n})$, $(\frac{P_n}{S_n})$ et $(\frac{S_{n+1}}{S_n})$.

Exercice II

On cherche à résoudre le problème d'interpolation de HERMITE : on se donne deux nombres complexes distincts z_1 et z_2, quatre nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2$ et l'on cherche à trouver un polynôme P vérifiant

$$P(z_1) = \alpha_1, P'(z_1) = \delta_1, P(z_2) = \alpha_2 \text{ et } P'(z_2) = \delta_2,$$

On cherche bien évidemment à le faire en utilisant une méthode pouvant se généraliser à un nombre quelconque de points.

1. On considère l'application

$$H_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C}^4 \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(z_1) \\ P'(z_1) \\ P(z_2) \\ P'(z_2) \end{pmatrix} \end{array}$$

1.a. Montrer que cette application est linéaire.

1.b. Montrer, en utilisant la théorie de polynômes, que $P \in \operatorname{Ker} H_0$ si et seulement si il existe un polynôme Q tel que

$$P = (X - z_1)^2.(X - z_2)^2.Q$$

1.c. Soit H la restriction de H_0 à $\mathbb{C}_3[X]$ l'espace des polynômes à coefffcients complexes de degré ≤ 3. Montrer que H est injective puis que c'est un isomorphisme.

1.d. Traduire ce fait en l'existence et l'unicité éventuelle d'une solution à notre problème. Quantifiez correctement votre énoncé.

2.a. Ecrire la matrice M de H relativement aux bases canoniques de $\mathbb{C}_3[X]$ et de $\mathbb{C}^4$.

2.b. Montrer (sans calculs !) l'inversibilité de la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ z_1 & 1 & z_2 & 1 \\ z_1^2 & 2z_1 & z_2^2 & 2z_2 \\ z_1^3 & 3z_1^2 & z_2^3 & 3z_2^2 \end{pmatrix}$$

3. On définit les polynômes Q_1 et Q_2 par $Q_1 = \dfrac{(X - z_2)^2}{(z_1 - z_2)^2}$ et $Q_2 = \dfrac{(X - z_1)^2}{(z_2 - z_1)^2}$.

3.a. Vérifier que $Q_1(z_1) = 1, Q_1(z_2) = Q_1'(z_2) = 0$ et $Q_2(z_2) = 1, Q_2(z_1) = Q_2'(z_1) = 0$. Que valent $Q_1'(z_1)$ et $Q_2'(z_2)$?

3.b. On définit

$$A_1 = (1 - (X - z_1).Q_1'(z_1)).Q_1, D_1 = (X - z_1).Q_1$$

Après avoir exprimé A_1' et D_1', calculer $H(A_1)$ et $H(D_1)$.

3.c. Déterminer des polynômes A_2 et D_2 de sorte que $H(A_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $H(D_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.d. Montrer que la famille $\mathscr{H} = (A_1, D_1, A_2, D_2)$ est une base de $\mathbb{C}_3[X]$ et que, pour $\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2 \in \mathbb{C}$ donnés, le seul polynôme P de degré ≤ 3 solution de notre problème est le polynôme

$$P = \alpha_1.A_1 + \delta_1.D_1 + \alpha_2.A_2 + \delta_2.D_2$$

4. Donner la matrice de passage de la base $\mathscr{H}$ à $\mathscr{M}_3$, la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.

5. (Difficile) Donner une formule pour l'inverse de la matrice N définie à la question 2.b en décrivant une méthode qui puisse se généraliser au cas de n points distincts $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Exercice III

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Dans tout le problème on munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique notée $(e_1, \dots, e_n)$.On rappelle que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $\overline{A}$ est la matrice conjuguée de A (c'est- à-dire celle dont les coefficients complexes sont les conjugués des coefficients de A).

On confond les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et les matrices colonnes correspondantes. Enfin, on note $E = \{1, \dots, n\}$ et $\mathscr{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.

La partie A est consacrée à l'étude de certaines matrices réelles diagonalisables dans $\mathbb{C}$. Les puissances de ces matrices sont utilisées dans la partie B pour modéliser des probabilités.

Partie A

Une matrice particulière

On considère la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ci-dessous :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

A.1.a. Calculer le rang de J_n. Quel est son noyau ?

A.1.b. Si C_j désigne la colonne j de la matrice J, montrer que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$${}^tC_i.C_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

A.1.c. En déduire ${}^tJ_n.J_n$ et J_n^{-1}.

A.2. Démontrer que 1 est valeur propre de J_n et préciser l'espace propre associé.

A.3. On cherche à diagonaliser J_n dans $\mathbb{C}$ et pour tout $k \in E$, on considère le vecteur de $\mathbb{C}^n$ ci-dessous :

$$u_k = (e^{\frac{2ik\pi}{n} \times 0}, e^{\frac{2ik\pi}{n} \times 1}, \dots, e^{\frac{2ik\pi}{n} \times (n-1)})$$

A.3.a. Calculer u_n. u_n est-il vecteur propre de J_n ?

A.3.b. Démontrer que pour tout $k \in E$, u_k est vecteur propre de J_n pour la valeur propre $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

En déduire que J_n est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Partie B

Cas où $n = 4$

Dans cette partie on suppose que $n = 4$ et k désigne un entier naturel.

B.1.a. Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ telles que la matrice J_4 (cf. partie A) soit égale à $P.D.P^{-1}$ puis calculer ${}^t\overline{P}$ et en déduire P^{-1}.

B.1.b. Calculer J_4^2 (J_4 au carré), J_4^3 (J_4 au cube) et J_4^4 (J_4 à la puissance 4).

B.2. On considère l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix} (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

B.2.a. Démontrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ dont (I, J_4, J_4^2, J_4^3) est une base (I désignant la matrice identité de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$). Quelle est la dimension de $\mathscr{E}$?

B.2.b. Soit $A \in \mathscr{E}$. Déduire des questions précédentes qu'il existe une matrice diagonale Δ telle que $A = P.\Delta.P^{-1}$ et préciser les valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 de A.

B.3. Une usine de traitement des déchets industriels procède chaque semaine au prélévement de 4 échantillons le long du cycle de traitement. Si le contenu d'un échantillon de numéro $i \in \{1, \ldots, 4\}$ est contaminé alors on peut modéliser la propagation de la contamination grâce à une matrice $A \in \mathscr{E}$.

En effet si un problème est décelé à l'échantillon i alors la probabilité de retrouver cette contamination à un échantillon $j \in \{1, \ldots, 4\}$ la semaine suivante est la j-ième coordonnée de $A.e_i$ et plus généralement au bout de k semaines cette probabilité est la j-ième coordonnée de $A^k.e_i$.

B.3.a. Exprimer A^k à l'aide de P, λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4.

B.3.b. Des relevés statistiques ont montré qu'on a toujours $a+b+c+d = 1$ et $(a,b,c,d) \in \left[0, \frac{1}{2\sqrt{2}}2\right[^4$.

Etudier la convergence des suites (λ_1^k), (λ_2^k), (λ_3^k) et (λ_4^k).

B.3.c. En déduire que (Δ^k) converge (c'est-à-dire que tous les coefficients de Δ^k convergent) vers une matrice δ et calculer $P.\delta.P^{-1}$. Comment interpréter ce dernier résultat ?

Correction DS 06

Correction Ex.–1

Partie A
Premier exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

A.1. Soient les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ \frac{3}{20} & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

A.1.a. On a (formules du cours)

$$\det(P) = -2\frac{3}{5} - 2\frac{1}{5} = -\frac{8}{5} \text{ et } P^{-1} = -\frac{5}{8}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -2 \\ -\frac{1}{5} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{3}{8} & +\frac{5}{4} \\ +\frac{1}{8} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

A.1.b. On a

$$A.P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ \frac{3}{20} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En posant $D = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, on a donc $A = P.D.P^{-1}$ et A est diagonalisable de valeurs propres $\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

A.2. Les oiselles de $\mathscr{P}_1$ sont classées en deux catégories :
On note :

$$X_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} \text{ et } X'_n = P^{-1}.X_n$$

A.2.a. De l'année n sur l'année $n+1$,

— Pour les jeunes oiselles, vu que chacune de ces oiselles donne naissance en moyenne a une oiselle pendant sa première année de vie et a 5 oiselles pendant sa deuxième année, on a

$$j_{n+1} = j_n + 5.a_n$$

— Pour les oiselles adultes, vu que 15% des oiselles survivent au dela de leur première année mais jamais au dela de leur seconde année, on a

$$a_{n+1} = \frac{15}{100} j_n = \frac{3}{20} j_n$$

Matriciellement, ceci se réécrit $X_{n+1} = A.X_n$.
A.2.b. Ecrivons cette relation à l'aide de X'_n et X'_{n+1}. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P.X'_{n+1} = A.P.X'_n$$

et, en multipliant par P^{-1},

$$\forall n \in \mathbb{N}, X'_{n+1} = P^{-1}.A.P.X'_n = D.X'_n$$

Par la récurrence géométrique usuelle (à réécrire ici car elle est explicitement demandée), on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = D^n.X'_0 = .X'_0$$

A.2.c. Si j_0 et a_0 sont non nuls, comme, par la relation précédente, en repassant en X_n, X_0,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = P.D^n.P^{-1}.X_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{3}{40}\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{40}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.X_0 =$$

et donc, lorsque $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned} j_n &\sim \left(\frac{3}{4}.j_0 + \frac{5}{2}.a_0\right) \\ a_n &\sim \left(\frac{3}{40}.j_0 + \frac{1}{4}.a_0\right) \end{aligned}$$

Partie B

Second exemple dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

B.1. Soit la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

B.1.a. On engage la recherche de valeurs propres. Un nombre complexe λ est v.p. de B ssi la matrice $B - \lambda.I_3$ est de rang ≤ 2. Par le pivot de GAUSS, les matrices suivantes ont toutes même rang que $B - \lambda.I_3$.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow 4L_2 \\ L_2 \leftarrow 3L_3 \\ L_3 \leftarrow L_1}} \begin{pmatrix} 3 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -3\lambda \\ -\lambda & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 + \lambda.L_1} \begin{pmatrix} 3 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -3\lambda \\ 0 & 4(3-\lambda^2) & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2(3-\lambda^2).L_2} \begin{pmatrix} 3 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -3\lambda \\ 0 & 0 & 12 + 6\lambda(3-\lambda^2) \end{pmatrix}$$

Le nombre complexe λ est vp de B ssi $12 + 6\lambda(3-\lambda^2) = 0$, *i.e.*

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

Les nombres 2 et -1 (avec multiplicité 2) sont les seules racines de ce polynôme, ce sont donc les deux seules valeurs propres de B.

Déterminons les espaces propres de B :

— v.p $\lambda = 2$. Pour déterminerE_2 le sev propre de B associé à 2, on résout l'équation $(B - 2I_3).X = 0$ d'inconnue X. En reprenant le pivot de GAUSS effectué précédemment, cette équation, après avoir posé $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ équivaut à

$$3x - 8y = 0 \text{ et } 2y - 6z = 0$$

et donc

$$E_2 = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

— v.p $\lambda = -1$. Pour déterminerE_{-1} le sev propre de B associé à 2, on résout l'équation $(B+I_3).X = 0$ d'inconnue X. En reprenant le pivot de GAUSS effectué précédemment, cette équation, après avoir posé $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ équivaut à

$$3x+4y = 0 \text{ et } 2y+3z = 0$$

et donc

$$E_{-1} = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

La somme des dimensions des espaces propres est $2 \neq 3$. La matrice B n'est donc pas diagonalisable.

B.1.b. Construisons une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ en posant

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } e'_3 \text{t.q.} B.e'_3 = -e'_3 + e'_2$$

Si nous sommes capables de mener cette opération à terme, en posant Q la matrice de passage de $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à cette base $\mathscr{B}'$, on aura, par la formule du changement de base,

$$Q^{-1}.B.Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$$

Il s'agit, pour trouver e'_3, de résoudre l'équation $(B+I_3).X = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on vérifiera ensuite que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. En appliquant le pivot de GAUSS, les systèmes suivants sont équivalents à l'équation $(B+I_3).X = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +4y & +4z & = & 4 \\ \frac{3}{4}x & +y & & = & -3 \\ & \frac{2}{3}y & +z & = & 2 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow 3L_3}{\overset{L_2 \leftarrow 4.L_2}{\longrightarrow}} \left\{\begin{array}{llllll} x & +4y & +4z & = & 4 \\ 3x & +4y & & = & -12 \\ & 2y & +3z & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{lllll} x & +4y & +4z & = & 4 \\ & -8y & -12z & = & -24 \\ & 2y & +3z & = & 6 \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{lllll} x & +4y & +4z & = & 4 \\ & 2y & +3z & = & 6 \end{array}\right.$$

Ce denier système est échelonné, de rang 2, une solution en est

$$e'_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrons maintenant que (e'_1, e'_2, e'_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ (et donc une base de cet espace de dimension 3). On peut évidemment le faire directement avec les valeurs des vecteurs (c'est facile mais on n'apprend rien). On va le faire en utilisant les relations recherchées sur ces vecteurs, à savoir

$$B.e'_1 = 2.e'_1, B.e'_2 = -e'_2, B.e'_3 = -e'_3 + e'_2$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_3$ trois scalaires tels que

$$\lambda_1.e'_1 + \lambda_2.e'_2 + \lambda_3.e'_3 = 0$$

En appliquant B à cette égalité, il vient

$$2.\lambda_1.e'_1 - \lambda_2.e'_2 + \lambda_3.(-e'_3 + e'_2) = 0$$

Maintenant en ajoutant les deux égalités, on obtient que

$$3.\lambda_1.e'_1\lambda_3.e'_2 = 0$$

Comme e'_1 et e'_2 sont vp associés à des vp distinctes, alors $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ et finalement, en reprenant l'équation initiale $\lambda_2 = 0$.

$\mathscr{B}'$ est donc libre.

B.1.c. On a

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N}$$

On remarque que $D.N = N.D$ (faire le calcul !) et que $T^2 = 0$.

Soit $n \geq 2$, la formule du binôme de NEWTON. on a

$$T^n = (D+N)^n = D^n + n.D^{n-1}.T + \underbrace{\dots}_{=0}$$

Comme

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}, D^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}, D^{n-1}.T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n.(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

B.2.

B.2.a. Notons

$$Y_n = \begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

D'une année n sur la suivante $n+1$,

— « une oiselle de moins d'un an n'est pas féconde, chaque oiselle donne, en moyenne, naissance a 4 oiselles durant sa deuxième année de vie et autant pendant sa troisième année » donne

$$J_{n+1} = 4.P_n + 4.A_n$$

— « 75% des oiselles survivent au dela de leur première année » donne

$$P_{n+1} = \frac{3}{4}J_n$$

— « les deux tiers des oiselles vivantes à la fin de la deuxième année survivent, mais jamais au dela de la troisième année » donne

$$A_{n+1} = \frac{2}{3}P_n$$

Ce qui, matriciellement, ce réécrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = B.Y_n$$

En posant $Y_n' = Q^{-1}.Y_n$ (Q la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$), ceci se réécrit (il ya une petite récurrence à faire pour la deuxième formule) en

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1}' = \underbrace{Q^{-1}.B.Q}_{=T}.Y_n'$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n' = T^n.Y_0' = T^n.Q^{-1}.\begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = Q.T^n.Q^{-1}.\begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

B.2.b. Ecrivons

$$T^n = 2^n.C_1' + (-1)^n.C_2' + n(-1)^n.C_3'$$

avec

$$C_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C_3' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors, en développant l'expression précédente

$$Y_n = \begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix} = \left(2^n.C_1 + (-1)^n.C_2 + n(-1)^n.C_3\right).Y_0 = \left(2^n.C_1 + (-1)^n.C_2 + n(-1)^n.C_3\right)\begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

où

$$C_1 = Q.C_1'.Q^{-1}, C_2 = Q.C_2'.Q^{-1} \text{ et } C_3 = Q.C_3'.Q^{-1}$$

B.3. On note S_n l'effectif total des oiselles de $\mathscr{P}_2$, on admet que J_0, A_0 et P_0 sont non nuls et que :

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{32}{27} & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

B.3.a. On a (traduction ligne à ligne de l'égalité matricielle démontrée), du fait que $(-1)^n$ et $(-1)^n.n$ sont $O(n)$ et donc $o(2^n)$, que

$$\begin{aligned} J_n &= 2^n\left(\frac{4}{9}J_0 + \frac{32}{27}P_0 + \frac{8}{9}A_0\right) + o(2^n) \\ P_n &= 2^n\left(\frac{1}{6}J_0 + \frac{4}{9}P_0 + \frac{1}{3}A_0\right) + o(2^n) \\ A_n &= 2^n\left(\frac{1}{18}J_0 + \frac{4}{27}P_0 + \frac{1}{9}A_0\right) + o(2^n) \end{aligned}$$

Il est donc clair que les suites (J_n), (P_n) et (A_n) divergent vers $+\infty$, elles sont toutes équivalentes à $K.2^n$ où K est une constante strictement positive.

B.3.b. On a vu que $C_1 = C_1 = Q.C_1'.Q^{-1}$ où C_1' est de rang 1. On a donc $\mathrm{rg}(C_1) = 1$.

En sommant les trois égalités juste démontrées, on a

$$S_n = 2^n\left(\frac{12}{18}J_0 + \frac{48}{27}P_0 + \frac{12}{9}A_0\right) + o\left(2^n\right) = 2^n\left(\frac{2}{3}J_0 + \frac{16}{9}P_0 + \frac{4}{3}A_0\right) + o\left(2^n\right)$$

et donc, lorsque $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
\frac{J_n}{S_n} &\to \frac{\frac{4}{9}J_0 + \frac{32}{27}P_0 + \frac{8}{9}A_0}{\frac{2}{3}J_0 + \frac{16}{9}P_0 + \frac{4}{3}A_0} = \frac{12.J_0 + 32.P_0 + 24.A_0}{18.J_0 + 48.P_0 + 36.A_0} \\
\frac{P_n}{S_n} &\to \frac{\frac{1}{6}J_0 + \frac{4}{9}P_0 + \frac{1}{3}A_0}{\frac{2}{3}J_0 + \frac{16}{9}P_0 + \frac{4}{3}A_0} = \frac{3.J_0 + 8.P_0 + 6.A_0}{12.J_0 + 32.P_0 + 24.A_0} \\
\frac{S_{n+1}}{S_n} &\to 2
\end{aligned}$$

Correction Ex.–2

1. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc}
H_0: & \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C}^4 \\
& P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(z_1) \\ P'(z_1) \\ P(z_2) \\ P'(z_2) \end{pmatrix}
\end{array}$$

1.a. L'évaluation d'un polynôme en un point est une opération linéaire en le polynôme : si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$(\lambda.P + \mu.Q)(z_1) = \lambda.(P(z_1)) + \mu.(Q(z_1))$$

La dérivation des polynômes est elle aussi une opération linéaire. Si on la fait suivre de l'évaluation en un point, on garde une opération linéaire : si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$(\lambda.P + \mu.Q)'(z_1) = \lambda.(P'(z_1)) + \mu.(Q'(z_1))$$

L'application H_0 est formée de ce type d'opérations avec une « mise en vecteur » des résultats. H_0 est donc linéaire.

NB : on peut faire la rédaction habituelle, bien sûr !

1.b. Un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est dans le noyau de H_0 si et seulement si $P(z_1) = P'(z_1) = P(z_2) = P'(z_2) = 0$, ce qui est équivalent au fait que z_1 et z_2 (qui sont distincts) sont racines au moins doubles de P. Ceci se reformule par l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P = (X - z_1)^2.(X - z_2)^2.Q$$

On a donc

$$\mathrm{Ker}\, H_0 = \{(X - z_1)^2.(X - z_2)^2.Q,\ Q \in \mathbb{C}[X]\}$$

1.c. Soit H la restriction de H_0 à $\mathbb{C}_3[X]$ l'espace des polynômes à coefffcients complexes de degré ≤ 3.

Pour un polynôme $P \in \mathbb{C}_3[X]$, $P \in \mathrm{Ker}\, H$ si et seulement si $H(P) = H_0(P) = 0$ et d'après la question précédente, si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P = (X - z_1)^2.(X - z_2)^2.Q$$

Si $Q \neq 0$, on a, par les règles régissant le degré d'un produit, que $\deg(P) \geq 4$, ce qui est impossible. On a donc $Q = 0$ et$P = 0$.

En résumé, $\mathrm{Ker}\, H = \{0\}$ et H est injective.

Comme $\dim \mathbb{C}_3[X] = \dim \mathbb{C}^4 = 4$, H est un isomorphisme.

1.d. On vient d'obtenir que $z_1 \neq z_2$ étant fixés, pour tout $(\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2)$, il existe un unique polynôme P de degré ≤ 3 tel que

$$P(z_1) = \alpha_1,\ P'(z_1) = \delta_1,\ P(z_2) = \alpha_2 \text{ et } P'(z_2) = \delta_2$$

2.

2.a. La base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$ est $\mathscr{M}_3 = (1, X, X^2, X^3)$. On a

$$H(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, H(X) = \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix}, H(X^2) = \begin{pmatrix} z_1^2 \\ 2z_1 \\ z_2^2 \\ 2z_2 \end{pmatrix} \text{ et } H(X^3) = \begin{pmatrix} z_1^3 \\ 3z_1^2 \\ z_2^3 \\ 3z_2^2 \end{pmatrix}$$

et donc la matrice M de H relativement aux bases canoniques de $\mathbb{C}_3[X]$ et de $\mathbb{C}^4$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 0 & 1 & 2z_1 & 3z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 \\ 0 & 1 & 2z_2 & 3z_2^2 \end{pmatrix}$$

2.b. Comme $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ z_1 & 1 & z_2 & 1 \\ z_1^2 & 2z_1 & z_2^2 & 2z_2 \\ z_1^3 & 3z_1^2 & z_2^3 & 3z_2^2 \end{pmatrix}$, $N = {}^tM$.

M est inversible car c'est la matrice (relativement à deux bases) d'un isomorphisme. N est donc inversible et $N^{-1} = {}^tM^{-1}$.

3. On définit les polynômes Q_1 et Q_2 par

$$Q_1 = \frac{(X - z_2)^2}{(z_1 - z_2)^2} \text{ et } Q_2 = \frac{(X - z_1)^2}{(z_2 - z_1)^2}$$

3.a. Par simple subsitution $Q_1(z_1) = 1, Q_1(z_2) = 0$, $Q_2(z_2) = 1, Q_2(z_1) = 0$.

On a $Q_1' = \frac{2}{(z_1 - z_2)^2}(X - z_2)$ et donc $Q_1'(z_2) = 0$ et de même, $Q_2' = \frac{2}{(z_2 - z_1)^2}(X - z_1)$ et donc $Q_2'(z_1) = 0$

On a de plus

$$Q_1'(z_1) = \frac{2}{(z_1 - z_2)} \text{ et } Q_2'(z_2) = \frac{2}{(z_2 - z_1)}$$

3.b. On définit

$$A_1 = (1 - (X - z_1).Q_1'(z_1)).Q_1, D_1 = (X - z_1).Q_1$$

On a, en utilisant la dérivation de produit,

$$\begin{aligned} A_1' &= -Q_1'(z_1).Q_1 + (1 - (X - z_1).Q_1'(z_1)).Q_1' \\ D_1' &= (X - z_1).Q_1' + Q_1 \end{aligned}$$

On a donc, comme $Q_1(z_1) = 0$, $Q_1(z_2) = Q_1'(z_2) = 0$,

$$A_1(z_1) = 1,\ A_1(z_2) = 0, A_1'(z_1) = -Q_1'(z_1) + Q_1'(z_1) = 0 \text{ et } A_1'(z_2) = 0$$

Ceci se résume en $H(A_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a aussi

$$D_1(z_1) = 0,\ D_1(z_2) = 0, D_1'(z_1) = Q_1(z_1) = 1 \text{ et } D_1'(z_2) = 0$$

Ceci se résume en $H(D_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.c. On construit A_2 et D_2 de sorte que $H(A_2) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $H(D_2) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ en reprenant et adaptant les formules utilisées pour A_1 et D_1. Il suffit de poser

$$A_2 = (1-(X-z_2).Q_2'(z_2)).Q_2, D_2 = (X-z_2).Q_2$$

3.d. L'image par H de la famille $\mathscr{H} = (A_1, D_1, A_2, D_2)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^4$. Ceci montre par exemple que $\mathscr{H}$ est libre et, comme elle comporte le bon (4) nombre de vecteurs, c'est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.

Pour $\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2 \in \mathbb{C}$ donnés, posons

$$P = \alpha_1.A_1 + \delta_1.D_1 + \alpha_2.A_2 + \delta_2.D_2$$

On a clairement

$$H(P) = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \delta_1\\ \alpha_2\\ \delta_2\end{pmatrix}$$

et donc P est bien le seul polynôme de degré ≤ 3 solution du problème énoncé en 1.d est le polynôme

4. Soit M' la matrice de passage de la base $\mathscr{H}$ à $\mathscr{M}_3$, la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$. La colonne k de M' est formée des coordonnées de X^k dans la base $\mathscr{H}$. Pour un polynôme P quelconque, ses coordonnées dans la base $\mathscr{H}$ sont $\begin{pmatrix}P(z_1)\\ P'(z_1)\\ P(z_2)\\ P'(z_2)\end{pmatrix}$ et un instant de réflexion montre que $M = M'$

5. (Difficile) La question précédente montre que M^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{M}_3$ à $\mathscr{H}$. On se souvient par ailleurs que $N^{-1} = {}^tM^{-1}$.

On peut, en développant les polynômes de la base $\mathscr{H}$ dans la base canonique, trouver la matrice M^{-1}. Une fois ceci fait, on laissera au lecteur le soin d'écrire la transposée afin d'obtenir N^{-1}.

On a

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{1}{(z_1-z_2)^2}(X^2 - 2X.z_2 + z_2^2) \\
A_1 &= (1-(X-z_1).Q_1'(z_1)).Q_1 = \frac{1}{(z_1-z_2)^2}(1 - \frac{2(X-z_1)}{z_1-z_2})(X^2-2X.z_2+z_2^2) \\
&= \frac{1}{(z_1-z_2)^3}(-2X^3 + 3(z_1+z_2).X^2 - 6z_1.z_2.X + z_2(3z_1-z_2)) \\
D_1 &= (X-z_1).Q_1 = \frac{1}{(z_1-z_2)^2}\left(X^3 - (z_1+2z_2)X^2 + (z_2^2+2z_1.z_2)X - z_1.z_2^2\right)
\end{aligned}$$

et des formules similaires pour A_2 et D_2 en échangeant les rôles de z_1 et z_2.

Il vient

$$M^{-1} = \frac{1}{(z_1-z_2)^3}\begin{pmatrix} z_2(3z_1-z_2) & -(z_1-z_2).z_1.z_2^2 & -z_1(3z_2-z_1) & -(z_1-z_2).z_2.z_1^2 \\ -6.z_1.z_2 & z_2(z_1-z_2)(z_2+2z_1) & +6z_1.z_2 & z_1(z_1-z_2)(z_1+2z_2) \\ 3.(z_1+z_2) & -(z_1-z_2)(z_1+2z_2) & -3(z_1+z_2) & -(z_1-z_2)(2z_1+z_2) \\ -2 & (z_1-z_2) & +2 & (z_1-z_2) \end{pmatrix}$$

Pour généraliser au cas de n points distincts $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Il suffit de faire le même type de construction mais en prenant les polynômes $Q_k = L_k^2$ où L_k est le k polynôme de LAGRANGE associé à ces points. On construit alors un isomorphisme $H : \mathbb{C}_{2n-1}[X] \to \mathbb{C}^{2n}$, $P \mapsto \begin{pmatrix} P(z_1) \\ P'(z_1) \\ \vdots \\ P(z_n) \\ P'(z_n) \end{pmatrix}$ et une base $\mathscr{H} = (A_1, D_1, \dots, A_n, D_n)$, la matrice M représentant H par rapport aux bases canoniques des deux espaces de départ et d'arrivée est aussi la matrice de changement de base de $\mathscr{H}$ vers $\mathscr{M}_{2n-1}$. La matrice M^{-1} est la matrice du changement de base en sens inverse. Elle se calcule en développant les polynômes A_k et D_k sur la base canonique des polynômes.

Correction Ex.–3

Partie A

Une matrice particulière

On considère la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ci-dessous :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

A.1.a. Un peu d'observation permet de voir que les colonnes de J_n sont exactement les vecteurs de la base canonique, dans l'ordre $(e_n, e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$. Le rang de J_n est la dimension de du sev de $\mathbb{R}^n$ engendré par ces vecteurs, il vaut donc n. Du théorème du rang, ondéduit que la dimension du noyau de J_n est $n - n = 0$ et donc $\operatorname{Ker} J_n = \{0\}$.

A.1.b. Soit $i, j \in E = \{1, \dots, n\}$. Le produit ${}^tC_i.C_j$ est un nombre, il vaut $\sum_{k=1}^n J_{ki}.J_{kj}$ où $J_{k\ell}$ désigne l'entrée indicée $k\ell$ de la matrice J.

— Si $i \neq j$, chaque produit $J_{ki}.J_{kj} = 0$ car toutes les entrées $J_{k\ell}$ valent 0, sauf une et si $i \neq j$, les 1 de C_i et de C_j ne sont pas sur la même ligne :

$${}^tC_i.C_j = \sum_{k=1}^n J_{ki}.J_{kj}$$

— Si $i = j$, tous les produits $J_{ki}.J_{ki}$ sont nuls sauf l'un d'entre eux qui vaut 1 :

$${}^tC_i.C_i = \sum_{k=1}^n J_{ki}.J_{ki} = 1$$

A.1.c. On a donc ${}^tJ_n.J_n = I_n$ et $J_n^{-1} = {}^tJ_n$.

A.2. On a $J_n.\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc 1 est valeur propre de J_n associée au vecteur propre $\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Recherchons l'espace propre associé. On a

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(J_n - I_n) \Leftrightarrow J_n.v = v \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 & = & v_1 \\ v_3 & = & v_2 \\ & \vdots & \\ v_n & = & v_{n-1} \\ v_1 & = & v_n \end{cases} \Leftrightarrow v_1 = v_2 = \cdots = v_n \Leftrightarrow v \in \operatorname{Vect}\langle \mathbb{1} \rangle$$

On a donc

$$E_1 := \operatorname{Ker}(J_n - I_n) = \operatorname{Vect}\langle \mathbb{1} \rangle \text{ et } \dim E_1 = 1$$

A.3. Soit, pour $k \in E = \{1, \dots, n\}$, le vecteur de $\mathbb{C}^n$

$$u_k = (e^{\frac{2ik\pi}{n}\times 0}, e^{\frac{2ik\pi}{n}\times 1}, \dots, e^{\frac{2ik\pi}{n}\times(n-1)})$$

A.3.a. On a, pour $\ell \in \mathbb{Z}$, $e^{\frac{2in\pi}{n}\times \ell} = e^{2i\ell\pi} = 1$. Donc $u_n = \mathbb{1}$ et u_n est vecteur propre de J_n associé à la v.p. 1.

A.3.b. Remarquons qu'on a, pour un vecteur $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^n$, que

$$J_n.v = \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Soit $k \in E$. On a donc

$$J_n.u_k = \begin{pmatrix} u_{k,2} \\ \vdots \\ u_{k,n} \\ u_{k,1} \end{pmatrix} \text{ où } u_k = \begin{pmatrix} u_{k,1} \\ \vdots \\ u_{k,n} \end{pmatrix}.$$

On a (pour $\ell = 2, \dots, n-1$)

$$\begin{array}{rcl} u_{k,2} & = & e^{\frac{2ik\pi}{n}\times 1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.u_{k,1} \\ \vdots & & \\ u_{k,\ell+1} & = & e^{\frac{2ik\pi}{n}\times \ell} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.e^{\frac{2ik\pi}{n}\times(\ell-1)} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.u_{k,\ell} \\ \vdots & & \\ u_{k,1} & = & 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.e^{\frac{2ik\pi}{n}\times(n-1)} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.u_{n,\ell} \end{array}$$

et donc

$$J_n.u_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.u_k$$

Ceci montre que u_k est vecteur propre de J_n pour la valeur propre $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Posons pour $k \in E$, $\lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On peut constater que les n nombres λ_k pour $k \in \{1, \dots, n\}$ sont distincts (le mieux pour cela est de **faire le dessin où l'on montre comment ils se situent sur le cercle unité**)

J_n admet donc n valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses espaces propres sont tous de dimension 1.

Partie B

Cas où $n = 4$

Dans cette partie on suppose que $n = 4$ et k désigne un entier naturel.

B.1.a. Si on pose P la matrice dont les colonnes sont u_1, u_2, u_3, u_4 et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

on aura, pas la formule du changement de base $D = P^{-1}.J_n.P$, *i.e.* $J_n = P.D.P^{-1}$.

Il nous reste à écrire les matrices D et P et effectuer les calculs demandés. On a $e^{\frac{2i\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et donc

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} i & i^2 & i^3 & i^4 \\ i^2 & i^4 & i^6 & i^8 \\ i^3 & i^6 & i^9 & i^{12} \\ i^4 & i^8 & i^{12} & i^{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 & -i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$${}^t\overline{P} = \begin{pmatrix} -i & -1 & +i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ +i & -1 & -i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et (tout calculs faits) } {}^t\overline{P}.P = 4.I_4$$

On en déduit que $P^{-1} = \frac{1}{4}.{}^t\overline{P}$.

B.1.b. On a

$$J_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} J_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J_4^4 = I_4$$

B.2.a. Vu la question précédente et la définition de $\mathscr{E}$, on a

$$\mathscr{E} = \left\{a.I_4 + bJ_4 + cJ_4^2 + dJ_4^3,\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\} = \mathrm{Vect}\left\langle I, J_4, J_4^2, J_4^3\right\rangle$$

$\mathscr{E}$ est donc le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ engendré par la famille (I, J_4, J_4^2, J_4^3).

Cette famille est libre car si $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sont tels que $a.I_4 + bJ_4 + cJ_4^2 + dJ_4^3 = 0$ alors $a = b = c = d = 0$ vu la position des coefficients.

La famille (I, J_4, J_4^2, J_4^3) est donc une base de $\mathscr{E}$ qui est alors de dimension 4. (Une base de 4 vecteurs).

B.2.b. Soit $A \in \mathscr{E}$. Il existe donc a, b, c et d tels que

$$A = a.I_4 + bJ_4 + cJ_4^2 + dJ_4^3$$

Or

$$J_4 = P.D.P^{-1},\, J_4^2 = P.D^2.P^{-1},\, J_4^3 = P.D^3.P^{-1} \text{ et } I_4 = P.I_4.P^{-1}$$

et donc, en factorisant,

$$A = P.\left(a.I_4 + b.D + c.D^2 + d.D^3\right).P^{-1}$$

En posant $\Delta = a.I_4 + b.D + c.D^2 + d.D^3$, on a donc $A = P.\Delta.P^{-1}$ et les valeurs propres de A sont les

$$\lambda_k(A) = a + b.\lambda_k + c.\lambda_k^2 + d.\lambda_k^3,\, k \in \{1, \ldots, 4\}$$

i.e.

$$\mathrm{Spec}(A) = \{a + bi - c - di, a - b + c - d, a - ib - c + di, a + b + c + d\}$$

B.3. Une usine de traitement des déchets industriels procède chaque semaine au prélévement de 4 échantillons le long du cycle de traitement. Si le contenu d'un échantillon de numéro $i \in \{1, \ldots, 4\}$ est contaminé alors on peut modéliser la propagation de la contamination grâce à une matrice $A \in E$.

En effet si un problème est décelé à l'échantillon i alors la probabilité de retrouver cette contamination à un échantillon $j \in \{1, \ldots, 4\}$ la semaine suivante est la j-ième coordonnée de $A.e_i$ et plus généralement au bout de k semaines cette probabilité est la j-ième coordonnée de $A^k.e_i$.

B.3.a. Exprimons la modélisation précédente en termes précis de probabilités en introduisant les variables aléatoires adéquates et en décrivant leur loi.

On dispose de 4 échantillons numérotés $1,2,3,4$. A une semaine donnée k, on marque $X_k = j$ si l'échantillon j est contaminé. Il faut comprendre (et ce n'est pas du tout clair dans le texte, que le « problème » qui se déplace de semaine en semaine, n'est situé, à un moment donné, que dans un seul échantillon. Le vocabulaire utilisé pouvait faire penser qu'un échantillon, une fois contaminé, le reste ?)

La règle décrite est la suivante : pour tout $i,j = 1,\dots,4$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i) = A_{ji}$$

où A_{ji} est la j-ième coordonnée de $A.e_i$.

On introduisant, pour $k \in \mathbb{N}$, le vecteur $U_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \\ \mathbb{P}(X_k = 3) \\ \mathbb{P}(X_k = 4) \end{pmatrix}$, on a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, U_{k+1} = A.U_k$$

et, par la récurrence donnant la formule des suites géométriques,

$$\forall k \in \mathbb{N}, U_k = A^k.U_0$$

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\forall k \in \mathbb{N}, (H_k) : A^k = P.\Delta^k.P^{-1}$$

1. Pour $k = 0$, on a bien $A^0 = I_4 = P.I_4.P^{-1} = P.\Delta^k.P^{-1}$.
2. Si, pour un cetain $k \in \mathbb{N}$, on a $H_k : A^k = P.\Delta^k.P^{-1}$, alors

   $$A^{k+1} = A.A^k = P.\Delta.P^{-1}.P.\Delta^k.P^{-1} = P.\Delta^{k+1}.P^{-1}$$

   et donc H_{k+1} est vraie.

On a donc, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = P.\begin{pmatrix} (a+bi-c-di)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b+c-d)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a-ib-c+di)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a+b+c+d)^k \end{pmatrix}.P^{-1}$$

B.3.b. Des relevés statistiques ont montré qu'on a toujours $a+b+c+d = 1$ et $(a,b,c,d) \in \left[0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right[^4$.

On a donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lambda_4(A)^k = 1$.

On a par ailleurs $|\lambda_2(A)| \leq |a-b| + |c-d| \leq 2\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ et donc, lorsque $k \to +\infty$,

$$\lambda_2(A)^k \to 0.$$

Concernant les deux autres valeurs propres (qui sont conjuguées l'une de l'autre car a,b,c,d sont réels, $0 \leq a^2, b^2, c^2, d^2 < \frac{1}{8}$), on a

$$|a-bi-c+di| = |a+bi-c-di| \leq |a+bi| + |c+di| = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} < 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

et donc, lorsque $k \to +\infty$,

$$\lambda_1(A)^k \to 0 \text{ et } \lambda_3(A)^k \to 0.$$

B.3.c. Il s'ensuit que (Δ^k) converge vers $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, (tous calculs faits)

$$P.\delta.P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce résultat s'interprète comme étant le fait qu'après un temps suffisamment long, la probabilité que le « problème » se situe dans un échantillon donné j est indépendante de j.