Corrections choisies 01

Analyse des fonctions d'une variable réelle : quelques révisions rapides

Correction Ex.–18 Soit $I=[0,1]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de dérivée *seconde* positive.
1.a. La corde au graphe de f entre les points d'abscisses 0 et 1 est la droite passant par les points $(0,f(0))$ et $(1,f(1))$, son coefficient directeur est $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)-f(0)$, son ordonnée à l'origine est $f(0)$, elle a donc pour équation (dans le plan rapporté aux cooordonnées (x,y))

$$y = (f(1)-f(0)).x + f(0)$$

1.b. Pour situer le graphe de f par rapport à cette corde, on étudie le signe de la différence g définie par

$$\forall x \in [0,1]\,,\, g(x) = f(x) - ((f(1)-f(0)).x + f(0))$$

On a naturellement $g(0)=g(1)=0$. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, par somme (une fonction affine est de cette classe), la fonction g l'est aussi et on a

$$\forall x \in [0,1]\,,\, g'(x) = f'(x) - (f(1)-f(0)),\, g''(x) = f''(x)$$

La fonction g' est donc croissante, continue sur $[0,1]$, et, par le théorème [1] de ROLLE ($g(0)=g(1)=0$), s'annule en un point $x_0 \in]0,1[$. Du point de vue du signe, g est
— négative (au sens large) sur $[0,x_0]$
— positive (au sens large) sur $[x_0,1]$
On a donc le tableau de variations suivant pour g (signes et flèches de monotonie sont à lire au sens large) :

x	0		x_0		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	0

D'après ce tableau de variations, g est clairement négative sur $[0,1]$ et donc la courbe est au dessous de sa corde entre 0 et 1.
1.c. Soit $x_0 \in [0,1]$ quelconque. La tangente au graphe de f en x_0 a pour équation

$$y = f'(x_0).(x-x_0) + f(x_0) = T_{x_0}(x)$$

Pour situer le graphe de f par rapport à cette tangente, on étudie le signe de la différence g définie par

$$\forall x \in [0,1]\,,\, g(x) = f(x) - T_{x_0}(x) = f(x) - (f'(x_0).x + f(0))$$

On a naturellement $g(x_0)=0$. L'étude de g se mène comme précédemment et on a

$$\forall x \in [0,1]\,,\, g'(x) = f'(x) - f'(x_0),\, g''(x) = f''(x)$$

La fonction g' est donc croissante sur $[0,1]$, et, $g'(x_0)=0$ et donc du point de vue du signe est
— négative (au sens large) sur $[0,x_0]$
— positive (au sens large) sur $[x_0,1]$

1. Si on ne voit pas l'intervention de ce théorème ici, on peut argumenter de la façon alternative suivante : La fonction g', du point de vue du signe est
— Soit de signe constant >0 ou <0 sur l'intervalle $]0,1[$, ce qui est implique que g est strictement monotone sur l'intervalle $[0,1]$, ce qui est impossible du fait de $g(0)=g(1)=0$,
— Soit s'annule sur un intervalle du type $[\alpha,\beta]$ avec $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, en étant strictement négative sur $[0,\alpha[$, strictement positive sur $]\beta,1]$
On a donc le tableau de variations suivant pour g (cas $0<\alpha<\beta<1$, dans les autres cas, les colonnes correspondantes disparaissent) :

x	0		α		β		1
$g'(x)$		$-$	0	0	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\to$	$g(\beta)$	$\nearrow$	0

On a donc le tableau de variations suivant pour g (signes et flèches de monotonie sont à lire au sens large) :

x	0		x_0		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(x_0)=0$	$\nearrow$	

La fonction g est donc positive et le graphe de f est au dessus de sa tangente en x_0. x_0 étant quelconque, il est au dessus de toutes ses tangentes.

2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, g une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, de dérivée seconde positive sur I, $a<b$ deux points de I.

Soit la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=g(a+t.(b-a))$. Par composition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et de la fonction affine $t\in[0,1]\mapsto a+t.(b-a)$ prenant ses valeurs entre a et b et donc dans I (I est un intervalle), la fonction f est $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et on a

$$\forall t\in[0,1]\,,\, f'(t)=(b-a).g'(a+t.(b-a)),\; f''(t)=(b-a)^2.g''(a+t.(b-a))$$

La fonction f'' est donc positive sur $[0,1]$ et les questions précédentes s'appliquent :

— le graphe de f est au dessous de sa corde entre 0 et 1 et donc le graphe de g est en dessous de sa corde entre a et b.

— le graphe de f est au dessus de n'importe laquelle de ses tangentes entre 0 et 1 et donc le graphe de g est au dessus de toutes ses tangentes entre a et b.

En faisant varier $a<b$ sur tout I, un peu de réflexion logique montre que de ceci on tire

— Entre deux points d'abscisses a et $b\in I$, le graphe de g est en dessous de sa corde entre a et b.

— Sur l'intervalle I, le graphe de g est au dessus d'un quelconque de ses tangentes.

Pour convaincre le lecteur du passage des propriétés de f à celles de g, on donne l'argument pour la corde (tout tient à ce qu'on fait un changement de variable affine $x=a+t.(b-a)$ et que dans ce changement de variable, une droite reste une droite).

La corde au graphe de g entre a et b a pour équation $y=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a)+g(a)$, la corde au graphe de f entre 0 et 1 a pour équation $y=(f(1)-f(0)).t+f(0)$. On a montré que

$$\forall t\in[0,1]\,,\, f(t)\geq(f(1)-f(0)).t+f(0)$$

i.e.

$$\forall t\in[0,1]\,,\, g(a+t.(b-a))\geq(g(b)-g(a)).t+g(a)$$

et donc, le changement de variable $x=a+t.(b-a)$ réalisant une bijection de $[0,1]$ sur $[a,b]$, avec $t=\frac{x-a}{b-a}$,

$$\forall x\in[a,b]\,,\, g(x)\geq(g(b)-g(a)).\frac{x-a}{b-a}+g(a)$$

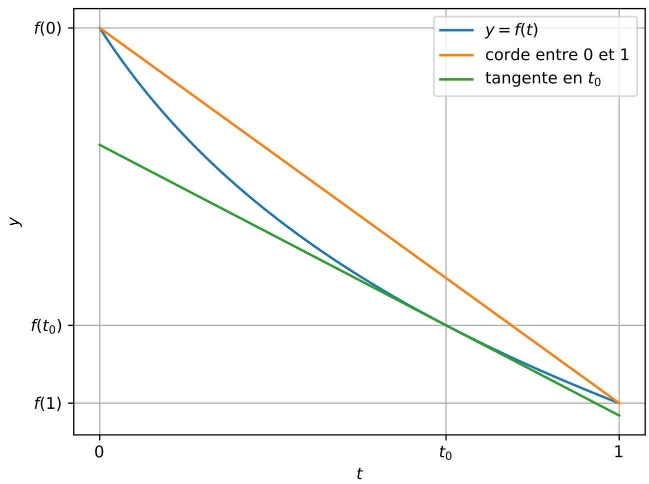

FIGURE 1 – Graphe de f, corde et tangentes

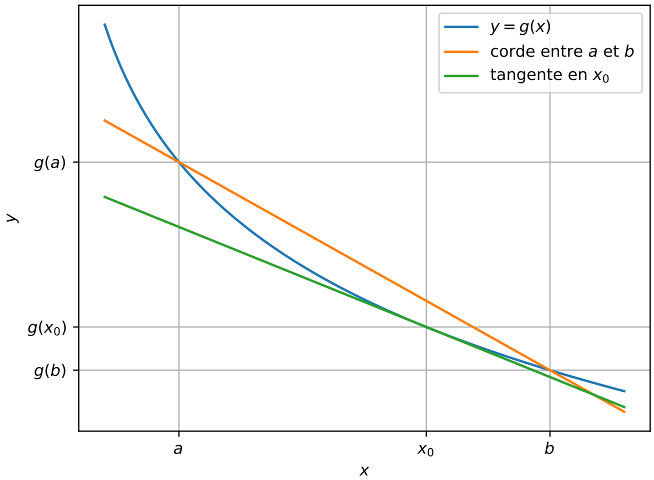

FIGURE 2 – Graphe de g, corde et tangentes

Correction Ex.–34

— $f_1(x) = \tan^2 x$. Domaine de définition/continuité : c'est celui de la fonction tangente : $D = \cup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ où $I_k =]-\pi/2+k\pi, +\pi/2+k\pi[$. Sur chaque intervalle I_k, on a $f_1(x) = (\tan^2 x + 1) - 1$ et donc une primitive de f_1 sur I_k est $F_{1,k} : x \mapsto \tan x - x$. S'il s'agit d'avoir toutes les primitives on peut ajouter une constante : celle-ci dépend de l'intervalle I_k.

— $f_2(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Domaine de définition/continuité : c'est celui de la fonction tangente : $D = \cup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ où $I_k =]-\pi/2+k\pi, +\pi/2+k$ Sur chaque intervalle I_k, on a $f_2(x) = \frac{d}{dx}(\ln|\cos x|)$ et donc une primitive de f_2 sur I_k est $F_{2,k} : x \mapsto \ln|\cos x|$. Noter la valeur absolue, qui gère le problème du signe de cos sur les intervalles I_k avec k impair. S'il s'agit d'avoir toutes les primitives on peut ajouter une constante : celle-ci dépend de l'intervalle I_k.

— $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$. Domaine de définition/continuité : $I =]2, -\infty[$. Sur l'intervalle I, on a $f_3(x) = (2-x)^{-\frac{1}{2}}$ et donc une primitive de f_3 sur I est $F_3 : x \mapsto -2.(2-x)^{+\frac{1}{2}}$. L'ensemble des primitives à valeurs réelles de f_3 sur I est $\{F_3 + C, C \in \mathbb{R}\}$.

— $f_4(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
  — Si $c = 0$: on a une fonction affine $f_4 : x \mapsto \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ dont le domaine de déf. est $\mathbb{R}$ et une primitive sur $\mathbb{R}$ est $F_4 : x \mapsto \frac{a}{2d}x^2 + \frac{b}{d}.x$.
  — Si $c \neq 0$: on a une fraction rationnelle

$$f_4 : x \mapsto \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$$

  dont le domaine de déf. est $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} =]-\infty, -\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c}, +\infty[= I_- \cup I_+$

Sur chacun de ces deux intervalles $I = I_-$ ou $I = I_+$, on a

$$\forall x \in I,\ f_4(x) = \frac{\frac{a}{c}(x+\frac{d}{c}) + \frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$$

et donc une primitive de f_4 sur I est

$$F_4 : x \mapsto \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|x + \frac{d}{c}|$$

Noter là encore l'utilisation de la v.abs. pour gérer le signe du dénominateur sur l'intervalle I_-.

— $f_5(x) = |x^2 - 1|$. f_5 est définie continue sur $\mathbb{R}$. La v.abs. est un obstacle à l'intégration en formules directe. On élimine la v.abs. en donnant une formule par morceaux. On a $\mathbb{R} = I_- \cup I_0 \cup I_+$ avec

$$I_=]-\infty, -1], I_0 =]-1, +1[, I_+ = [1, +\infty[$$

On a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \in I_- \\ 1 - x^2 & \text{si } x \in I_0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \in I_+ \end{cases}$$

Si F_5 est une primitive de f_5 sur tout $\mathbb{R}$ alors
  — F_5 est continue sur $\mathbb{R}$ et

— il existe 3 constantes réelles C_-, C_0 et C_+ telles que

$$\forall x\in I_-,\, F_5(x)=\frac{1}{3}x^3-x+C_-,\, \forall x\in I_+,\, F_5(x)=\frac{1}{3}x^3-x+C_+,\, \forall x\in I_0,\, F_5(x)=x-\frac{1}{3}x^3+C_0$$

La continuité en -1 force $C_-+\frac{2}{3}=C_0-\frac{2}{3}$, la continuité en $+1$ force $C_+-\frac{2}{3}=C_0+\frac{2}{3}$, *i.e.*

$$C_-=C_0-\frac{4}{3},\, C_+=C_0+\frac{4}{3}$$

Une primitive particulière sur *tout* $\mathbb{R}$ s'obtient en prenant $C_0=0$ (choix de constante)

$$\forall x\in\mathbb{R},\, F_5(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x-\frac{4}{3} & \text{si } x\in I_-\\ x-\frac{1}{3}x^3 & \text{si } x\in I_0\\ \frac{1}{3}x^3-x+\frac{4}{3} & \text{si } x\in I_+\end{cases}$$

— $f_6(x)=\frac{1}{(x-5)^3}=(x-5)^{-3}$. Le domaine de définition/continuité est $D=I_-\cup I_+$ avec $I_-=]-\infty,5[$ et $I_+=]5,+\infty[$. Sur chacun de ces intervalles, une primitive est donnée par $F_6(x)=-\frac{1}{2}.(x-5)^{-2}$. Si on s'autorise à parler de primitive sur tout l'ensemble de définition (ce qui peut-être dangereux lorsqu'on calcule des intégrales), on a alors F est primitive de f_6 sur D si et seulement si il existe *deux* constantes C_- et C_+ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{5\},\, F(x)=\begin{cases}F_6(x)+C_- & \text{si } x\in I_-\\ F_6(x)+C_+ & \text{si } x\in I_+\end{cases}$$

— $f_7(x)=\ln(4-x)$. Le domaine de définition/continuité est $D=]-\infty,4[$. Une primitive de $t\mapsto\ln t$ sur $]0,+\infty[$ est $t\mapsto t.\ln t-t$, par composition avec une fonction affine, une primitive de f_7 sur l'intervalle D est donnée par

$$\forall x\in D=]-\infty,4[,\, F_7(x)=-\left((4-x).\ln(4-x)-(4-x)\right)$$

— $f_8(x)=|x|^{2/5}$. Le domaine de définition/continuité est tout $\mathbb{R}$. Cependant la présence de la v.abs. empêche la primitivation en formule directe. On a, en posant $I_=]-\infty,0[$, $I_=[0,+\infty[$

$$\forall x\in\mathbb{R},\, f_8(x)=\begin{cases}x^{\frac{2}{5}} & \text{si } x\in I_+\\ (-x)^{\frac{2}{5}} & \text{si } x\in I_-\end{cases}$$

et donc F_8 est une primitive de f_8 sur tout $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe deux constantes C_- et C_+ telles que
— F_8 est continue sur $\mathbb{R}$
— et

$$\forall x\in\mathbb{R},\, f_8(x)=\begin{cases}\frac{5}{7}x^{\frac{2}{5}+1}+C_+ & \text{si } x\in I_+\\ -\frac{5}{7}(-x)^{\frac{7}{5}}+C_- & \text{si } x\in I_-\end{cases}$$

Ceci équivaut (continuité en 0) à il existe une constante C telle que

$$\forall x\in\mathbb{R},\, f_8(x)=\begin{cases}\frac{5}{7}x^{\frac{2}{5}+1}+C & \text{si } x\in I_+\\ -\frac{5}{7}(-x)^{\frac{7}{5}}+C & \text{si } x\in I_-\end{cases}$$

Correction Ex.–38

— $I_1=\int_{\pi/2}^{2\pi/3}(x\cos x+\sin x)\ln x dx$ Posons $u(x)=\ln x$, $v(x)=x.\sin x$. Les fonctions u et v ainsi définies sont $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration $J=[\pi/2,2\pi/3]$ et on a

$$\forall x\in J,\, u'(x)=\frac{1}{x},\, v'(x)=x\cos x+\sin x$$

et donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\pi/2}^{2\pi/3} v'(x).u(x)\,dx=[u(x).v(x)]_{\pi/2}^{2\pi/3}-\int_{\pi/2}^{2\pi/3} v(x).u'(x)\,dx\\ &= [\ln x.x.\sin x]_{\pi/2}^{2\pi/3}-\int_{\pi/2}^{2\pi/3}\sin x\,dx\\ &= [\ln x.x.\sin x]_{\pi/2}^{2\pi/3}+[\cos x]_{\pi/2}^{2\pi/3}\\ &= .... \end{aligned}$$

— $I_2 = \int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x) dx$ Posons $u(x) = \cos \ln x$, $v(x) = x$. Les fonctions u et v ainsi définies sont $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration $J = \left[1, e^{\pi/2}\right]$ et on a

$$\forall x \in J, u'(x) = -\frac{1}{x}.\sin \ln x,\ v'(x) = 1$$

et donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^{e^{\pi/2}} v'(x).u(x)\ dx = [u(x).v(x)]_1^{e^{\pi/2}} - \int_1^{e^{\pi/2}} v(x).u'(x)\ dx \\ &= [x.\cos \ln x]_1^{e^{\pi/2}} - \int_1^{e^{\pi/2}} 1.\sin \ln x\ dx \end{aligned}$$

Sur cette dernière intégrale, on effectue une i.p.p. dans le même esprit pour obtenir

$$\int_1^{e^{\pi/2}} \underbrace{1}_{v'(x)}.\underbrace{\sin \ln x}_{u(x)}\ dx \quad = \quad [x.\sin \ln x]_1^{e^{\pi/2}} + \int_1^{e^{\pi/2}} 1.\cos \ln x\ dx$$

En résumant, il vient

$$I_2 = [x.\cos \ln x]_1^{e^{\pi/2}} - [x.\sin \ln x]_1^{e^{\pi/2}} - I_2$$

et donc

$$I_2 = \frac{1}{2}\left([x.\cos \ln x]_1^{e^{\pi/2}} - [x.\sin \ln x]_1^{e^{\pi/2}}\right) = ...$$

— $I_3 = \int_1^e (\ln x)^3 dx$. Posons $u(x) = (\ln x)^3$, $v(x) = x$. Les fonctions u et v ainsi définies sont $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration $J = [1, e]$ et on a

$$\forall x \in J, u'(x) = \frac{3}{x}.(\ln x)^2,\ v'(x) = 1$$

et donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^e v'(x).u(x)\ dx = [u(x).v(x)]_1^e - \int_1^e v(x).u'(x)\ dx \\ &= \left[x.(\ln x)^3\right]_1^e - \int_1^e 3.(\ln x)^2\ dx \\ &= e - 3.\int_1^e (\ln x)^2\ dx \end{aligned}$$

On recommence dans le même esprit avec $u(x) = (\ln x)^2$ et $v(x) = x$ pour obtenir

$$\int_1^e \underbrace{1}_{v'(x)}.\underbrace{(\ln x)^2}_{u(x)}\ dx \quad = \quad e - 2.\int_1^e (\ln x)\ dx$$

et encore une fois, avec $u(x) = (\ln x)$ et $v(x) = x$ pour obtenir

$$\int_1^e \underbrace{1}_{v'(x)}.\underbrace{(\ln x)}_{u(x)}\ dx \quad = \quad e - \int_1^e 1\ dx = 1$$

En résumant

$$I_3 = e - 3.(e-2) = 6 - 2e$$

Correction Ex.–39 Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose :

$$I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q\, dx.$$

1. On a, par intégration par parties, en définissant u et v comme indiqué, ces fonctions étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$,

$$\begin{aligned}
I(p+1,q) &= \int_0^1 \underbrace{x^{p+1}}_{u(x)}\underbrace{(1-x)^q}_{v'(x)}\,dx \\
&= \left[\underbrace{x^{p+1}}_{u(x)}\underbrace{\left(-\frac{1}{q+1}\right)(1-x)^{q+1}}_{v(x)}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{(p+1)x^p}_{u'(x)}\underbrace{\left(-\frac{1}{q+1}\right)(1-x)^{q+1}}_{v(x)}\,dx \\
&= \frac{p+1}{q+1}I(p,q+1)
\end{aligned}$$

2. On a

$$I(0,q) = \int_0^1 (1-x)^q\,dx = \left[\left(-\frac{1}{q+1}\right)(1-x)^{q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{q+1}$$

Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, p suffisament grand, on a

$$\begin{aligned}
I(p,q) &= \frac{p}{q+1}I(p-1,q+1) = \frac{p}{q+1}\frac{p-1}{q+2}I(p-2,q+2) \\
&= \frac{p}{q+1}\frac{p-1}{q+2}\frac{p-2}{q+3}I(p-3,q+3) = \ldots \\
&= \frac{p}{q+1}\frac{p-1}{q+2}\frac{p-2}{q+3}\cdots\frac{p-(p-2)}{q+p-1}\frac{p-(p-1)}{q+p}I(p-p,q+p) \\
&= \frac{p!q!}{(p+q)!}\frac{1}{p+q+1} = \frac{1}{\binom{p+q}{p}(p+q+1)}
\end{aligned}$$

On vérifie (rédaction de récurrence sur un des indices un peu subtile, à faire !) ensuite que cette formule est correcte pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.

3. Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$ le polynôme

$$T(t) = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}t^pI(p,n-p),$$

On a

$$\begin{aligned}
T(t) &= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}t^pI(p,n-p) \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}t^p\int_0^1 x^p(1-x)^{n-p}\,dx \\
&= \int_0^1\left(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}t^px^p(1-x)^{n-p}\right)dx \\
\text{(Newton)}\quad &= \int_0^1 (t.x+1-x)^n\,dx = \int_0^1 ((t-1).x+1)^n\,dx \\
(\text{si } t\neq 1)\quad &= \frac{1}{(n+1)(t-1)}\left[((t-1).x+1)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{t^{n+1}-1}{(n+1)(t-1)} \\
\text{(somme géom.)}\quad &= \frac{1}{n+1}(1+t+\cdots+t^n)
\end{aligned}$$

On a trouvé deux fonctions polynomiales égales (partout sauf, peut-être au point $t=1$), leurs coefficients sont égaux et on en déduit que, pour $n\in\mathbb{N}$, $p\in\{0,\ldots,n\}$,

$$\binom{n}{p}I(p,n-p) = \frac{1}{n+1}$$

Pour $p,q\in\mathbb{N}$, en posant $n=p+q$, cela donne (formule déjà trouvée précédemment),

$$I(p,q) = \frac{1}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}$$