Lycée Pierre-Gilles de Gennes **BCPST2**
Mathématiques **2019-2020**

Révisions/Formulaire 01

Analyse des fonctions d'une variable réelle: quelques révisions rapides

Pour chaque exercice, on évaluera si le résultat est illustrable par un graphique, un schéma et/ou un calcul informatique adéquat, à réaliser si le temps le permet.

L'utilisation des « gros » théorèmes du cours (TVI, TAF, IPP, Chgt de variable dans intégrales) doit donner lieu à une rédaction dans les standards du concours.

Limites

Exercice 1.— Enoncer le théorème de la limite monotone. On se limitera au cas du problème de la limite en $+\infty$ pour une fonction f définie sur un intervalle du type $[a, +\infty[$.

Exercice 2.— Montrer, sans tenter le calcul de l'intégrale, que la fonction f définie par

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t^6)^{\frac{1}{4}}}$$

admet une limite en $+\infty$.

Indication:Observer une éventuelle monotonie de f et majorer $f(x)$ par une constante en majorant simplement son intégrande.

Exercice 3.— Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \in [A, +\infty[\, , \, 0 \leq \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \leq 1$$

Exercice 4.— Discuter suivant la valeur de $\alpha > 0$ la limite lorsque $x \to +\infty$ de $x^\alpha((x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}})$.

Exercice 5.— Discuter suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ de la limite en $+\infty$ de la fonction $t \mapsto \frac{t^\alpha}{(1+t^2)^{\frac{\alpha}{3}}}$. (Donner un équivalent « simple »).

Exercice 6.— Rappeler les règles de calcul de limites croissances comparées.

Exercice 7.— Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $xe^{-\sqrt{x}}$. Montrer que $xe^{-\sqrt{x}} = o\left(x^{-2}\right)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 8.— Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $xe^{-\sqrt{\ln x}}$.

Exercice 9.— Déterminer la limite lorsque $x \to 0$ de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Exercice 10.— Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, en discutant suivant les valeurs de $\alpha > 0$, déterminer la limite $x \to +\infty$ de $\left(1 + \frac{y_0}{x^\alpha}\right)^x$.

Continuité et Dérivabilité

Tangentes

Exercice 11.— Rappeler la définition du nombre dérivé en x_0 d'une fonction f, réelle, de variable réelle. Rappeler le lien entre ce nombre et la tangente au graphe de f en x_0. Dessin.

Exercice 12.— Donner l'équation de la tangente à la fonction $x \mapsto x.\ln x$ en $x_0 = 1$. Etudier la position de cette tangente par rapport au graphe de la fonction.

Exercice 13.— Dans quel(s) cas, le graphe d'une fonction admet-il une (demi-)tangente verticale ? Donner un exemple de fonction dont le graphe admet une tangente verticale en $x_0 = 1$.

Composition

Exercice 14.— Donner la définition du fait que f, une fonction de variable réelle, à valeurs réelles, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exercice 15.— Enoncer le théorème portant sur le caractère $\mathscr{C}^1$ d'une composition de deux fonctions.

Exercice 16.— Donner un intervalle de $\mathbb{R}$, centré en $\frac{1}{2}$, le plus large possible, sur lequel la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - \cos(2\pi.x)}$. est de classe $\mathscr{C}^1$.

Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$? On écrira avec soin et méthode les arguments de composition. Après avoir simplifié l'expression à l'aide d'une des formules d'angle double, tracer rapidement l'allure du graphe de cette fonction.

La fonction g définie par $g(x) = x.f(x)$ est-elle dérivable en 0 ? En 1 ?

Exercice 17.— Donner une formule pour la dérivée de $t \mapsto \ln(\sqrt{t^2 - 1} + t)$. Vous pouvez mener le calcul formellement à la physicienne en posant de nouvelles variables comme $u = \sqrt{t^2 - 1} + t$, $v = t^2 - 1$... Pour quelles valeurs de t votre formule est-elle valable ?

Tableaux de variations

Exercice 18.— Soit $I = [0, 1]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de dérivée *seconde* positive.
1.a. Donner l'équation de la corde au graphe de f entre les points d'abscisses 0 et 1.
1.b. Montrer que le graphe de f est en dessous de cette corde.
1.c. Montrer que le graphe de f est au dessus de toutes ses tangentes.
2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, g une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, de dérivée seconde positive sur I, $a < b$ deux points de I.

En considérant la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = g(a + t.(b - a))$, déduire de la question précédente des propriétés de position concernant le graphe de g, ses tangentes et ses cordes.

Exercice 19.— Déterminer, en discutant sur la valeur de $c \in \mathbb{R}$, du nombre de solutions de l'équation $\frac{3}{x^2} + x = c$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.

Exercice 20.— Soient C, α deux nombres réels strictement positifs. Déterminer le minimum de la fonction $x \in]0, +\infty[\mapsto x^\alpha + \frac{C}{x}$.

Exercice 21.—
1. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \ln(\sqrt{t^2 - 1} + t)$ définit une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

2. Pour $y \in J$, $y = f(x)$, $x \geq 1$, calculer et simplifier $e^y + e^{-y}$ et $e^y - e^{-y}$
3. Enoncer le théorème de dérivation d'une fonction réciproque et déterminer un sous-intervalle de J maximal sur lequel f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$. Donner une formule pour $(f^{-1})'$ sur cet intervalle.

Exercice 22.— La fonction arcsinus
1. Etudier la fonction sinus $\sin$ sur l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ et montrer que cette fonction définit une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J à préciser. On note $\arcsin$ la fonction réciproque de cette bijection. Il s'agit de la fonction *arc sinus*.
2. Tracer le graphe de $\sin$ sur I et, sur un autre graphique, tracer celui de $\arcsin$ sur J. Donner les valeurs de $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\arcsin(-1)$, $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$.
3. Justifier que sur l'intervalle J, $\sin(\arcsin(y)) = y$ et $\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$.
4. Justifier du caractère $\mathscr{C}^1$ de $\arcsin$ sur l'intervalle $]-1, +1[$ et donner une formule pour sa dérivée. La fonction $\arcsin$ est-elle dérivable à gauche en $+1$? Quelle est la traduction graphique de ce phénomène ?
5. (Question de cours) Savez-vous faire le travail précédent en remplaçant la fonction $\sin$ par la fonction tangente $\tan$? Faire un résumé des résultats obtenus.

Développements limités

Exercice 23.—
1. Rappeler la formule de TAYLOR à l'ordre n en 0, en x_0.
2. Donner les développements limités classiques. En faire une liste hiérachisée.

Exercice 24.—
1. Comparer, au voisinage de 0, les fonctions

$$x \mapsto \sin(x) \text{ et } x \mapsto \tan(x)$$

2. Comparer, au voisinage de 0, les fonctions

$$x \mapsto \sin(2x) \text{ et } x \mapsto 2\tan(x)$$

Exercice 25.— Justifier, avec le minimum de calculs, que le DL d'ordre 37 de $\tan(x^3 - x)$ ne comporte que des puissances impaires.

Calcul intégral

Ipp et récurrence.

Exercice 26.— On pose, pour $p, q \in \mathbb{N}$,

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$$

1. Calculer $I_{p,0}$ et $I_{0,q}$.

2. Donner une relation entre $I_{p+1,q-1}$ et $I_{p,q}$. En déduire une formule donnant $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.
Indication:On doit trouver $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$

Changement de variable

Exercice 27.— Enoncer le théorème de changement de variable pour une intégrale.

Exercice 28.— Donner une formule donnant, pour $p, q \in \mathbb{N}$,

$$J_{p,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1}(x). \sin^{2q+1}(x) \, dx$$

à l'aide de factorielles.
Indication:Se ramener par changement de variable à $I_{p',q'}$ de l'exercice 26 en posant $u = \sin^2(x)$.

Calculs d'aire et de volume

Exercice 29.— Une cuve de fioul agricole, cylindrique, de rayon $R > 0$, de longueur $\ell > 0$ est emplie de fioul jusqu'à une hauteur [1] h avec $0 < h < 2R$ (ce que l'on peut voir sur une jauge extérieure). Le volume de fioul est noté $V(h)$.
1. Faire un dessin.
2. Pourquoi (réfléchir aux problèmes d'unités) peut-on mettre V sous la forme

$$V(h) = \ell.R^2.a(\frac{h}{R})$$

où $a : [0,2] \to \mathbb{R}$ est une fonction indépendante de R, h, ℓ. Que valent $a(0)$, $a(1)$, $a(2)$?
3. Donner une formule intégrale pour $a(x)$ pour $0 \leq x \leq 2$. (On pourra tracer la réunion des graphes des fonctions $x \mapsto \pm\sqrt{1-(x-1)^2}$.)
4. Vérifier que

$$\forall x \in [0,2] \, , \, a(x) = \frac{\pi}{2} + (x-1)\sqrt{x(2-x)} + \arcsin(x-1)$$

où la fonction $\arcsin$ est la fonction réciproque [2] de $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,+1]$.

1. L'axe de ce cylindre est parallèle au sol
2. On pourra commencer par étudier cette fonction, notamment montrer la formule

$$\forall x \in [-1,+1] \, , \, \arcsin'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

5. Ecrire une fonction Python `Volume(h,R=1,ell=1)` retournant le volume de fioul dans la cuve. Tracer la courbe représentative du volume en fonction de la hauteur. Indiquer abscisses et ordonnées importantes sur le graphe.

Sommes de RIEMANN

Exercice 30.— On considère

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n\,(n+k)}}.$$

Montrer que (S_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 31.— $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$?

Exercice 32.— $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k.n+n^2}$?

Exercice 33.— $\lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\right)^{\frac{1}{n}}$?

Techniques

Exercice 34.— Préciser l'ensemble de définition et déterminer les primitives des fonctions définies par :

$$f_1(x) = \tan^2 x\,, \quad f_2(x) = \tan x\,, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,, \quad f_4(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\,,$$
$$f_5(x) = |x^2-1|\,, \quad f_6(x) = \frac{1}{(x-5)^3}\,, \quad f_7(x) = \ln(4-x)\,, \quad f_8(x) = |x|^{2/5}\,.$$

Exercice 35.— Préciser les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont continues, puis en déterminer toutes les primitives sur chacun de ces intervalles.

$$f\,(t) = \frac{1}{t\,(\ln t)^3},\ g\,(x) = \arcsin x,\ h\,(x) = \cos^3 x,\ i\,(x) = \frac{1}{2+\sin x}.$$

Exercice 36.— Déterminer A et B dans l'égalité suivante :

$$\frac{x}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Calculer $\int_0^1 \frac{x}{x^2-x-2}dx$.

Exercice 37.— Calculer

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx,\ \int_0^1 \frac{2x^2+1}{x^2+1}\,dx$$

Exercice 38.— Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (x\cos x + \sin x).\ln x\,dx,\ I_2 = \int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x)\,dx,\ I_3 = \int_1^{e} (\ln x)^3\,dx.$$

Exercice 39.— Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose :

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx.$$

1. Exprimer $I(p+1, q)$ en fonction de $I(p, q+1)$.
2. Calculer $I(0, q)$. En déduire $I(p, q)$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
3. En considérant, pour $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme

$$T(t) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} t^p I(p, n-p),$$

retrouver le résultat précédent.

Exercice 40.—
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

2. De même, calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\sin\left(n^3 t\right) \right) e^{-nt} \, dt.$$

Divers

Exercice 41.— Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
1. Etudier f et tracer sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à ($\mathscr{C}$) au point $E = (e, f(e))$.
3. Calculer l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe et la tangente T.

Exercice 42.— Justifier la bonne définition de chacune des intégrales suivantes, puis trouver leur valeur à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\int_0^2 x\sqrt{x+1} dx \,, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx \,, \qquad \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\cos x} dx \,, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}} \,.$$

On posera respectivement $u = x+1$, $u = \cos^2 x$, $u = \cos x$ et $x = u^2 - 1$.

Exercice 43.— Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère les fonctions suivantes :

$$\varphi_1(x) = \int_0^{\cos x} f(t) dt, \qquad \varphi_2(x) = \int_x^{x^3} f(t) dt, \qquad \varphi_3(x) = \int_x^{x^3} f(tx) dt \,.$$

1. Montrer que φ_1 et φ_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer φ_1' et φ_2'.
2. Montrer que φ_3 est continue en 0, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer $\varphi_3'(x)$ si $x \neq 0$.
3. Montrer que $\varphi_3 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 44.— Pour tout entier naturel n on note :

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{\sin x}\,, \qquad I_n = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} f_n(x)dx\,.$$

1. Justifier la bonne définition de I_n. Rappeler les valeurs $\sin(\pi/3)$, $\sin(2\pi/3)$, $\tan(\pi/6)$, $\tan(\pi/3)$.
2. Donner la valeur de I_1.
3. Donner la valeur de I_0. On pourra effectuer le changement de variable $t = \tan(x/2)$ en utilisant la relation $\sin x = 2t/(1+t^2)$.
4. n étant un entier naturel, simplifier $I_{n+2} - I_n$ en utilisant autant de fois que nécessaire la relation trigonométrique $\cos p - \cos q = -2\sin((p-q)/2)\sin((p+q)/2)$.
5. En déduire la valeur de I_n lorsque n est impair.
6. Donner les valeurs de I_2 et de I_4.

Exercice 45.— Pour un nombre réel x, on considère la formule

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctan\left(x.\tan\theta\right)\, d\theta$$

1. Justifier que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Donner la valeur de $F(0)$, de $F(1)$.
3. On admet que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan\theta}{1+x^2.\tan^2\theta}\, d\theta$$

3.a. Justifier heuristiquement du caractère raisonnable de cette formule.
3.b. Calculer $F'(0)$.
3.c. Effectuer (en le justifiant) le changement de variable $u = \tan\theta$ dans cette intégrale et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \int_0^1 \frac{u}{(1+x^2.u^2)(1+u^2)}\, du$$

3.d. Donner la valeur de $F'(\pm 1)$.
3.e. Pour $x \neq \pm 1$, vérifier la décomposition

$$\frac{u}{(1+x^2.u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{(x^2-1)}\left(x.\frac{x.u}{1+(x.u)^2} - \frac{u}{1+u^2}\right)$$

et en déduire une formule sans signe intégral pour $F'(x)$.

Exercice 46.— Intégrales de WALLIS et application à la formule de STIRLING. (D'après AV-2004)
NB : La formule finale doit faire partie de votre bagage culturel ! !
Soit λ un nombre réel ≥ 0. On note

$$W_\lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^\lambda\, d\theta$$

Le but de cet exercice est d'obtenir une formule exacte pour W_λ, l'intégrale de WALLIS, lorsque λ est un nombre entier, d'obtenir un équivalent simple de W_λ lorsque $\lambda \to +\infty$ et finalement d'obtenir un équivalent de $n!$ lorsque $n \to +\infty$.

1. On pose
$$\tilde{W}_\lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^\lambda \, d\theta$$
Justifier que W_λ et $\tilde{W}_\lambda$ sont bien définies et montrer qu'elles sont égales.
2.a. Montrer que la fonction $\lambda \mapsto W_\lambda$ est une fonction décroissante, strictement positive sur $[0, +\infty[$.
2.b. Quelle est sa valeur en 0 ? sa valeur en 1, sa valeur en 2 ?
3.a. Justifier que, pour $\lambda \in [0, +\infty[$, la fonction $\theta \mapsto (\cos\theta)^{\lambda+1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et donner une formule pour sa dérivée.
3.b. Cette fonction est-elle en général de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?
4. Montrer que pour tout $\lambda \in [0, +\infty[$,
$$W_{\lambda+2} = \frac{\lambda+1}{\lambda+2} W_\lambda$$
5.a. Vérifier que pour $p \in \mathbb{N}$,
$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$$
5.b. Donner une formule pour W_{2p+1} lorsque p est un entier naturel.
6. Montrer que pour tout entier naturel n,
$$1 \leq \frac{W_{n+1}}{W_{n+2}} \leq \frac{W_n}{W_{n+2}} \leq \frac{n+2}{n+1}$$
et donner la limite de $\frac{W_{n+1}}{W_{n+2}}$ lorsque $n \to +\infty$.

subsubexo Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = (n+1) W_{n+1} W_n$$
est constante.
7.a. En déduire que $n(W_n)^2$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque $n \to +\infty$ et exhiber un équivalent simple de W_n lorsque $n \to +\infty$.
8. Pour un nombre réel λ, on note $\lfloor \lambda \rfloor$ sa partie entière, i.e le plus grand entier naturel inférieur ou égal à λ.
8.a. Montrer que
$$\frac{W_{\lfloor\lambda\rfloor+1}}{W_{\lfloor\lambda\rfloor}} \leq \frac{W_\lambda}{W_{\lfloor\lambda\rfloor}} \leq 1$$
8.b. En déduire un équivalent simple de W_λ lorsque $\lambda \to +\infty$.
9. On prouvera plus tard l'existence d'une constante $C \in]0 + \infty[$ telle que , lorsque $n \to +\infty$,
$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \ln C + o(1)$$
9.a. Déterminer la constante C.
9.b. Donner un équivalent de $n!$ lorsque $n \to +\infty$. (formule de STIRLING)