Corrections choisies 02

Révisions Probabilités

Correction Ex.–6

1. Appelons U_1, U_2 les résultats des deux tirages. Ce sont des variables uniformes sur $\{1,\dots,n\}$, uniformément distribuées. On a $X=\min(U_1,U_2)$, $Y=\min(U_1,U_2)$.

Si $(k,\ell)\in\{1,\dots,n\}$ alors

1. Si $k=\ell$, $\mathbb{P}((X,Y)=(k,k))=\mathbb{P}((U_1,U_2)=(k,k))\overset{\text{indep.}}{=}\mathbb{P}(U_1=k)\mathbb{P}(U_2=k)=\frac{1}{n^2}$,
2. Si $1\leq\ell<k\leq n$,
$$\mathbb{P}((X,Y)=(k,\ell))=\mathbb{P}(U_1=k,U_2=\ell)+\mathbb{P}(U_1=\ell,U_2=k)=\frac{2}{n^2}$$

2. On a en décomposant d'une part suivant les valeurs de Y, d'autre part suivant les valeurs de X (*i.e.* en utilisant les s.c.e.i $((Y=\ell),\ell=1\dots,n)$ et $((X=k),k=1\dots,n)$), Pour $k\in\{1,\dots,n\}$, (à ce moment ℓ est muette dans la somme) et pour $\ell\in\{1,\dots,n\}$ (et là, c'est k qui est muette)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k)&=\sum_{\ell=1}^{k}\mathbb{P}((X,Y)=(k,\ell))=\frac{2k-1}{n^2}\\ \mathbb{P}(Y=\ell)&=\sum_{k=\ell}^{n}\mathbb{P}((X,Y)=(k,\ell))=\frac{2(n-\ell+1)-1}{n^2}\end{aligned}$$

3. Z est à valeurs dans $\{0,\dots,n-1\}$. On a, pour ν dans cet ensemble, en décomposant à l'aide du s.c.e.i $((X=k),k=1\dots,n)$,

1. Si $\nu>0$,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=\nu)&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k\text{ et }Z=\nu)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k\text{ et }Y=k-\nu)\\ &=\sum_{k=\nu+1}^{n}\mathbb{P}(X=k\text{ et }Y=k-\nu)=2\frac{n-\nu}{n^2}\end{aligned}$$
2. Si $\nu=0$, $\mathbb{P}(Z=\nu)=\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k\text{ et }Y=k)=\frac{1}{n}$.

On a alors, par la formule de transfert

$$\mathbb{E}(Z)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu.\mathbb{P}(Z=\nu)=2.\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu.(n-\nu)$$

et donc, en utilisant sommes des premiers entiers et carrés d'entiers

$$\mathbb{E}(Z)=2\frac{1}{n^2}\left(n.\frac{(n-1).n}{2}-\frac{(n-1).n.(2n-1)}{6}\right)=\frac{n.(n-1)}{3n^2}(3n-(2n-1))=\frac{n^2-1}{3n}$$

Pour la variance, on a

$$\mathbb{E}(Z^2)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu^2.\mathbb{P}(Z=\nu)=2.\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^2.(n-\nu)$$

Pour finir le calcul, on peut soit développer et il faut alors utiliser une formule sur la somme des premiers cubes, soit (plus malin) remarquer que par changement d'indice $\nu'=n-\nu$, on a

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^2.(n-\nu)=\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^2.\nu$$

et donc, en sommant

$$2\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^2.(n-\nu)=\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu).\nu.(\nu+n-\nu))=n.\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu).\nu$$

et donc

$$\mathbb{E}(Z^2) = \frac{n}{2}.\mathbb{E}(Z) = \frac{n^2-1}{6}$$

et

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{n^2-1}{3}.\frac{n^2+2}{6n^2} = \frac{(n^2-1)(n^2+2)}{18.n^2}$$

Correction Ex.–7

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, par la formule de transfert pour X appliquée à la fonction $h : t \mapsto 1\!\!1_{\{t \leq x\}}$, du fait de la relation $\mathbb{E}(1\!\!1_A) = \mathbb{P}(A)$ valable pour tout événement A,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{E}(1\!\!1_{\{X \leq x\}}) = \sum_{k=1}^{K} 1\!\!1_{\{x_k \leq x\}})\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k:x_k \leq x} \mathbb{P}(X = x_k)$$

2. Si de plus, les valeurs prises par X sont *positives*, on peut les classer par ordre croissant, ajouter 0 au besoin pour obtenir X est à valeurs dans $\{x_0, \ldots, x_K\}$ avec $x_0 = 0 < x_1 < \ldots x_K$.

$$1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X > x) \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} 1\!\!1_{\{x_k > x\}})\mathbb{P}(X = x_k) & \text{si } x_K > x > 0 \\ 0 & \text{si } x \geq x_K \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\, dx = \int_0^{x_K} \mathbb{P}(X > x)\, dx = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{K} 1\!\!1_{\{x_k > x\}})\mathbb{P}(X = x_k)\, dx$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\, dx = \sum_{k=1}^{K} \left(\int_0^{x_K} 1\!\!1_{\{x_k > x\}})\, dx \right).\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{K} \left(\int_0^{x_k} dx \right).\mathbb{P}(X = x_k)$$

et finalement on a

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\, dx = \sum_{k=1}^{K} x_k.\mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{E}(X).$$

Cette formule montre que pour une v.a. positive, la connaissance de sa fonction de répartition permet le calcul direct de son espérance, sans utiliser la formule usuelle de l'espérance.

En vue du chapitre suivant, on remarque que cette formule permet l'extension *théorique* de la notion d'espérance aux v.a. réelles positives ne prenant pas nécessairement un nombre fini de valeurs. Par exemple, si U est une v.a. uniforme sur $[0,1]$, *i.e.* une v.a. dont la fonction de répartition est donnée par

$$\forall u \in \mathbb{R}, F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$$

alors (on a simplifié $1 - F_U(u)$ directement)

$$\mathbb{E}(U) = \int_0^1 u\, du \left(= \frac{1}{2} \right)$$

et, peut-être de façon plus parlante, si $\phi : [0,1] \to [a,b] \subset \mathbb{R}^+$ est une fonction strictement croissante, de classe $\mathscr{C}^1$, de réciproque $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, si $V = \phi(U)$, de fonction de répartition

$$\forall v \in \mathbb{R}, F_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v < a \\ \phi^{-1}(v) & \text{si } a \leq v \leq b \\ 1 & \text{si } v \geq b \end{cases}$$

On a alors

$$\mathbb{E}(\phi(U)) = \mathbb{E}(V) = \int_a^b (1 - \phi^{-1}(v))\, dv$$

et, en intégrant par parties, puis en changeant de variable $(v = \phi(u), u = \phi^{-1}(v))$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi(U)) &= \left[v.(1 - \phi^{-1}(v)) \right]_a^b + \int_a^b v.\left(\phi^{-1}\right)'(v)\, dv \\ &= \int_0^1 \phi(u)\, du \end{aligned}$$

Cette dernière formule est la formule usuelle et pratique pour l'espérance d'une fonction de U. C'est celle-là qui sera utilisée prioritairement et non pas la formule démontrée dans l'exercice, de fait *hors-programme*.

Correction Ex.–11 Un laboratoire a mis au point un test pour déceler des souris malades. Des essais prouvent que :

— 96 fois sur 100, le test donne un résultat positif quand la souris est effectivement malade.

— 94 fois sur 100, le test donne un résultat négatif quand la souris n'est pas malade.

1. On tire une souris au sort et on introduit des variables indicatrices : $M = 1$ si la souris malade, 0 sinon, $R = 1$ si résultat test positif, 0 sinon.

L'énoncé donne

$$\mathbb{P}(R = 1|M = 1) = 0.96, \mathbb{P}(R = 1|M = 0) = 0.06$$

et par ailleurs

$$\mathbb{P}(M = 1) = 0.03.$$

On cherche $\mathbb{P}(M = 1|R = 1)$.

On a, en décoposant sur le s.c.e.i $(M = 1), (M = 0)$ que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R = 1) &= \mathbb{P}(R = 1|M = 1)\mathbb{P}(M = 1) + \mathbb{P}(R = 1|M = 0)\mathbb{P}(M = 0) \\
&= \mathbb{P}(R = 1|M = 1)\mathbb{P}(M = 1) + \mathbb{P}(R = 1|M = 0)(1 - \mathbb{P}(M = 1)) \\
&= 0.96 \times 0.03 + 0.06 \times 0.97 \\
&= 0.03 + 0.06 - 0.04 \times 0.03 - 0.06 \times 0.03 = 0.1 - 0.0004
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M = 1 \text{ et } R = 1) &= \mathbb{P}(R = 1|M = 1)\mathbb{P}(M = 1) \\
&= 0.96 \times 0.03 = 0.03 - 0.0012 = 0.0288
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M = 1|R = 1) &= \frac{\mathbb{P}(M = 1 \text{ et } R = 1)}{\mathbb{P}(R = 1)} \\
&\simeq \frac{0.028}{0.1} = 0.28
\end{aligned}$$

Donc, la probabilité que la souris soit malade sachant que le test est positif de l'ordre du quart. Le test est pourri !

LLe point de ce calcul est de montrer que les taux de réussite mirifiques annoncés sont en fait ridicules.

2. La formule de BAYES est la version abstraite de ces calculs. On a, si M et R sont deux variables de BERNOULLI,

$$\mathbb{P}(M = 1|R = 1) = \frac{\mathbb{P}(M = 1)}{\mathbb{P}(R = 1|M = 1)\mathbb{P}(M = 1) + \mathbb{P}(R = 1|M = 0)(1 - \mathbb{P}(M = 1))}.\mathbb{P}(R = 1|M = 1)$$

Correction Ex.–12 On a, vu que X est à valeurs dans $\{x_1, \ldots, x_K\}$, que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{K} x_k.\mathbb{P}(X = x_k)$$

Pour chaque $k \in \{1, \ldots, K\}$, on peut décomposer, en utilisant le s.c.e.i $(B_n, n \in \{1, \ldots, N\})$

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X = x_K|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

et on obtient donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{K} x_k. \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X = x_K|B_n)\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N} x_k.\mathbb{P}(X = x_K|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

et, en intervertissant les deux sommes, il vient

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{K} x_k.\mathbb{P}(X = x_K|B_n) \right) \mathbb{P}(B_n)$$

ce qui se réécrit

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}(X|B_n).\mathbb{P}(B_n).$$

Correction Ex.–13

1. La loi conditionnelle de X sachant $U = 0$ est une binomiale $\mathscr{B}(n, p_0)$, la loi conditionnelle de X sachant $U = 1$ une binomiale $\mathscr{B}(n, p_1)$.

2. La v.a X est à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$ (on tire n boules et on compte le nombre de rouges). Pour $k\in\{0,\dots,n\}$, en décomposant suivant les valeurs de U, *i.e.* en utilisant le s.c.e.i. $(U=0)$, $(U=1)$, on a, par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X=k|U=0)\mathbb{P}(U=0)+\mathbb{P}(X=k|U=1)\mathbb{P}(U=1)$$

Or $\mathbb{P}(U=0)=\mathbb{P}(U=1)=\frac{1}{2}$ et les lois conditionnelles donnent

$$\mathbb{P}(X=k|U=0)=\binom{n}{k}p_0^k.(1-p_0)^{n-k} \text{ et } \mathbb{P}(X=k|U=1)=\binom{n}{k}p_1^k.(1-p_1)^{n-k}$$

On a donc

$$\forall k\in\{0,\dots,n\}\,,\,\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{2}.\binom{n}{k}p_0^k.(1-p_0)^{n-k}+\frac{1}{2}.\binom{n}{k}p_1^k.(1-p_1)^{n-k}$$

L'espérance est donnée par

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{n}k.\mathbb{P}(X=k)$$

et, en remplaçant $\mathbb{P}(X=k)$ dans cette formule par ce que nous venons d'obtenir, en y reconnaissant des espérances de binomiales, on obtient

$$\mathbb{E}(X)=n.\frac{p_0+p_1}{2}.$$

Correction Ex.–17 Le but est de démontrer les formules annoncées d'espérance et de variance pour la loi hypergéométrique. On conserve les notations du cours et notamment le fait que X_k est l'indicatrice d'un tirage de prune à l'étape $k(\le N)$ et que

$$S_k=X_1+\dots+X_k$$

indique le nombre de prunes obtenues à l'étape k. On rappelle que chaque S_k est à valeurs dans $\mathscr{S}=\{0,\dots,p.N\}$ et que pour un tel s, pour $1\le k\le N-1$

$$\mathbb{P}(X_{k+1}=1|S_k=s)=\frac{p.N-s}{N-k}$$

1.

1.a. Soit $1\le k\le N-1$ et $s\in\mathscr{S}=\{0,\dots,p.N\}$, sachant $S_k=s$, la loi de X_{k+1} est une BERNOULLI de paramètre $\frac{p.N-s}{N-k}$ car, dans le sac, il y a $N-k$ fruits dont $p.N-s$ sont des prunes. En appliquant la formule des probabilités totales avec le s.c.e.i $(S_k=s)$, $s\in\mathscr{S}=\{0,\dots,p.N\}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{k+1}=1) &= \sum_{s\in\mathscr{S}}\mathbb{P}(X_{k+1}=1|S_k=s)\mathbb{P}(S_k=s)\\
&= \sum_{s\in\mathscr{S}}\frac{p.N-s}{N-k}\mathbb{P}(S_k=s)\\
&= \frac{p.N}{N-k}\sum_{s\in\mathscr{S}}\mathbb{P}(S_k=s)-\frac{1}{N-k}\sum_{s\in\mathscr{S}}s\mathbb{P}(S_k=s)\\
&= \frac{p.N}{N-k}-\frac{1}{N-k}\mathbb{E}(S_k)
\end{aligned}$$

1.b. Montrons par récurrence (finie) que pour $k\le N$, H_k : X_k est une variable de BERNOULLI de paramètre p et que $\mathbb{E}(S_k)=k.p$.

— (Init.) X_1 est une variable de BERNOULLI de paramètre p (proportion de prunes dans le sac) et $S_1=X_1$, d'où $\mathbb{E}(S_1)=p$.

— (Hérédité.) Supposons que pour $k\le N-1$, H_k : X_k est une variable de BERNOULLI de paramètre p et que $\mathbb{E}(S_k)=k.p$. X_{k+1} est une v.a. de BERNOULLI (elle prend ses valeurs dans $\{0,1\}$, de paramètre

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{k+1}=1) &= \frac{p.N}{N-k}-\frac{1}{N-k}\mathbb{E}(S_k)\\
\text{(Hyp. rec. } H_k) &= \frac{p.N}{N-k}-\frac{1}{N-k}k.p\\
&= \frac{p.N-k.p}{N-k}=p
\end{aligned}$$

On a de plus

$$\mathbb{E}(S_{k+1})=\mathbb{E}(S_k)+\mathbb{E}(X_{k+1})=k.p+p=(k+1).p$$

La proposition H_{k+1} est donc vraie.

— (Ccl) Par récurrence finie, pour tout $k\in\{1,\dots,N\}$, X_k est une variable de BERNOULLI de paramètre p et $\mathbb{E}(S_k)=k.p$.

2.

2.a. On a, pour $1 \leq k \leq N-1$, par définition de S_{k+1}

$$S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$$

et, par la formule de variance d'une somme ($\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathbb{C}ov(X,Y)$)

$$\mathbb{V}(S_{k+1}) = \mathbb{V}(S_k) + \mathbb{V}(X_{k+1}) + 2\,\mathbb{C}ov(S_k, X_{k+1})$$

2.b. Soit $1 \leq k \leq N-1$ et $s \in \mathscr{S} = \{0, \ldots, p.N\}$, sachant $S_k = s$, la loi de X_{k+1} est une BERNOULLI de paramètre $\frac{p.N-s}{N-k}$. On a donc

$$\mathbb{E}(S_k.X_{k+1} | S_k = s) = s.\mathbb{E}(X_{k+1} | S_k = s) = s.\frac{p.N-s}{N-k}$$

En appliquant la formule de l'espérance totale (hors-programme, un exercice déjà fait) avec le s.c.e.i $(S_k = s), s \in \mathscr{S} = \{0, \ldots, p.N\}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_k.X_{k+1}) &= \sum_{s \in \mathscr{S}} \mathbb{E}(S_k.X_{k+1} | S_k = s)\mathbb{P}(S_k = s) \\
&= \sum_{s \in \mathscr{S}} s.\frac{p.N-s}{N-k}\mathbb{P}(S_k = s) \\
&= \frac{p.N}{N-k} \sum_{s \in \mathscr{S}} s.\mathbb{P}(S_k = s) - \frac{1}{N-k} \sum_{s \in \mathscr{S}} s^2 \mathbb{P}(S_k = s) \\
&= \frac{p.N}{N-k}\mathbb{E}(S_k) - \frac{1}{N-k}\mathbb{E}(S_k^2)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov(S_k, X_{k+1}) &= \mathbb{E}(S_k.X_{k+1}) - \mathbb{E}(S_k).\mathbb{E}(X_{k+1}) \\
&= \frac{p.N - p.(N-k)}{N-k}\mathbb{E}(S_k) - \frac{1}{N-k}\mathbb{E}(S_k^2) \\
&= \frac{1}{N-k}\mathbb{E}(S_k)^2 - \frac{1}{N-k}\mathbb{E}(S_k^2) \\
&= -\frac{1}{N-k}\mathbb{V}(S_k)
\end{aligned}$$

2.c. On veut montrer que pour $1 \leq k \leq N$,

$$H_k : \mathbb{V}(S_k) = \frac{N-k}{N-1}k.p(1-p)$$

— (Init.) Pour $k = 1$, $S_k = X_1$ et $\mathbb{V}(S_k) = p.(1-p) = \frac{N-k}{N-1}k.p(1-p)$.
— (Hérédité.) Supposons que pour $k \leq N-1$, $H_k : \mathbb{V}(S_k) = \frac{N-k}{N-1}k.p(1-p)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S_{k+1}) &= \mathbb{V}(S_k) + \underbrace{\mathbb{V}(X_{k+1})}_{p(p-1)} + 2\,\mathbb{C}ov(S_k, X_{k+1}) \\
\text{(Hyp. rec.)} &= \frac{N-k}{N-1}k.p(1-p) + p(1-p) - 2\frac{1}{N-k}\frac{N-k}{N-1}k.p(1-p) \\
&= p(1-p)\frac{1}{N-1}((N-k).k - 2k + N - 1) = p(1-p)\frac{1}{N-1}((N-(k+1)).(k+1))
\end{aligned}$$

La proposition H_{k+1} est donc vraie.
— (Ccl) Par récurrence finie, pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, H_k est vraie, *i.e.*

$$\mathbb{V}(S_k) = \frac{N-k}{N-1}k.p(1-p)$$

Correction Ex.–20
1. Préliminaire algèbrique. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.a. On a (faire le calcul !) $P^2 = I_3$ et donc P est inversible avec $P^{-1} = P$.
1.b. On a (faire un calcul organisé !) $A = P.D.P^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1.c. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc $A^k = P.D^k.P^{-1}$ où

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^k} \end{pmatrix}$$

En effectuant le calcul, on obtient

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^k} & 1-\frac{2}{2^k}+\frac{1}{3^k} \\ 0 & \frac{1}{2^k} & \frac{2}{2^k}-\frac{2}{3^k} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^k} \end{pmatrix}$$

2.

2.a. On a $A.U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Par ailleurs, lors du premier tirage, il est certain que l'urne contient toutes les boules et donc X_1 suit la loi uniforme sur $\{0,1,2\}$, *i.e.*

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A.U_0$$

2.b. Par la formule des probabilités totales, en conditionnant sur les valeurs de X_1, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2=0) &= \underbrace{\mathbb{P}(X_2=0|X_1=0)}_{=1}\mathbb{P}(X_1=0)+\underbrace{\mathbb{P}(X_2=0|X_1=1)}_{=\frac{1}{2}}\mathbb{P}(X_1=1)+\underbrace{\mathbb{P}(X_2=0|X_1=2)}_{=\frac{1}{3}}\mathbb{P}(X_1=2) \\
\mathbb{P}(X_2=1) &= \underbrace{\mathbb{P}(X_2=1|X_1=0)}_{=0}\mathbb{P}(X_1=0)+\underbrace{\mathbb{P}(X_2=1|X_1=1)}_{=\frac{1}{2}}\mathbb{P}(X_1=1)+\underbrace{\mathbb{P}(X_2=1|X_1=2)}_{=\frac{1}{3}}\mathbb{P}(X_1=2) \\
\mathbb{P}(X_2=2) &= \underbrace{\mathbb{P}(X_2=2|X_1=0)}_{=0}\mathbb{P}(X_1=0)+\underbrace{\mathbb{P}(X_2=2|X_1=1)}_{0}\mathbb{P}(X_1=1)+\underbrace{\mathbb{P}(X_2=2|X_1=2)}_{=\frac{1}{3}}\mathbb{P}(X_1=2)
\end{aligned}$$

Les probabilités conditionnelles utilisées sont dues aux règles du jeu : Si on tire la boule j à l'étape 1, pour l'étape 2, il ne reste plus que les $j+1$ boules numérotées 0,..,j et donc, par exemple

— $\mathbb{P}(X_2=2|X_1=1)=0$ car si la boule 1 a été tirée au tour 1, il n'est pas possible de tirer la boule 2 au tour 2
— $\mathbb{P}(X_2=1|X_1=1)=\frac{1}{2}$ car si la boule 1 a été tirée au tour 1, il reste deux boules dans l'urne pour le tour 2, portant les numéros 0 et 1.

On a donc $U_2 = A.U_1$ et (le calcul est un peu pénible).

$$\mathbb{P}(X_2=0)=\frac{11}{18}, \mathbb{P}(X_2=1)=\frac{5}{18}, \mathbb{P}(X_2=2)=\frac{1}{9}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_2) &= 1.\frac{5}{18}+2.\frac{1}{9}=\frac{1}{2} \\
\mathbb{E}(X_2^2) &= 1.\frac{5}{18}+4.\frac{1}{9}=\frac{13}{18} \\
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X_2^2)-\mathbb{E}(X_2)^2=\frac{13}{18}-\frac{1}{4}=\frac{17}{36}
\end{aligned}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$, par la formule des probabilités totales, en conditionnant sur les valeurs de X_k, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{k+1}=0) &= \mathbb{P}(X_{k+1}=0|X_k=0)\mathbb{P}(X_k=0)+\mathbb{P}(X_{k+1}=0|X_k=1)\mathbb{P}(X_k=1)+\mathbb{P}(X_{k+1}=0|X_k=2)\mathbb{P}(X_k=2) \\
\mathbb{P}(X_{k+1}=1) &= \mathbb{P}(X_{k+1}=1|X_k=0)\mathbb{P}(X_k=0)+\mathbb{P}(X_{k+1}=1|X_k=1)\mathbb{P}(X_k=1)+\mathbb{P}(X_{k+1}=1|X_k=2)\mathbb{P}(X_k=2) \\
\mathbb{P}(X_{k+1}=2) &= \mathbb{P}(X_{k+1}=2|X_k=0)\mathbb{P}(X_k=0)+\mathbb{P}(X_{k+1}=2|X_k=1)\mathbb{P}(X_k=1)+\mathbb{P}(X_{k+1}=2|X_k=2)\mathbb{P}(X_k=2)
\end{aligned}$$

Les valeurs des probabilités conditionnelles sont les mêmes que dans le cas $k=1$. En reformulant grâce au calcul matriciel, on a

$$U_{k+1} = A.U_k$$

Cette formule est aussi valable pour $k=0$.

4. La récurrence donnant la formule pour les suites géométriques donne que

$$\forall k \in \mathbb{N}, U_k = A^k.U_0$$

5. $A^k.U_0$ est la dernière colonne de la matrice A^k, on a donc, en identifiant

$$\mathbb{P}(X_k = 0) = 1 - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{3^k}, \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{2}{2^k} - \frac{2}{3^k} \text{ et } \mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{1}{3^k}$$

Il est alors clair (car $2^{-k}, 3^{-k} \overset{k\to+\infty}{\to} 0$) que

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X_k = 0) = 1, \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X_k = 1) = 0 \text{ et } \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X_k = 2) = 0$$