Lycée Pierre-Gilles de Gennes | **BCPST2**
Mathématiques | **2019-2020**

Révisions/Formulaire 03

Révisions Suites/Equations différentielles

Table des matières

1 Suites

1.1 Généralités

Dans le texte, on singularise les suites à valeurs réelles, qui sont notre objet d'intérêt le plus courant en la matière. Ces suites sont en un cas particulier des suites à valeurs dans un ensemble X quelconque. L'ensemble X peut être un intervalle I de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou une partie de $\mathbb{C}$, (cas des suites numériques), $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ (pour un certain $d \in \mathbb{N}^*$, cas des suites à valeurs vectorielles) ou tout autre ensemble. On parle par exemple de suites de fonctions (de type fixé), de suites de parties d'un ensemble donné, *etc.* ...

Définition 1. *Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles, resp. plus généralement à valeurs dans un ensemble X, est une* fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *resp.* $u : \mathbb{N} \to X$.

1. On adopte communément pour les suites la notation indicielle en lieu et place de la notation fonctionnelle standard, *i.e.*
$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = u_n$$
2. La locution/expression écrite « la suite u_n » est un abus à ne pas commettre en tant que débutant. L'objet u_n (quel n ?) est un des termes de la suite u, ce n'est pas toute la suite. Pour exprimer la même chose de façon communément acceptée, on parenthèse le terme : la suite (u_n) (sous entendu, n parcourant $\mathbb{N}$), qui est un allègement d'écriture de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Il s'agit du même abus lorsque l'on parle de la fonction $f(x)$ pour parler de la fonction f. La notation communément acceptée est $x \mapsto f(x)$ (ensembles de définition et d'arrivée sous-entendus) ou $x \in X \mapsto f(x) \in Y$ (ensembles de définition et d'arrivée explicites)
4. La lettre n apparaissant dans l'expression $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une variable « muette » de définition. Les expressions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ représentent le même objet et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ vu que le symbole $=$ marque l'identité de deux objets mathématiques.
5. Si u est une suite à valeurs dans X, l'ensemble des valeurs prises par u est
$$u(\mathbb{N}) = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subset X$$
Il faut comprendre que c'est un ensemble (sous-ensemble de X) et que, en passant à la notation avec $\{...\}$ on a perdu la numérotation des éléments ainsi que la possibilité de répétition. Par exemple, si $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a
$$u(\mathbb{N}) = \{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\} = \{-1, +1\}$$
Cet ensemble ne comporte que deux éléments, ce qui est au niveau quantité d'information nettement moindre que l'information contenue dans la suite u :
$$u = (+1, -1, +1, -1, +1, \dots)$$
6. On appelle aussi « suite »,
   — les suites finies, indicées par un ensemble fini (par exemple $u = (u_n)_{0\leq n\leq N}$ sur $\{0, \dots, N\}$ ou $u = (u_n)_{1\leq n\leq N}$ sur $\{1, \dots, N\}$), fonctions définie sur un ensemble fini,
   — les suites définies à partir d'un certain rang $u = (u_n)_{n\geq n_0}$, indicées par une partie de $\mathbb{N}$ du type $\{n_0, n_0 + 1, \dots, .\} \subset \mathbb{N}$, les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indicées par $\mathbb{Z}$, fonctions sur $\mathbb{Z}$, etc..
7. L'ensemble des suites indicées par $\mathbb{N}$, à valeurs réelles , resp. à valeurs dans X, est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, resp. $X^{\mathbb{N}}$.

Une suite u réelle ou à valeurs dans un ensemble X peut être définie pratiquement

1. Comme pour une fonction quelconque, par une formule « directe » donnant u_n en fonction de n, par exemple, $u = (n^2 + 3n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 3n + 1$$

   les 6 premiers termes de cette suite sont

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = -1, u_3 = 1, u_4 = 5, u_5 = 11$$

2. Comme pour une fonction quelconque, par une formule implicite, par exemple, après avoir démontré que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation

$$(E_n) : x^{n+2} - (n+2).x + 1 = 0, \text{ d'inconnue } x \in [0,1]$$

   admet une unique solution, on peut définir la suite u (à valeurs dans $[0,1]$) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \text{l'unique solution de } (E_n)$$

3. Par une formule de récurrence [1], ce qui est spécifique des suites et de la structure des entiers naturels :

   Théorème 2 (Existence et unicité de suites définies par récurrence)**.** *Si X est un ensemble, si $\phi : X \to X$ est une application, x_0 un point de X alors il existe une* unique *suite $u \in X^{\mathbb{N}}$ vérifiant*

$$u_0 = x_0 \textit{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \phi(u_n)$$

   (a) Par exemple, en posant $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = x^2 - 3x + 1$$

   il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 1$$

   les 5 premiers termes de cette suite sont

$$u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = 5, u_3 = 11, u_4 = 87,$$

   Ce n'est pas la suite précédemment définie par la formule $u_n = n^2 - 3n + 1$. On ne peut donc confondre la suite (réelle) définie directement par une formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$$

   avec une des suites (réelles aussi) définie par une récurrence

$$u_0 = x_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

   (b) Etant donné une suite définie par récurrence, en trouver une représentation sous forme de « formule directe de u_n en fonction de n » s'appelle « résoudre la récurrence ».

1. C'est l'essence même du principe de récurrence

(c) Ce théorème inclut aussi, par sa généralité [2], le cas d'une suite u uniquement définie par une récurrence du type ($(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite fixée à l'avance (à valeurs dans un ensemble Y)

$$u_0 = x_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \psi(u_n, v_n)$$

où $\psi : X \times Y \to X$.
On définit ainsi la suite des factorielles [3] $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$0! = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1).n!$$

ou la suite des sommes partielles d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(U_N)_{N\in\mathbb{N}}$ par

$$U_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + u_{n+1}$$

En d'autre notation, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$$

(d) Lorsque la fonction ϕ effectuant la récurrence n'est définie que sur une partie de $X_0 \subset X$, *i.e.* $\phi : X_0 \to X$, alors, partant de $x_0 \in X_0$, la formule de récurrence

$$u_0 = x_0 \text{ et } u_{n+1} = \phi(u_n)$$

ne définit pas forcément une suite complètement définie sur $\mathbb{N}$, elle définit *a priori* une suite finie $(u_0, u_1, \ldots, u_N)$ telle que $u_0, \ldots, u_{N-1} \in X_0$ et $u_N \in X \setminus X_0$. On arrête la récurrence dés que le terme courant u_n sort du domaine de définition de ϕ.
Par exemple, posons $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \phi(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$$

alors,

i. Partant de $x_0 = 1 \in \mathbb{R}^*$, on peut construire

$$u_0 = x_0,\, u_1 = \phi(u_0) = 0$$

mais pas u_2 car $\phi(u_1)$ n'est pas défini.

---

2. Il suffit de définir $\phi : \mathbb{N} \times X \to \mathbb{N} \times X$ par $\phi(n,x) = (n+1, \psi(x, v_n))$, pour obtenir l'existence d'une unique suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (e_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{N} \times X$ vérifiant

$$c_0 = (e_0, u_0) = (0, x_0) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = (e_{n+1}, u_{n+1}) = \psi(e_n, u_n) = (e_n + 1, \psi(u_n, v_{e_n}))$$

On vérifie, par récurrence que

$$u_0 = x_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, e_n = n \text{ et } u_{n+1} = \psi(u_n, v_n)$$

La suite $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite des entiers naturels (identité de $\mathbb{N}$) et la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite recherchée. Son unicité est garantie par l'unicité de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Est-ce que l'on peut la résoudre, si on ne considère pas le symbole ! comme un élément de formule par la formule directe

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}\, dt?$$

Hum, il vaut mieux considérer le symbole ! comme une fonction élémentaire sur les entiers.

ii. Partant de $x_0 = 1+\sqrt{2} \in \mathbb{R}^*$, on peut construire

$$u_0 = x_0,\, u_1 = \phi(u_0) = 1,\, u_2 = \phi(u_1) = 0$$

mais pas u_3 car $\phi(u_2)$ n'est pas défini.

iii. Partant de x_0 tel que $\phi(x_0) = 1+\sqrt{2} \in \mathbb{R}^*$ (qui existe car une étude simple montre que ϕ, par restriction définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$), on peut construire

$$u_0 = x_0,\, u_1 = \phi(u_0) = 1+\sqrt{2},\, u_2 = \phi(u_1) = 1,\, u_3 = \phi(u_2) = 0$$

mais pas u_4 ni les suivants...

1.2 Aspects spécifiques aux suites réelles

L'ensemble $\mathbb{R}$ possède un ordre (noté $\leq$) permettant de comparer deux nombres réels, on peut donc se poser des questions liées aux inégalités.

1.2.1 Monotonie

Par définition, si u est une suite à valeurs réelles, c'est une fonction $u : \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les définitions de fonctions croissante, décroissante, strictement croissante, strictement décroissante s'écrivent donc pour les suites par

Définition 3. *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

— *On dit que u est croissante si*

$$\forall n,m \in \mathbb{N},\, n \geq m \Rightarrow u_n \geq u_m$$

— *On dit que u est décroissante si*

$$\forall n,m \in \mathbb{N},\, n \geq m \Rightarrow u_n \leq u_m$$

— *On dit que u est strictement croissante si*

$$\forall n,m \in \mathbb{N},\, n > m \Rightarrow u_n > u_m$$

— *On dit que u est strictement décroissante si*

$$\forall n,m \in \mathbb{N},\, n > m \Rightarrow u_n < u_m$$

1. Si une suite est à la fois croissante et décroissante, elle est constante.
2. Si une suite est strictement croissante, elle est croissante (jouer avec la définition en séparant $n \geq m$ en deux cas $n > m$ et $m = n$ et en remarquant que si $u_n > u_m$ alors, *a fortiori* $u_n \geq u_m$).
3. Une suite ayant l'une de ces quatre qualités est dite *monotone*.
4. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ où f est une fonction de variable réelle « sympathique », par exemple définie sur $\mathbb{R}^+$, alors si f est croissante, u l'est aussi. On peut donc prouver la monotonie d'une suite en étudiant la monotonie de f via, p.ex. une étude de fonction (signe de la dérivée, etc..).

Le principe de récurrence permet l'utilisation de la proposition suivante pour s'assurer du caractère monotone d'une suite. Ce n'est pas la définition première de croissance/décroissance.

Proposition 4 (Monotonie d'un terme vers le suivant)**.** *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

— *u est croissante si*[4]

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$$

— *u est strictement croissante si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$$

— *Idem pour u décroissante, strictement décroissante en changeant les inégalités.*

Démonstration. On ne montre que la deuxième, l'important étant de comprendre le principe et l'intervention du principe de récurrence. On suppose que

$$C : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$$

et on doit en déduire que

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, m \geq n \Rightarrow u_m > u_n$$

Ceci se fait en deux temps, et c'est une bonne occasion de bien écrire une démonstration par récurrence.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, (H_p) : u_{n+p} > u_n$$

1. Initialisation : (H_1) se lit $u_{n+1} > u_n$ et (H_1) est donc vraie par hypothèse sur u, en utilisant l'hypothèse C avec « n à la place de n ».
2. Hérédité : Soit $p \geq 1$ tel que (H_p) est vraie. On a alors

$$u_{n+p} > u_n$$

et en utilisant l'hypothèse C avec « $n+p$ à la place de n », on obtient

$$u_{n+p+1} > u_{n+p}$$

et, par propriété fondamentale[5] de l'ordre, on a

$$u_{n+p+1} > u_n$$

Ceci est H_{p+1}.
3. Conclusion : on a donc démontré que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+p} > u_n$$

— On doit démontrer que

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow u_m > u_n$$

Soit $m,n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n$. En posant $p = m - n$, on a $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_m = u_{n+p}$ et comme, d'après le point précédent $u_{n+p} > u_n$, il vient $u_m > u_n$. Ce qui est ce que l'on veut.

$\square$

4. et seulement si, cette précision étant triviale
5. transitivité, vocabulaire hors-programme

1.2.2 Encadrements, bornitude

Définition 5. *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

— *Un nombre réel $M \in \mathbb{R}$ est dit* majorant *de u si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

Si M est un majorant de u, on dit aussi couramment que la constante M majore la suite u.

— *La suite u est dite majorée s'il y a au moins UN majorant de u. Si c'est le cas, l'ensemble des majorants de u est un intervalle de la forme $[M_0, +\infty[$. M_0 est le plus petit des majorants de u et on note*

$$M_0 = \sup u = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

— *Un nombre réel $m \in \mathbb{R}$ est dit* minorant *de u si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$$

Si m est un minorant de u, on dit aussi couramment que la constante m minore la suite u.

— *La suite u est dite minorée s'il y a au moins UN minorant de u. Si c'est le cas, l'ensemble des minorants de u est un intervalle de la forme $]-\infty, m_0]$. m_0 est le plus grand des minorants de u et on note*

$$m_0 = \inf u = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

— *La suite u est dite bornée si elle est minorée et majorée. Ceci équivaut à l'existence d'un intervalle $I = [m, M]$, $m, M \in \mathbb{R}$ fermé, borné tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$$

Autrement dit, $u(\mathbb{N}) \subset I$

1. Il faut faire attention au fait que majorant et minorant ne doivent pas dépendre de n, par exemple, ce n'est pas parce que
$$\forall n \in \mathbb{N}, 3n^2 + n \leq 4n^2$$
que la suite $u = (3n^2 + n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $4n^2$ (c'est qui n ?)
2. Il y a bien souvent des majorations/minorations faciles à obtenir, sur de simples petites remarques. Par exemple,
   (a) la suite $(1 - \frac{1}{n})$ (définie sur $\mathbb{N}^*$) est clairement majorée par 1 car, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ et donc
   $$1 - \frac{1}{n} \leq 1$$
   (b) la suite $(\cos(n\frac{\pi}{3}))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par -1 car c'est le cas pour la fonction cos sur $\mathbb{R}$,
   (c) $(\frac{1}{1+n^2})$ est majorée par 1, minorée par 0 car pour $n \geq 0$, $n^2 \geq 0$, $1 + n^2 \geq 1 > 0$ et donc, par inversion,
   $$0 < \frac{1}{1+n^2} \leq 1$$
3. A partir du moment où une suite est majorée, il y a une infinité de majorants.
4. La suite u est bornée si et seulement si la suite $|u| = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. (Noter que cette dernière suite est automatiquement minorée par 0.)

1.3 Limites

1.3.1 Limite finie

Définition 6. *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que u* converge vers ℓ*, ce que l'on note*

$$u \to \ell \text{ ou } u_n \overset{n\to+\infty}{\to} \ell$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

i.e. si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

1. C'est une des définitions en quantificateurs les plus élaborées du cours, **Elle est à connaitre**, notamment pour pouvoir l'appliquer lors de l'application de la méthode de l'équivalent ou de la méthode du $o()$ pour prouver des convergences de séries (Fin de l'année). Les définitions de limite finie en un point ou à l'infini pour les fonctions de variable réelle (dans le même esprit) sont à connaitre pour les applications similaires à la convergence d'intégrales généralisées.
2. Une suite u est dite *convergente* s'il existe ℓ tel que

$$u \to \ell$$

   La flèche « $\to$ » n'est pas une égalité « $=$ » même si en langage courant on dit que lorsque n est grand, u_n « vaut approximativement » ℓ, *i.e.* l'écriture de

   Si n est suffisamment grand alors $u_n \simeq \ell$

   n'est pas acceptable mathématiquement parlant, elle traduit trop imparfaitement l'idée de limite.
3. La définition s'étend, avec des modifications mineures aux suites définies à partir d'un certain rang, *i.e.* sur un ensemble du type $\{n_0, n_0+1, \ldots, .\} \subset \mathbb{N}$.
4. Exemples fondamentaux, suites de référence :
   (a) $\frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ et, plus généralement, si $\alpha > 0$, $\frac{1}{n^\alpha} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$,
   (b) Si $0 < q < 1$, $q^n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   (c) $\frac{1}{\ln n} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ et, plus généralement, si $\alpha > 0$, $\frac{1}{(\ln n)^\alpha} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$,
   (d) (Croissances comparées polynôme-exponentielle). Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, $n^\alpha.q^n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   (e) (Croissances comparées polynôme-log). Si $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   (f) (Croissances comparées bornée-limite nulle). Si $u \to 0$ et v est bornée alors $u_n.v_n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$.
5. (Gendarmes). Pour une suite u, un nombre réel ℓ, $u \to \ell$ équivaut à $|u - \ell| \to 0$ et, pour prouver ce dernier point, il suffit de disposer d'une suite (de référence typiquement) (r_n) de limite 0 telle que

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq r_n$$

6. Les trois propositions suivantes sont de bons exercices pour tester si on sait appliquer la définition avec ses quantificateurs.
   — Convergence et décalage/sélection d'indices.
   Proposition 7. *Soit u une suite réelle, $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $u \to \ell$ alors*

— $u_{n+1} \overset{n\to+\infty}{\to} \ell$, $u_{n-1} \overset{n\to+\infty}{\to} \ell$,
— $u_{2k+1} \overset{k\to+\infty}{\to} \ell$, $u_{2k} \overset{k\to+\infty}{\to} \ell$,

— Convergence et bornitude.
Proposition 8. *Une suite convergente est bornée.*
Proposition 9 (Passage des inégalités larges à la limite)**.** — *Si u est une suite bornée* $\boxed{\text{convergente}}$ *vers $\ell \in \mathbb{R}$, i.e. $u \to \ell$, minorée par m, majorée par M alors $m \leq \ell \leq M$*
— *Plus généralement, si $u_n \overset{n\to+\infty}{\to} a$, $v_n \overset{n\to+\infty}{\to} b \in \mathbb{R}$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$ alors $a \leq b$.*

7. Une des premières propositions suivant les énoncés de la définition et de ces propriétés élémentaires est la proposition d'unicité de la limite :

Proposition 10. *Soit u une suite réelle, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Si $u \to \ell$ et $u \to \ell'$ alors $\ell = \ell'$.*

Cette proposition permet de noter, pour une suite convergente u (et **seulement** pour une suite convergente), $\lim u$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n$ la limite ℓ de u. Par exemple, on ne peut écrire « $\lim_{n\to+\infty} \cos(n)$ » dans un calcul car on peut démontrer[6] que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

8. Que signifie « u n'a pas de limite » ?
— D'abord, pour $\ell \in \mathbb{R}$, que signifie « u n'a pas ℓ pour limite » ? Il suffit de nier logiquement la proposition de définition de limite, ce qui donne

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \geq n \text{ et } (u_m < \ell - \varepsilon \text{ ou } u_m > \ell + \varepsilon)$$

i.e.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \geq n \text{ et } |u_m - \ell| > \varepsilon$$

Ceci s'avère équivalent au fait qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une infinité d'indices $m \in \mathbb{N}$ tels que $|u_m - \ell| > \varepsilon_0$.
— « u n'a pas de limite » signifie donc que pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, « u n'a pas ℓ pour limite » et donc qu'il existe $\varepsilon_\ell > 0$ et un ensemble infini d'indices $M_\ell \subset \mathbb{N}$ tels que

$$\forall m \in M_\ell,\ |u_m - \ell| > \varepsilon_\ell$$

9. Les opérations algébriques sur les suites et leur effet sur les limites, sont en général bien comprises, on ne va pas les lister ici mais se reporter au cours de première année. On rappelle cependant un résultats (car on oublie toujours le problème de la division par zéro).

Proposition 11. *Soit u, v deux suites réelles, a, b deux nombres réels tels que $u \to a$, $v \to b$ et* $\boxed{b \neq 0}$. *Alors la suite u/v est définie à partir d'un certain rang[7] et*

$$\frac{u_n}{v_n} \overset{n\to+\infty}{\to} \frac{a}{b}$$

1.3.2 Limite infinie

Définition 12. *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,*
— *on dit que u* tend vers $+\infty$*, ce que l'on note*

$$u \to +\infty \text{ ou } u_n \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A \Rightarrow u_n \geq A$$

6. pas si facile, l'exemple $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est beaucoup plus simple

7. car le fait que $b \neq 0$ et la définition de limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}|b| > 0$ empêche l'annulation de v sur un ensemble d'indice du type $\{n_0, n_0+1, \ldots, .\} \subset \mathbb{N}$

— *on dit que u* tend vers $-\infty$, *ce que l'on note*

$$u \to -\infty \text{ ou } u_n \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

si

$$\forall A < 0, \exists n_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A \Rightarrow u_n \leq A$$

1. Dans l'un ou l'autre cas, on peut noter aussi $\lim u = +\infty$ ou $\lim u = -\infty$ en sachant que cette écriture n'est pas utilisable dans un calcul et ne peut donc servir qu'à l'énoncé d'un résultat intermédiaire.
2. Une suite tendant vers $+\infty$ n'est pas majorée. Une suite tendant vers $-\infty$ n'est pas minorée. Une suite tendant vers $\pm\infty$ ne peut donc être convergente [8].
3. Là encore, on ne va pas lister les résultats concernant les opérations et les suites convergentes et/ou ayant une limite infinie ici mais se reporter au cours de première année. On rappelle cependant le résultat liant convergence vers 0 et convergence vers $+\infty$.

   Proposition 13. *Soit u une suite réelle telle que*

   $$u \to 0 \text{ et } \exists n_0, \forall n \geq n_0,\ u_n > 0,$$

   ce que l'on note $u \to 0^+$, alors

   $$\frac{1}{u_n} \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

   Réciproquement, si $v \to +\infty$ alors $\frac{1}{v} \to 0^+$, la suite $\frac{1}{v}$ étant définie à partir d'un certain rang.
4. Exercice : Faire une liste de suites de référence de limite $+\infty$ issue de la liste des suite de référence de limite 0.
5. (Gendarmes à l'infini). Pour prouver qu'une suite u tend vers $+\infty$ il suffit de disposer d'une suite de référence [9] (r_n) de limite $+\infty$ telle que

   $$\exists n_0, \forall n \geq n_0, u_n \geq r_n$$

1.3.3 Limite des suites à valeurs complexes (HP)

La convergence des suites à valeurs complexes (ou à valeurs vectorielles) est *a priori* hors de notre programme [10]. Elle se ramène très directement à la convergence vers 0 des suites réelles positives. On a

Définition 14. *Soit u une suite à valeurs complexes, $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que u est convergente vers ℓ si*

$$|u_n - \ell| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

L'idée générale est d'appliquer à la suite réelle positive $(|u_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ des techniques de suites réelles (opérations, majorations) pour montrer qu'elle tend vers 0.

A titre d'exemples, montrons comment $+$, ., $/$ passent à la limite. Les résultats sont les mêmes que pour les suites réelles et permettent, par exemple, de déterminer des limites de fractions rationnelles par factorisation des termes dominants.

— Si $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a, b \in \mathbb{C}$ et $u \to a$, $v \to b$ alors $u + v \to a + b$.

---

8. *i.e.* converger vers une limite finie
9. On peut prendre $r_n = q^n$ avec $q > 1$ ou $r_n = n^\alpha$ avec $\alpha > 0$ qui sont les premières familles de suites de référence à considérer, il y en a d'autres avec des ln....
10. Mais, au besoin, l'auteur d'un problème n'hésite pas à la définir en introduction

Démonstration. Posons $w = u+v$, $c = a+b$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire,

$$0 \leq |w_n - c| \leq |u_n - a| + |v_n - b|$$

Or $|u_n - a| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, $|v_n - b| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, par somme de suites réelles, $|u_n - a| + |v_n - b| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ et par les gendarmes, $|w_n - c| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, *i.e.* $w \to c$. □

— Si $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a, b \in \mathbb{C}$ et $u \to a$, $v \to b$ alors $u.v \to a.b$.

Démonstration. Posons $w = u.v$, $c = a.b$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire, en écrivant d'abord

$$w_n - c = u_n.v_n - a.b = (u_n - a).(v_n - b) + a.(v_n - b) + (u_n - a).b,$$
$$0 \leq |w_n - c| \leq |u_n - a|.|v_n - b| + |a|.|v_n - b| + |u_n - a|.|b|$$

Or $|u_n - a| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, $|v_n - b| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, par sommes et produits de suites réelles,

$$|u_n - a|.|v_n - b| + |a|.|v_n - b| + |u_n - a|.|b| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et par les gendarmes, $|w_n - c| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, *i.e.* $w \to c$. □

— Si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{C}$ $\boxed{a \neq 0}$ et $u \to a$ alors $\frac{1}{u} \to \frac{1}{a}$.

Démonstration. Il y a le problème de la bonne définition (à partir d'un certain rang) de $\frac{1}{u}$ à régler en premier. On a, par l'inégalité triangulaire, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \geq |a| - |u_n - a|$$

Comme $|a| > 0$ car $a \neq 0$ et $|u_n - a| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors, en appliquant la définition de limite à cette suite et $\varepsilon = \frac{1}{2}|a| > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - a| \leq \frac{1}{2}|a|$$

et donc, par l'inégalité précédente,

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n| \geq \frac{1}{2}|a| > 0$$

La suite u ne s'annule jamais à partir du rang n_0 et la suite $\frac{1}{u}$ est bien définie à partir de ce rang. Passons maintenant au problème de la limite. On a, pour n quelconque, $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|.|u_n|}|u_n - a| \leq \frac{2}{|a|^2}|u_n - a|$$

Or $|u_n - a| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ et par les gendarmes, $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{a}| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, *i.e.* $\frac{1}{u} \to \frac{1}{a}$. □

— Si $q \in \mathbb{C}$ alors
  — Si $|q| < 1$, $q^n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ au sens complexe.
  — Si $|q| > 1$, $|q^n| \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et, au sens complexe, la suite (q^n) n'a pas de limite.
  — Si $|q| = 1$, alors excepté lorsque $q = 1$, la suite (q^n) n'a pas de limite au sens complexe.

— Exercice : Déterminer, par opérations, la limite de $u_n = \frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.i)^n - (2+i)n^2}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.i)^n + (3+i)n^2}$

— Exercice : Déterminer, par opérations, la limite de $u_n = \frac{(2+3.i)^n - (2+i)n^2}{(2+3.i)^n + (3+i)n^2}$

1.4 Limite monotone et avatars

Le problème crucial de l'analyse du comportement asymptotique d'une suite u est déterminer si une suite (u ou des suites liées) est convergente.

- A l'aide des techniques opératoires (limites de sommes, produits, etc...) ou des gendarmes, on peut trouver une limite exacte ou démontrer qu'un nombre **connu** est limite.
- Une technique d'une autre nature est la suivante :
  - On démontre que la suite est convergente (vers une limite que l'on ne connait pas) mais que l'on nomme ℓ. A partir de ce point, écrire $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ a un sens.
  - On cherche ensuite le maximum d'informations sur ℓ afin de le déterminer ou, au moins de mieux le cerner.

Le théorème suivant et le théorème des suites adjacentes relèvent du deuxième point :

Théorème 15 (Limite monotone)**.** *Soit u une suite réelle,* croissante [11].

- *Si u est majorée, elle converge.*
- *Si u n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.*

1.5 Suites récurrentes classiques

Etant donnée une suite réelle u définie par une récurrence à un cran du type

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \psi(n, u_n) \text{ où } \psi : \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ou une récurrence d'ordre p (p entier naturel > 0 fixé) du type

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+p} = \psi(n, u_n, \ldots, u_{n+p-1}) \text{ où } \psi : \mathbb{N}\times\mathbb{R}^p \to \mathbb{R},$$

on peut chercher à *résoudre* explicitement cette récurrence, c'est à dire trouver une formule « directe » donnant u_n en fonction de n (et de $u_0, \ldots, u_{p-1}$), à l'aide des opérations/fonctions élémentaires (*i.e.* sommes, produits, quotient, puissance, factorielle, exponentielles, logarihtme, *etc.* ..)

C'est une opération réalisable intégralement dans un nombre très limité de cas. Ces cas particuliers sont à connaitre car ils servent de point d'appui lors de l'étude (quantitative ou qualitative) de cas difficilement (voire non-) résolubles.

1.5.1 Suites arithmétiques et sommes

Définition 16. *Une suite réelle u est dite arithmétique de raison r ($r \in \mathbb{R}$) si elle vérifie la récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + r$$

Proposition 17 (Résolution des suites arithmétiques)**.** *Une suite réelle u est arithmétique (de raison $r \in \mathbb{R}$) si et seulement si :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = u_0 + r.n$$

Une suite arithmétique est donc fonction affine de l'indice n. C'est la somme d'une constante et de la suite des sommes partielles de la suite constante valant r.

11. à partir d'un certain rang

Proposition 18 (Résolution de sommes partielles de suites arithmétiques)**.** *Soit u une suite arithmétique de raison r et U la suite définie par la récurrence*

$$U_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + u_{n+1}$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r.\frac{n.(n+1)}{2}$$

On reconnait là l'expression de la somme des n premiers entiers naturels.

Exercice 1.—Montrer qu'une suite u est arithmétique si et seulement si la suite $v = (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.

1.5.2 Suites géométriques et sommes

Définition 19. *Une suite réelle u est dite géométrique de raison q ($q \in \mathbb{R}$) si elle vérifie la récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q.u_n$$

Proposition 20 (Résolution des suites géométriques)**.** *Une suite réelle u est géométrique (de raison $q \in \mathbb{R}$) si et seulement si :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0.q^n$$

Une suite géométrique de raison $q > 0$ est donc fonction exponentielle de l'indice n : $u_n = u_0.\exp(n.\ln q)$.

Proposition 21 (Résolution de sommes partielles de suites géométriques)**.** *Soit u une suite géométrique de raison q, $\boxed{q \neq 1}$ et U la suite définie par la récurrence*

$$U_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + u_{n+1}$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0.\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

La suite des sommes partielles d'une suite géométrique (de raison $q \neq 1$) est la somme d'une suite géométrique de même raison et d'une suite constante.

Exercice 2.—Soit u une suite réelle à termes $\neq 0$. Montrer que u est géométrique si et seulement si la suite $v = (u_{n+2}.u_n - u_{n+1}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.

Exercice 3.—Soit u une suite géométrique de raison q. On définit la suite $\Pi = (\Pi_n)$ des produits partiels de u par la récurrence :

$$\Pi_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \Pi_{n+1} = u_{n+1}.\Pi_n$$

1. Résoudre cette récurrence.
2. Discuter de la limite éventuelle de Π.

Exercice 4.—Soit $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ et V la suite définie par

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} k.q^{k-1}$$

1. « Résoudre » V par l'une des méthodes suivantes

1. Considérer V comme fonction de q et reconnaitre une dérivée.
2. Remarquer que $(q-1).q^{k-1} = q^k - q^{k-1}$ et calculer $(q-1).V_n$ grâce à un décalage d'indice dans une somme.

2. Discuter de la limite éventuelle de V.

1.5.3 Suites arithmético-géométriques et sommes

Définition 22. *Une suite réelle u est dite arithmético-géométrique de raisons q et r ($q, r \in \mathbb{R}$) si elle vérifie la récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q.u_n + r$$

Proposition 23 (Résolution des suites géométriques)**.** *Si suite réelle u est arithmético-géométrique (de raisons $q, r \in \mathbb{R}$) et* $\boxed{q \neq 1}$ *alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0 - \alpha).q^n + \alpha$$

où α est le point fixe [12] *de la récurrence définissant u.*

Exercice 5.—Prouver la proposition de résolution par les deux méthodes (qui disent des choses différentes) :

1. Constater que $v = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et calculer les sommes partielles de v.
2. Constater que $w = (u_n - \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et conclure.

Exercice 6.—Soit u une suite arithmético-géométrique (on suppose $q \neq 1$), résoudre la suite des sommes partielles U définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Exercice 7.—Soit $q \neq 1$, $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$ et u une suite vérifiant la récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q.u_n + r_1.n + r_0$$

Résoudre cette récurrence par l'une des deux méthodes :

1. Constater que $v = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique et calculer les sommes partielles de v.
2. Trouver une suite arithmétique α vérifiant la récurrence de u et telle que $w = (u_n - \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et conclure.

Exercice 8.— On considère $m > 0$, $0 < r < 1$ et la suite (C_n) définie par la récurrence

$$C_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = (1+r)C_n - m$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner une relation entre m et r garantissant que $C_N = 0$.

Une application dans la vie courante de ce calcul dans la vie courante est la détermination de la mensualité (m) de remboursement d'un prêt lorsque l'on contracte un emprunt (montant C_0) sur N mois au taux r.

12. *i.e.* vérifie $\alpha = q.\alpha + r$.

Exercice 9.— Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n fois une boule avec remise. Soit P_n la probabilité pour que le nombre de boules rouges soit pair dans n tirages avec remise (comptant 0 comme nombre pair). Montrer que

$$P_n = \frac{b-r}{b+r}P_{n-1} + \frac{r}{b+r}$$

En déduire que $P_n = \frac{1}{2}(1+(\frac{b-r}{b+r})^n)$ pour $n \geq 0$.

1.5.4 Suites récurrentes linéaires réelles d'ordre 2

Définition 24. *Une suite réelle u est dite solution d'une récurrence linéaire d'ordre* 2*, homogène, à coefficients constants si il existe a, b* $\in \mathbb{R}$ *et si elle vérifie la récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$$

La remarque fondamentale à la base de la résolution est la suivante : Une suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la récurrence à deux crans précédente si et seulement si sa raison q vérifie l'*équation caractéristique de la récurrence linéaire* :

$$q^2 = a.q + b$$

de discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.

Proposition 25 (Résolution d'une RL2H réelle.)**.** *Soient a, b* $\in \mathbb{R}$*. Une suite réelle u vérifie la récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$$

si et seulement si il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *telle que*

$$u = \lambda.v + \mu.w$$

où les suites v et w sont définies, suivant le signe du discriminant $\Delta = a^2 + 4b$*, par*

1. *Si* $\Delta > 0$*,* $v = (q_-^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $w = (q_+^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *où* q_-, q_+ *sont les deux solutions réelles (distinctes) de l'équation caractéristique.*
2. *Si* $\Delta < 0$*,* $v = (r^n.\cos(n.\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $w = (r^n.\sin(n.\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $q_- = r.e^{-i.\theta}, q_+ = r.e^{+i.\theta}$, $(r > 0, \theta \in \mathbb{R})$ *sont les deux solutions complexes (distinctes et conjuguées) de l'équation caractéristique.*
3. *Si* $\Delta = 0$*,* $v = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $w = (n.q^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ *où q est la solution* [13] *(double) de l'équation caractéristique.*

Les constantes λ*,* μ *se déterminent, de manière unique, en fonction de* u_0 *et* u_1 *en résolvant le système linéaire, de déterminant* $v_0.w_1 - v_1.w_0$ *non nul,*

$$u_0 = \lambda.v_0 + \mu.w_0,\ u_1 = \lambda.v_1 + \mu.w_1$$

Exercice 10.—Reprendre les exercices de première année concernant les résolutions de telles récurrences avec des constantes a et b explicites.

Exercice 11.—Comment calculer la suite des sommes partielles d'une suite u solution d'une RLH2 ? On disinguera suivant les trois cas $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ et $\Delta = 0$.

13. Cette présentation, valable aussi pour $q = 0$, sous-entend que lorsque $q = 0$, $q^0 = 1$ et $0.q^{-1} = 0$

Exercice 12.—En trouvant trois suites géométriques de raisons distinctes vérifiant la récurrence d'ordre 3

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n,$$

donner une expression pour la suite u vérifiant cette récurrence et vérifiant de plus $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et $u_2 = 14$.

Exercice 13.—Soit u la suite réelle vérifiant

$$u_0 = 4, u_1 = 7\,, \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 4$$

On trouvera une constante α point fixe de cette récurrence et vérifiera que $v = u - \alpha$ vérifie une RLH2.

Exercice 14.— Soit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $0 < u_0, u_1 < 1$ et pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n$$

1. Donner le terme général de (u_n) puis montrer que la suite converge vers un certain réel $\ell \in [0,1]$.

Soit une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $0 < v_0, v_1 < 1$ et pour tout $n \geq 0$,

$$v_{n+2} = \frac{2}{3}v_{n+1}^2 + \frac{1}{3}v_n^2$$

On pose $a = \max(v_0, v_1)$.

2. Montrer que pour $n \geq 0$, $v_n \leq a$.

3. Montrer que pour $n \geq 0$, $0 < v_{2n+1} \leq a^{n+1}$ et $0 < v_{2n} \leq a^{n+1}$.

4. Convergence de (v_n) ?

1.5.5 Suites géométriques vectorielles

La récurrence décrite ci-après intervient dans de multiples problèmes.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$ définie par

$$X_0 \text{ donné dans } \mathbb{R}^d \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\, X_{n+1} = A.X_n$$

Cette récurrence se résout, comme pour les suites géométriques numériques, en

$$\forall n \in \mathbb{N},\, X_n = A^n.X_0$$

La difficulté provient de calculer effectivement une puissance n-ième de matrice carrée. On apprendra à le faire dans le chapitre **Diagonalisation**.

Exercice 15.—On considère trois suites réelles u,v, w satisfaisant le système de récurrences

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrrr} u_{n+1} & = & u_n & +v_n & +w_n \\ v_{n+1} & = & & +v_n & +w_n \\ w_{n+1} & = & & & +w_n \end{array} \right.$$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et en réécrivant sous forme matricielle la relation de récurrence, déterminer une expression de X_n en fonction de n et X_0, puis une expression de u_n, v_n, w_n en fonction de n et u_0, v_0, w_0.

Indication:On remarquera, pour calculer A^n que $A = I_3 + N$ où $N^3 = 0$.

Exercice 16.— On considère une suite réelle u vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

1. En posant $X = (\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix})_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{N}}$, déterminer une récurrence géométrique satisfaite par X, de raison matricielle A.

2. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, vérifier que la matrice P est inversible et que $P^{-1}.A.P$ est diagonale.

3. En déduire que $u = (u_n)$ s'écrit

$$(u_n) = (\lambda + \mu.2^n + \nu.3^n)$$

pour trois constantes $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ déterminables en fonctions de u_0, u_1, u_2.

Exercice 17.— On considère une suite réelle u vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+3} = \frac{11}{6}u_{n+2} - u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n.$$

1. En posant $X = (\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix})_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{N}}$, déterminer une récurrence géométrique satisfaite par X, de raison matricielle A.

2. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$, vérifier que la matrice P est inversible et que $P^{-1}.A.P$ est diagonale.

3. En déduire que $u = (u_n)$ s'écrit

$$(u_n) = (\lambda + \mu.2^{-n} + \nu.3^{-n})$$

pour trois constantes $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ déterminables en fonctions de u_0, u_1, u_2 et donner la limite de (u_n) en fonction de u_0, u_1, u_2.

1.6 Eléments d'étude des suites récurrentes réelles

Les éléments d'étude d'une suite récurrente réelle présentés ci-après ne sont pas à proprement parler au programme : on ne peut vous demander d'inventer l'intégralité de la progression présentée. En revanche, tous les éléments de cette progression sont au programme et nombreux sont les exercices d'écrit ou d'oral où la succession des questions n'est que la traduction d'une méthodologie.

On s'intéresse donc à des suites u, à valeurs réelles, définies par une relation de récurrence donné par une fonction, en général explicite, $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}$. Le premier terme u_0 n'est que rarement explicitement donné et, souvent le but est de discuter du comportement asymptotique en fonction de la position du premier terme u_0 dans le domaine D.

Voici, en une liste relativement ordonnée, les éléments classiques de l'étude.

1. Bonne définition et intervalles stables.
   (a) La première difficulté est celle de la bonne définition, due au fait que, de prime abord, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de f sont distincts. Le théorème 2 (au programme !) ne s'applique pas directement et il faut éviter l'écueil signalé à la remarque 3d dudit théorème.

(b) On étudie (dérivée, dérivée de la dérivée, etc...jusqu'à obtention du tableau de variation) la fonction f et sa cousine g définie par $g(x) = f(x) - x$ afin de déterminer des intervalles (ou partie de $\mathbb{R}$) I stable par f, *i.e.*

$$I \text{ stable pour } f \Leftrightarrow f(I) \subset I$$

De la sorte, en appliquant le théorème 2, à la restriction $f_{|I} : I \to I$ de f, on obtient, si $u_0 \in I$, l'unicité et la bonne définition de la suite u ainsi que le fait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$$

Dans la suite, on ne travaille que sur des intervalles stables habilement choisis, ce qui provoque une distinction de cas.

L'étude de la fonction g peut aussi aider à déterminer des intervalles intéressants : les points d'annulation de g sont les points fixes de f, et ce peut être habile de prendre des intervalles stables dont une extrémité est un point fixe de f.

2. Illustration graphique (manuelle ou informatique). On trace une belle esquisse du graphe de f, (dans un repère orthonormé !), en marquant bien intervalles stables et possibilité de points fixes ainsi que la construction graphique de la suite u. Sur le modèle présenté en figure 1

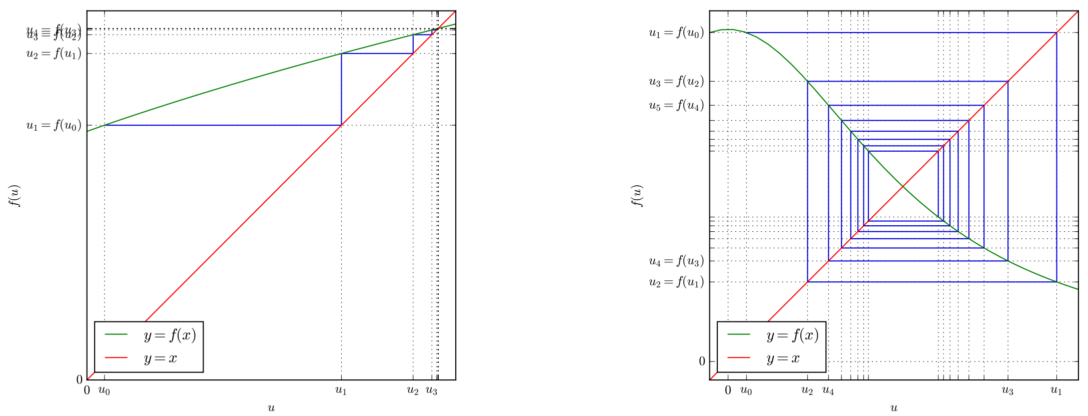

FIGURE 1 – Graphiques en escalier (f croissante sur intervalle stable) et en escargot (f décroissante sur intervalle stable).

3. Points fixes. Les points fixes de f jouent un grand rôle car

(a) Si ℓ est point fixe de f et si à un (indice) instant n_0, $u_{n_0} = \ell$, alors

$$\forall n \geq n_0, u_n = \ell$$

(b) Ce sont essentiellement les limites possibles de la suite. En effet, si u converge vers ℓ et f est continue en ℓ alors

$$u_{n+1} \overset{n \to +\infty}{\to} \ell \text{ et } f(u_n) \overset{n \to +\infty}{\to} f(\ell)$$

Comme on a égalité de ces deux suites, par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$. Si u_0 est dans un intervalle I stable par f, la limite possible est dans l'adhérence [14] $\bar{I}$ de I. Ce raisonnement peut s'appliquer pour démontrer une non-convergence [15] de u.

14. L'intervalle I où on a fermé les extrémités finies
15. Si u convergeait alors ce serait forcément vers telle ou telle limite mais aucune d'entre elles n'est possible.

4. Croissance de f et monotonie de u (graphiques en escalier). Il reste donc, pour appliquer le point précédent à prouver la convergence de u ce qui s'effectue souvent via le théorème de limite monotone. Pour démontrer la monotonie de u, deux voies sont possibles.
   (a) On travaille sur un intervalle I stable par f sur lequel g ($g(x) = f(x) - x$) garde un signe constant : la suite u est monotone car
   $$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \in I \text{ et } u_{n+1} - u_n = g(u_n) \text{ est du signe de } g \text{ sur } I$$
   (b) La fonction f est croissante sur l'intervalle stable I, par récurrence, à rédiger systématiquement, on démontre que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - u_n \text{ est du même signe que } u_1 - u_0$$
5. Décroissance de f (graphique en escargot). Si f est décroissante sur l'intervalle stable I, on a probablement affaire à un graphique en « escargot ». On étudie et prouve la monotonie des suites extraites portant respectivement les indices pairs et impairs, $v = (u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $w = (u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Les suites v et w satisfont toutes deux la récurrence associée à la fonction $f \circ f$, pour laquelle I est un intervalle stable. $f \circ f$ est croissante sur I. On a $w = f(v)$ et $(v_{k+1}) = (f(w_k))$. Sous réserve de continuité ad-hoc de f, si v et w convergent respectivement vers a et b alors a et b sont points fixes de $f \circ f$ dans $\bar{I}$ et on a $a = f(b)$ et $b = f(a)$. On se sert de ces informations pour conclure. On peut remarquer qu'en général un point fixe de f est point fixe de $f \circ f$, ce qui permet de limiter [16] les recherches.

   Si on arrive à montrer que v et w convergent respectivement vers a et b avec $a \neq b$, alors u ne converge pas mais on dit qu'elle admet un 2-cycle limite [17]. (Asymptotiquement, elle oscille entre 2 points distincts.)
6. Points fixes attractifs, répulsifs et neutres, utilisation du TAF. Il y a une zoologie des points fixes à laquelle vous pouvez être exposé en introduction dans un problème. On suppose que ℓ est point fixe de f et que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle stable I de travail.
   (a) ℓ est dit attractif si $|f'(\ell)| < 1$,
   (b) ℓ est dit répulsif si $|f'(\ell)| > 1$,
   (c) ℓ est dit neutre si $|f'(\ell)| = 1$,

   Cette classification est liée aux résultats suivants (qu'on vous fera redémontrer via le théorème des accroissements finis et par récurrence sur plusieurs questions.)
   (a) Si ℓ est attractif alors il existe un intervalle ouvert $I' \subset I$ contenant ℓ, stable par f et une constante k, $0 \leq |f'(\ell)| < k < 1$ tels que
   $$\forall x, y \in I',\, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$
   Si $u_0 \in I'$, alors
   $$\forall n \in \mathbb{N},\, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$
   En d'autres termes, si la suite u « tombe » à un instant n_0 dans l'intervalle I', elle y reste ensuite et converge [18] vers ℓ.
   (b) Si ℓ est répulsif alors il existe un intervalle ouvert $I' \subset I$ contenant ℓ, une constante k, $|f'(\ell)| > k > 1$, tels que
   $$\forall x, y \in I',\, |f(x) - f(y)| \geq k|x - y|$$

16. Pour résoudre une équation, typiquement polynômiale de degré > 2, connaitre des solutions est un atout.
17. Vocabulaire totalement hors-programme
18. d'où l'attraction

On démontre [19] alors, que si u converge vers ℓ, c'est qu'à partir d'un certain indice n_0, la suite u est constamment [20] égale à ℓ.

(c) Si ℓ est neutre, on ne sait pas *a priori* ce qui se passe [21].

7. Autres.

(a) En cas de convergence de u vers une limite ℓ (ou $\pm\infty$), on s'intéresse à la vitesse de convergence (ou de divergence), c'est à dire qu'on cherche un équivalent ou une estimation en termes de suite de référence de $|u_n - \ell|$ (ou de u_n ou de $\frac{1}{u_n}$).

(b) Il y a bien d'autres comportements asymptotiques que la convergence de la suite. Ce sont en général des questions difficiles avec les pauvres outils dont nous disposons.

Exercice 18.—Une suite récurrente intervenant dans des problèmes probabilistes de reproduction.

Soit $x_0, p \in]0,1[$, $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence

$$u_0 = x_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = (1 - p + p.u_n)^d$$

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - p + p.x)^d$.

1. Etudier f (tableau de variations) sur l'intervalle $I = [0,1]$ et en déduire que la suite u est bien définie, à valeurs dans I.

2. Montrer que la suite u est monotone, convergente.

3. Etudier g définie par $g(x) = f(x) - x$ sur I et déterminer, suivant les cas (on devra être naturellement amené à distinguer $d.p \leq 1$ et $d.p > 1$), le nombre de points fixes de f dans l'intervalle I.

4. Discuter suivant les cas de la valeur de la limite de u.

Exercice 19.-$\star$- Une formule de François VIETE [22] stipule que

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}} = 2$$

Le but de l'exercice est d'élucider, de manière contemporaine cette égalité et revoir au passage quelques fondamentaux sur les suites récurrentes.

On pose, pour $x \in I = [0,+\infty[$, $\alpha > 0$,

$$f_\alpha(x) = \sqrt{\alpha + x}$$

On fixe un nombre $u_0 \in I$ et on considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_\alpha(u_n) = \sqrt{\alpha + u_n}$$

1. Pour $\alpha = 2$, $u_0 \geq 0$ quelconque, écrire quelques premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quelle signification donner à l'égalité de VIETE, que signifient les ... ? Naïvement, en supposant que l'expression de gauche définit un nombre ℓ, expliquer pourquoi $\ell^2 = 2 + \ell$ et conclure comme VIETE aurait pu le faire.

Le problème est de montrer que l'expression de gauche définit un nombre, c'est un problème d'*existence* de limite, concept fixé dans sa forme actuelle au XIX^e siècle.

On fixe $\alpha > 0$ quelconque pour toute la suite.

---

19. ce n'est pas si facile : si u converge vers ℓ, alors pour un certain n_0, on a $\forall n \geq n_0, u_n \in I'$ et donc, par récurrence,

$$\forall n \geq n_0,\, |u_{n+1} - \ell| \geq k|u_n - \ell| \geq k.k^{n-n_0}|u_{n_0} - \ell|,$$

ce qui force l'absurdité $|u_n - \ell| \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ si $u_{n_0} \neq \ell$.

20. d'où la répulsion : on ne peut converger vers ℓ sauf à tomber « pile » sur ℓ à un instant donné.

21. et donc ça devient intéressant

22. (1540–1603), un des inventeurs de la notation symbolique et du calcul littéral, auteur des *Zététiques*

2. Montrer que $f_\alpha(I) \subset I$, en déduire que la suite u est bien définie, à valeurs dans I. Faire la représentation graphique standard montrant la construction de la suite u.
3. Etudier la fonction f_α. Etudier le signe de $f_\alpha(x) - x$ suivant les valeurs de x.
4. En déduire que u est monotone et discuter de son sens de variation suivant la valeur de u_0.
5. Montrer que, quelle que soit la valeur de $u_0 \in I$, la suite u converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 20.-⋆- Le but de cet exercice est de montrer quelques techniques d'étude standards de suites récurrentes lorsque la fonction de récurrence est décroissante.

Pour $\lambda > 0$, on définit f_λ par

$$\forall x \in [0, +\infty[\,, f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{1+x^2}$$

et, pour $u_0 > 0$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$$

Partie A
Intervalle stable, deux sous-suites.

A.1.a. Construire le tableau de variations de f_λ. La fonction f_λ est-elle monotone sur $[0, +\infty[$?
A.1.b. En déduire avec le minimum de calculs le tableau de variations de $g_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda$. La fonction g_λ est-elle monotone sur $[0, +\infty[$?
A.2.a. Montrer que $u_0 \in [0, +\infty[$ étant donné, la suite u est bien définie.
A.2.b. Faire la représentation graphique standard de la construction de la suite u : u est elle monotone ?
A.2.c. On définit les suites v et w par

$$\forall k \in \mathbb{N}, v_k = u_{2k}, w_k = u_{2k+1}$$

2.c.i. Montrer que v et w vérifient une relation de récurrence faisant intervenir la fonction g_λ.
2.c.ii. Montrer que v et w sont monotones (sans chercher à spécifier le sens exact de variation)
2.c.iii. Montrer que v et w sont bornées et conclure quant à leur convergence.

Partie B
Calculs de points fixes.

B.1. Montrer que

$$\forall x \in [0, +\infty[\,, (f_\lambda(x) = x) \Leftrightarrow x^3 + x - \lambda = 0$$

En déduire que l'équation $f_\lambda(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, +\infty[$ admet une unique solution x_λ et construire le tableau de signe de $f_\lambda(x) - x$ sur $[0, +\infty[$.

Indication:On calculera et factorisera $f_\lambda(x) - x$.
B.2. On a posé $g_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda$
B.2.a. Montrer que

$$\forall x \in [0, +\infty[\,, (f_\lambda(x) = x) \Rightarrow (g_\lambda(x) = x)$$

et, après avoir donné une formule pour $g_\lambda(x)$ que

$$\forall x \in [0, +\infty[\,, (g_\lambda(x) = x) \Leftrightarrow x^5 - \lambda x^4 + 2x^3 - 2\lambda x^2 + (1+\lambda^2)x - \lambda = 0$$

B.2.b. En utilisant la factorisation (qu'on ne demande pas de vérifier)

$$(F) : x^5 - \lambda x^4 + 2x^3 - 2\lambda x^2 + (1+\lambda^2)x - \lambda = (x^3 + x - \lambda).(x^2 - \lambda.x + 1)$$

déduire les solutions de l'équation $g_\lambda(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, +\infty[$. On discutera de différents cas suivant que $\lambda < 2, > 2, = 2$.

(Facultatif : pourquoi une factorisation telle que (F) devait-elle exister ?)

Indication:On calculera et factorisera $g_\lambda(x) - x$.

B.2.c. Dans le cas où il y a 3 solutions à l'équation précédente, dont x_λ, ordonner ces solutions.

Indication:Montrer que dans ce cas $x_\lambda > 1$ et se servir de la relation fondamentale satisfaite par x_λ pour localiser celui-ci entre les racines du trinôme $x^2 - \lambda.x + 1$.

B.2.d. En séparant les cas $\lambda \leq 2$ et $\lambda > 2$, Construire, avec le minimum de calculs le tableau de signe de $g_\lambda(x) - x$ sur $[0, +\infty[$.

Partie C

Conclusions

C.1. Le cas $\lambda \leq 2$. Dans ce cas, g_λ admet pour unique point fixe x_λ.

C.1.a. Déterminer les limites de v et w.

C.1.b. Conclure quant à la convergence de u.

C.2. Le cas $\lambda > 2$. Dans ce cas, g_λ admet 3 points fixes $x_\lambda^- < x_\lambda < x_\lambda^+$.

On note

$$J'_- = \left]0, x_\lambda^-\right[, J_- = \left]x_\lambda^-, x_\lambda\right[, J_+ = \left]x_\lambda, x_\lambda^+\right[\text{ et } J'_+ = \left]x_\lambda^+, +\infty\right[$$

C.2.a. Que valent $f_\lambda(x_\lambda^-)$? $f_\lambda(x_\lambda^+)$? Quel est le comportement de la suite u si $u_0 = x_\lambda^+$ ou $u_0 = x_\lambda^-$. Que valent les suites v et w ? La suite u converge-t-elle ?

C.2.b. Démontrer, en analysant le tableau de variations de f_λ que

$$f_\lambda(J'_-) \subset J'_+, f_\lambda(J'_+) \subset J'_-, f_\lambda(J_-) \subset J_+ \text{ et } f_\lambda(J_+) \subset J_-$$

C.2.c. Etudier le comportement des suites v et w (localisation dans l'un des intervalles J précédents, sens de monotonie, limite) dans chacun des cas : $u_0 \in J'_+$, $u_0 \in J'_-$, $u_0 \in J_+$, $u_0 \in J_-$,

C.2.d. Conclure quant à la convergence ou divergence de u lorsque $u_0 \neq x_\lambda$. Pouvez vous décrire (avec vos propres mots) le comportement asymptotique de la suite u ?

2 Equations différentielles : les bases

D'une manière la plus générale possible, on dit qu'une fonction [23] $X : I \to \mathbb{R}^d$ est solution de l'équation différentielle (du premier ordre)

$$g(t, X, \frac{dX}{dt}) = 0 \tag{EDO}$$

où g est une fonction (p.ex à valeurs numériques) définie sur une partie D_g de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ si

1. I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, X est dérivable sur I ;
2. Pour tout $t \in I$, $(t, X(t), X'(t)) \in D_g$ et

$$\forall t \in I, g(t, X(t), X'(t)) = 0$$

23. Dans note pratique, on aura le plus souvent $d = 1, 2$ ou 3.

Une solution de l'équation (EDO) est donc constituée d'un intervalle I et d'une fonction X définie sur cet intervalle.

On aura souvent affaire à des équations différentielles s'écrivant sous la forme (dite résolue)

$$\frac{dX}{dt} = f(t,X) \tag{EDO,R}$$

où f est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, auquel on adjoint une condition initiale

$$X(t_0) = X_0 \tag{CI}$$

où $(t_0, X_0) \in D_f$ est fixé.

La conjonction équation différentielle (EDO,R) et condition initiale imposée (CI) s'appele un problème de CAUCHY. Pour un tel problème de CAUCHY, sous des conditions assez générales (continuité, caractère $\mathscr{C}^1$) sur f, on dispose (théorème de CAUCHY–LIPSCHITZ, hors-programme) d'un résultat d'existence et d'unicité des solutions, s'énonçant sous la forme :

1. (Existence) Il existe un intervalle I contenant t_0 en son intérieur, une fonction $X : I \to \mathbb{R}^d$ tels que
   (a) $X(t_0) = X_0$,
   (b) $\forall t \in I, X'(t) = f(t, X(t))$
2. (Unicité) S'il existe un intervalle $\tilde{I}$ contenant t_0 en son intérieur, une fonction $\tilde{X} : I \to \mathbb{R}^d$ tels que
   (a) $\tilde{X}(t_0) = X_0$,
   (b) $\forall t \in \tilde{I}, \tilde{X}'(t) = f(t, \tilde{X}(t))$
   alors, sur $I \cap \tilde{I}$, on a $X = \tilde{X}$.

On verra (début du cours sur les EDO), un lien important entre suites récurrentes et EDO. Le théorème de CAUCHY–LIPSCHITZ est l'analogue de l'existence et l'unicité obtenus pour les suites récurrentes à l'aide du principe de récurrence.

Ce type de résultat est hors-programme mais il est intéressant de vérifier une telle existence/unicité sur chaque problème concret.

Graphiquement, on peut voir une équation différentielle du type de (EDO,R), *i.e.* la donnée d'une fonction F, comme la donnée d'un « champ de vecteurs ». Il s'agit, pour la résoudre, de construire des courbes, les *courbes intégrales*, qui, en chaque point, ont pour tangente le vecteur « au point ». On peut penser à la trajectoire d'une particule à l'intérieur d'un fluide.

Résoudre analytiquement une équation différentielle (ou un problème de CAUCHY), c'est en déterminer la(les) solution(s) X en fonction de t et de t_0, X_0.

Au programme sont présentes un certain nombre d'équations différentielles sous forme particulière. Il faut savoir identifier ces formes particulières et la(les) méthode(s) de résolution associée(s)

2.1 Cas où f ne dépend pas de X

On se limite au cas où f est à valeurs numériques ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$).

L'équation différentielle s'écrit alors

$$\frac{dX}{dt} = f(t)$$

Une solution X est donc une primitive de f sur un certain intervalle I.

Si f est continue sur un intervalle I, elle y admet une primitive F. Si $t_0 \in I$, X_0 donné alors

$$X(t) = F(t) - F(t_0) + X_0$$

est *la* solution de l'équation différentielle sur I vérifiant $X(t_0) = X_0$.

Dans l'analogie avec les suites, le problème de la primitivation est analogue au problème de la résolution des sommes partielles d'une suite.

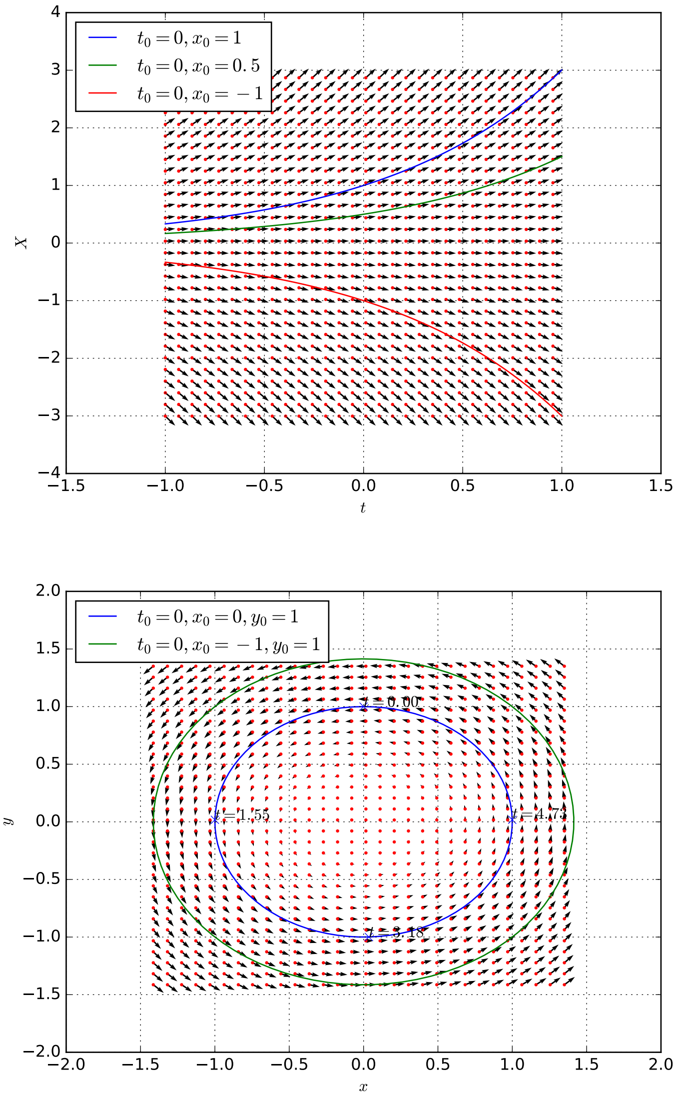

FIGURE 2 – Champs de vecteurs et quelques courbes intégrales.

2.2 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

2.2.1 Le cas homogène, à coefficient constant

Il s'agit, $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ étant un nombre fixé, *Une constante !*, de résoudre

$$\frac{dX}{dt} = a.X \qquad \text{(EDO,1LH)}$$

où X est une fonction à valeurs numériques.

La fonction f est donc définie par $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, X \mapsto f(X) = a.X$. f est une fonction *linéaire*.

On a

1. Si $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \mathbb{C}$, la fonction $X : t \mapsto e^{a.(t-t_0)}.X_0$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I = \mathbb{R}$, vérifie $X(t_0) = X_0$ et est solution de (EDO,1LH).
2. Si $\tilde{I}$ est un intervalle contenant t_0 et si la fonction $\tilde{X}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\tilde{I}$, vérifie $X(t_0) = X_0$ et est

solution de (EDO,1LH) sur $\tilde{I}$ alors

$$\forall t \in \tilde{I}, X(t) = e^{a.(t-t_0)}.X_0$$

1. Il s'agit de l'analogue de la récurrence $u_{n+1} = (1+a).u_n$ qui se résout (uniquement) en une suite géométrique (analogue discret de la fonction exponentielle)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1+a)^n.u_0$$

2. Le premier point se vérifie par simple dérivation (facile). L'énoncé d'unicité est plus subtil. Détaillons le car il s'agit de la première occurence de la méthode de variation de la constante.

Démonstration. Soit $\tilde{I}$ est un intervalle contenant t_0 et si la fonction $\tilde{X}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\tilde{I}$, vérifie $X(t_0) = X_0$ et est solution de (EDO,1LH) sur $\tilde{I}$. Soit $\lambda : \tilde{I} \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall t \in \tilde{I}, \tilde{X}(t) = e^{a.(t-t_0)}.\lambda(t)$$

Un telle fonction λ existe et est de classe $\mathscr{C}^1$ car la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et *ne s'annule pas*. On a donc

$$\forall t \in \tilde{I}, \tilde{X}'(t) = a.e^{a.(t-t_0)}.\lambda(t) + e^{a.(t-t_0)}.\lambda'(t)$$

i.e.

$$\forall t \in \tilde{I}, \tilde{X}'(t) = a.\tilde{X} + e^{a.(t-t_0)}.\lambda'(t)$$

La fonction $\tilde{X}$ vérifie $\tilde{X}(t_0) = X_0$ et est solution de (EDO,1LH) sur $\tilde{I}$ si et seulement si

$$\lambda(t_0) = X_0$$

et

$$\forall t \in \tilde{I}, 0 = e^{a.(t-t_0)}.\lambda'(t)$$

i.e. , du fait que $\tilde{I}$ est un intervalle,

$$\forall t \in \tilde{I}, \lambda(t) = \lambda(t_0) = X_0$$

i.e.

$$\forall t \in \tilde{I}, \tilde{X}(t) = X(t)$$

□

2.2.2 Second membre constant

Il s'agit, $a, b \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ étant deux nombres fixés, *des constantes !*, de résoudre

$$\frac{dX}{dt} = a.X + b \qquad \text{(EDO,1L)}$$

où X est une fonction à valeurs numériques.

On suppose $a \neq 0$.

La fonction f est donc définie par $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, X \mapsto f(X) = a.X + b$. f est une fonction *affine*.

On a

1. Si $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \mathbb{C}$, la fonction $X : t \mapsto e^{a.(t-t_0)}.(X_0 + \frac{b}{a}) - \frac{b}{a}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I = \mathbb{R}$, vérifie $X(t_0) = X_0$ et est solution de (EDO,1L).
2. Si $\tilde{I}$ est un intervalle contenant t_0 et si la fonction $\tilde{X}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\tilde{I}$, vérifie $\tilde{X}(t_0) = X_0$ et est solution de (EDO,1L) sur $\tilde{I}$ alors
$$\forall t \in \tilde{I}, \tilde{X}(t) = X(t)$$

1. Il s'agit de l'analogue de la récurrence $u_{n+1} = (1+a).u_n + b$, récurrence arithmético-géométrique qui se résout (uniquement) en
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1+a)^n.(u_0 + \frac{b}{a}) - \frac{b}{a}$$
2. Le premier point se vérifie par simple dérivation (facile).
3. L'énoncé d'unicité est plus subtil. On put se ramener au cas homogène en remarquant qu'une solution particulière est la fonction X_p constante égale à $-\frac{b}{a}$ et en remarquant que X est solution de (EDO,1L) si et seulement si $X - X_p$ est solution de (EDO,1LH). L'unicité de la solution de (EDO,1LH) à condition initiale imposée entraine alors l'unicité de la solution de (EDO,1L) à condition initiale imposée.

Exercice 21.— On cherche à résoudre le problème de CAUCHY
$$y(0) = 1 \text{ et } \forall t \in I, y'(t) + 3y(t) = y(t)^4$$
où I est un certain intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $y : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
1. Résoudre, en posant $u = \frac{1}{y^3}$, cette équation en supposant que y ne s'annule pas sur I.
2. A posteriori, quel intervalle I, le plus grand possible, peut-on prendre ?
3. Répondre aux mêmes questions avec $y(0) = -1$.

2.2.3 Le cas général : coefficients non constants

Il s'agit, a, b étant deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de résoudre
$$\frac{dX}{dt} = a(t).X + b(t) \qquad \text{(EDO,1L)}$$
où X est une fonction à valeurs numériques.

Le cas homogène, $b = 0$. On suppose dans cette partie que la fonction b est nulle sur l'intervalle I et que a est continue sur I. On note A une primitive de a sur I.

On considère donc l'équation différentielle
$$\frac{dX}{dt} = a(t).X \qquad \text{(EDO,1LH)}$$

Soit $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}$.

1. (Existence) La fonction $X : I \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall t \in I, X(t) = e^{A(t)-A(t_0)}.X_0$$
est solution de (EDO,1LH) sur I et vérifie $X(t_0) = X_0$.

2. (Unicité) Si $\tilde{I}$ est un intervalle (non trivial), contenant t_0, contenu dans I et si $\tilde{X}$ est solution de (EDO,1LH) sur I' et vérifie $\tilde{X}(t_0) = X_0$ alors

$$\forall t \in I', \tilde{X}(t) = X(t)$$

Démonstration. 1. L'existence donnée par la formule est évidente par une simple dérivation de fonctions composées.

2. L'unicité provient là encore de la méthode de variation de la constante. Posons X_h la solution trouvée précédemment pour $X_0 = 1$
$$\forall t \in I, X_h(t) = e^{A(t)-A(t_0)}$$
Posons la fonction λ, définie sur I', à valeurs numériques, par
$$\forall t \in I', \tilde{X}(t) = X_h(t).\lambda(t)$$
Cette fonction est bien définie, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I' car X_h ne s'annule pas sur I' et y est de classe $\mathscr{C}^1$, de même que $\tilde{X}$. On a, par dérivation de produit, que
$$\forall t \in I', \tilde{X}'(t) = X_h'(t).\lambda(t) + X_h(t).\lambda'(t)$$
et en utilisant le fait que $\tilde{X}$ et X_h sont solutions de (EDO,1LH) sur I', il vient
$$\forall t \in I', a(t).\tilde{X}(t) = a(t).X_h(t).\lambda(t) + X_h(t).\lambda'(t)$$
et donc
$$\forall t \in I', X_h(t).\lambda'(t) = 0$$
et donc, sachant que X_h ne s'annule pas sur I',
$$\forall t \in I', \lambda'(t) = 0$$
La fonction λ est donc constante sur l'intervalle I' et, sachant que $\lambda(t_0) = X_0$, on a donc
$$\forall t \in I', \tilde{X}(t) = X_h(t).X_0 = X(t)$$

□

Le cas non homogène, solutions particulières évidentes. On revient à la résolution de
$$\frac{dX}{dt} = a(t).X + b(t) \tag{EDO,1L}$$
où X, l'inconnue est une fonction à valeurs numériques et a, b sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si on connait (on voit !, tester des constantes, des fonctions "simples") une solution particulière X_p de cette équation différentielle définie sur un intervalle $I' \subset I$, on remarque que l'on a l'équivalence

$$X \text{ solution de (EDO,1L)} \Leftrightarrow X - X_p \text{ solution de (EDO,1LH)}$$

et donc
$$X \text{ solution de (EDO,1L) sur } I' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in I', X(t) = X_p(t) + \lambda.e^{A(t)}$$

S'il s'agit de résoudre un problème de CAUCHY avec de plus une condition initiale imposée $X(t_0) = X_0$, on voit qu'on peut le résoudre uniquement en trouvant l'unique constante λ telle que cette condition initiale est réalisée.

Exercice 22.— Résoudre les problèmes de CAUCHY suivants.
1. $u' = 2.u + e^t, u(0) = 3$.
2. $u' = 2.u + e^{2t}, u(0) = 3$.
3. $u' = -u + \cos t$, $u(0) = 1$.

Le cas non homogène, variation de la constante. On revient à la résolution de

$$\frac{dX}{dt} = a(t).X + b(t) \tag{EDO,1L}$$

où X, l'inconnue est une fonction à valeurs numériques et a, b sont deux fonctions définies, *continues* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La méthode de la variation de la constante permet de trouver *toutes* les solutions.

Soit X_h une solution sur I de l'équation homogène associée à (EDO,1L)

$$\forall t \in I, X_h(t) = e^{A(t)}$$

Pour X une fonction quelconque, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, posons la fonction λ, définie sur I, à valeurs numériques, par

$$\forall t \in I, X(t) = X_h(t).\lambda(t)$$

Cette fonction λ est bien définie, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I car X_h ne s'annule pas sur I et y est de classe $\mathscr{C}^1$, de même que X. On a, par dérivation de produit, que

$$\forall t \in I, X'(t) = X_h'(t).\lambda(t) + X_h(t).\lambda'(t)$$

et en utilisant le fait que X_h est solution de (EDO,1LH) sur I, il vient

$$\forall t \in I, X'(t) - \underbrace{a(t).X(t)}_{a(t).X_h(t).\lambda(t)} = X_h(t).\lambda'(t)$$

La fonction X est solution de (EDO,1L) si et seulement si

$$\forall t \in I, X_h(t).\lambda'(t) = b(t)$$

i.e. , sachant que X_h ne s'annule pas sur I,

$$\forall t \in I, \lambda'(t) = \frac{b(t)}{X_h(t)} = e^{-A(t)}.b(t)$$

i.e. La fonction λ est une primitive sur I de $t \mapsto e^{-A(t)}.b(t)$

La résolution du problème de CAUCHY avec condition initiale $X(t_0) = X_0$ se fait en choisissant correctement la constante de primitivation et on obtient comme unique solution

$$\forall t \in I, X(t) = \left(\int_{t_0}^{t} e^{-(A(s)-A(t_0))}.b(s)\, ds + X_0 \right) e^{A(t)-A(t_0)}$$

Il n'est pas question de retenir cette formule par coeur mais d'être capable, sur des exemples concrets, d'appliquer cette méthode pas à pas

Exercice 23.— Soit l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et l'équation différentielle

$$(E) : x.\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{x}{1+x^2}$$

1. Donner les solutions sur I de l'équation homogène associée à (E).
2. Donner les solutions sur I de (E).
3. Existe-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 24.— On considère l'équation différentielle

$$(x\ln x)y' + y = \ln(x) + 1$$

1. Résoudre cette équation sur $]1, +\infty[$.
2. Résoudre cette équation sur $]0, 1[$.
3. En déduire les solutions sur $]0, +\infty[$.

Exercice 25.—(Lemme de GRONWALL). Soit I un intervalle contenant 0. $a \in \mathbb{R}$, $f, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, f de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, b, continue sur I telles que

$$\forall t \in I,\ f'(t) \leq a.f(t) + b(t)$$

Montrer que

$$\forall t \in I, t \geq 0,\ f(t) \leq e^{at} f(0) + \int_0^t e^{a(t-s)} b(s)\ ds$$

Indication:Poser, comme dans la méthode de variation de la constante, $\phi(t) = e^{-a.t} f(t)$.

2.3 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2, à coefficients constants

2.3.1 Le cas homogène

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (d'ordre 2 car les dérivées de la fonction inconnue jusqu'à l'ordre 2 interviennent.

$$\frac{d^2X}{dt^2} + a.\frac{dX}{dt} + b.X = 0 \qquad \text{(EDO,2LH)}$$

La remarque fondamentale à la base de la résolution est la suivante : Une fonction exponentielle du type $X : t \mapsto e^{\alpha.t}$ satisfait cette EDO si et seulement si α vérifie l'*équation caractéristique de l'équation différentielle* :

$$\alpha^2 + a.\alpha + b = 0$$

de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

Proposition 26 (Résolution de (EDO,2LH), solutions réelles.)**.** *une fonction $X : I \to \mathbb{R}$ satisfait (EDO,2LH) sur un intervalle I (non trivial) si et seulement si il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telle que*

$$X = \lambda.Y + \mu.Z$$

où les fonctions $Y, Z : I \to \mathbb{R}$ sont définies, suivant le signe du discriminant $\Delta = a^2 - 4b$, par

1. *Si $\Delta > 0$, $Y = (t \in I \mapsto e^{\alpha_-.t})$ et $Z = (t \in I \mapsto e^{\alpha_+.t})$ où α_-, α_+ sont les deux solutions réelles (distinctes) de l'équation caractéristique.*
2. *Si $\Delta < 0$, $Y = (t \in I \mapsto e^{r.t}\cos(\omega.t))$ et $Z = (t \in I \mapsto e^{r.t}\sin(\omega.t))$ où $\alpha_- = r + i\omega, \alpha_+ = r - i.\omega$, $(r, \omega \in \mathbb{R})$ sont les deux solutions complexes (distinctes et conjuguées) de l'équation caractéristique.*
3. *Si $\Delta = 0$, $Y = (t \in I \mapsto e^{r.t})$ et $Z = (t \in I \mapsto t.e^{r.t})$ où r est la solution (double) de l'équation caractéristique.*

Les constantes λ, μ se déterminent, de manière unique, en fonction de $X(0)$ et $X'(0)$ en résolvant le système linéaire 2×2 adéquat, de déterminant non nul.

Exercice 26.—Reprendre les exercices de première année concernant les résolutions de telles EDO avec des constantes a et b explicites.

Exercice 27.—Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2.X = 0 \tag{E}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur ω pour qu'il existe une solution non nulle de (E) vérifiant de plus

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

2.4 Le cas non homogène.

La résolution de

$$\frac{d^2X}{dt^2} + a.\frac{dX}{dt} + b.X = c(t) \tag{EDO,2L}$$

où X, l'inconnue est une fonction à valeurs numériques et a, b sont deux constantes et c une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si on connait (on voit !, tester des constantes, des fonctions "simples") une solution particulière X_p de cette équation différentielle définie sur l'intervalle I, on remarque que l'on l'équivalence

$$X \text{ solution de (EDO,2L)} \Leftrightarrow X - X_p \text{ solution de (EDO,2LH)}$$

et donc

$$X \text{ solution réelle de (EDO,2L) sur } I \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall t \in I, X(t) = X_p(t) + \lambda.Y(t) + \mu.Z(t)$$

où Y et Z sont définies dans la proposition 26.

S'il s'agit de résoudre un problème de CAUCHY avec de plus une condition initiale (d'ordre 2) imposée $X(t_0) = X_0, X'(t_0) = Y_0$, on voit qu'on peut le résoudre uniquement en trouvant l'unique couple de constantes (λ, μ) telle que cette condition initiale est réalisée.

Exercice 28.— Résoudre les problèmes de CAUCHY.
1. $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, $u'' + u' + u = 0$.
2. $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $u''(t) + u'(t) + u(t) = e^t$. (Chercher une solution particulière sous la forme $u_{part}(t) = C.e^t$.)
3. $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, $u''(t) + u'(t) + u(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. (Chercher une solution particulière sous la forme $u_{part}(t) = C(t).\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).e^{-\frac{1}{2}t} + S(t).\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).e^{-\frac{1}{2}t}$ où C et S sont polynomiales (essayer affine dans un premier temps))

Exercice 29.— On considère l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x) - x - \int_0^x (x-t) f(t)\, dt$$

où f, la fonction inconnue, est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
1. Montrer que si f est solution du problème alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée.
2. En déduire que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre (non homogène).

3. En déduire toutes les solutions de l'équation fonctionnelle.

2.5 Equations différentielles linéaires à valeurs vectorielles

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et l'équation différentielle d'ordre 1

$$\frac{dX}{dt} = A.X$$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, de classe $\mathscr{C}^1$ (chaque composante est une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.)

Il s'agit de l'analogue des suites géométriques vectorielles de la section 1.5.5.

Si la matrice A est triangulaire supérieure, on peut résoudre des équations différentielles scalaires « en cascade ».

Sinon, une méthode standard pour résoudre cette équation différentielle est de

1. Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}.A.P = D$ est diagonale,
2. poser $Y = P^{-1}.X$ et constater que X vérifie $\frac{dX}{dt} = A.X$ si et seulement si Y vérifie $\frac{dY}{dt} = D.Y$
3. Résoudre ce système, composé d'équations différentielles scalaires du type $y' = a.y$, et revenir à $X = P.Y$.

Exercice 30.—On considère trois fonctions réelles u,v, w, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ satisfaisant le système d'équations différentielles

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{lclll} u'(t) & = & u(t) & +v(t) & +w(t) \\ v'(t) & = & & +v(t) & +w(t) \\ w'(t) & = & & & +w(t) \end{array} \right.$$

1. En posant $X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, réécrire le système sous forme matricielle.

2. Résoudre directement ce système et écrire les solutions en fonctions de t et $u(0)$, $v(0)$, $w(0)$.

Exercice 31.—On considère une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, u^{(3)}(t) = 6u''(t) - 11u'(t) + 6u(t).$$

(Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 3)

1. En posant $X = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, déterminer une équation différentielle d'ordre 1 satisfaite par X, du type $\frac{dX}{dt} = A.X$ pour une certaine matrice A.

2. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, vérifier que la matrice P est inversible et que $P^{-1}.A.P$ est diagonale.

3. En déduire que u s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = \lambda.e^t + \mu.e^{2t} + \nu.e^{3t}$$

pour trois constantes $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ déterminables en fonctions de $u(0), u'(0), u''(0)$.

Exercice 32.— Soit

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
2. Montrer que $P^1.A.P$ est une matrice diagonale. A est elle inversible ? Donner des formules pour A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. On considère une suite récurrente (vectorielle) donnée par son premier terme U_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = (I_2 + A)..U_n$$

Donner les formules donnant les composantes de U_n en fonction de n et des composantes de U_0. A quelle condition sur les composantes de U_0 les composantes de U_n admettent-elles une limite lorsque $n \to +\infty$?
4. On considère le problème de CAUCHY

$$U(0) = U_0 \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq 0, U'(t) = A.U(t)$$

Donner des formules pour les composantes de $U(t)$ en fonction de t et des composantes de U_0. A quelle condition sur les composantes de U_0 les composantes de $U(t)$ admettent-elles une limite lorsque $t \to +\infty$?