Lycée Pierre-Gilles de Gennes | **BCPST2**
Mathématiques | **2019-2020**

Révisions/Formulaire 04

Révisions Algèbre: Complexes et Polynômes

1 Nombres complexes et trigonométrie

Identités algébriques fondamentales

Série géométrique

1. $$(1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = 1 - x^{n+1}$$

2. Plus généralement, si $ab = ba$, a,b nombres, matrices carrées, polynômes,
$$(b-a)\left(\sum_{k=0}^{n} b^{n-k}.a^k\right) = b^{n+1} - a^{n+1}$$

3. Si $q \neq 1$, $q \in \mathbb{C}$, $n \leq m$,
$$\sum_{k=n}^{m} q^k = q^n + q^{n+1} + \cdots + q^m = q^n(1+q+\cdots+q^{m-n}) = q^n \frac{1-q^{m-n+1}}{1-q} = \frac{q^n - q^{m+1}}{1-q}$$

Binôme de Newton

1. $$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$$
où
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. Triangle de Pascal.
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \text{ si } 0 \leq k \leq n-1$$

3. Plus généralement, si $ab = ba$, a,b nombres, matrices carrées, polynômes,..
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k.b^{n-k} = \sum_{\substack{0\leq k,\ell\leq n\\ k+\ell=n}} \frac{n!}{k!\ell!} a^k.b^\ell$$

Trigonométrie

Cercle trigonométrique

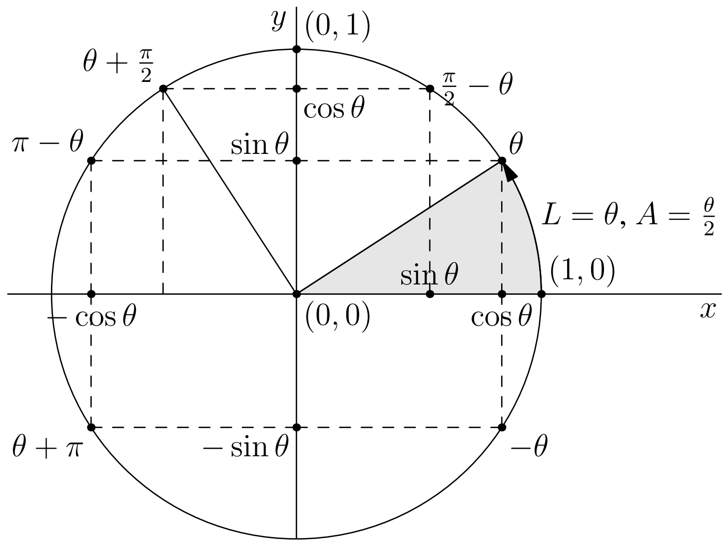

FIGURE 1 – Le cercle trigonométrique

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\begin{aligned}
\sin X = \sin Y &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, X = Y + k.2\pi \text{ ou } \exists \ell \in \mathbb{Z}, X = \pi - Y + \ell.2\pi \\
\cos X = \cos Y &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, X = Y + k.2\pi \text{ ou } \exists \ell \in \mathbb{Z}, X = -Y + \ell.2\pi \\
\tan X = \tan Y &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, X = Y + k.\pi
\end{aligned}$$

Formules d'addition

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Exercice 1.—

1. Rappeler la technique permettant, étant donnés $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, de construire des réels a, ϕ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t) = a\cos(\omega t + \phi)\,.$$

2. En déduire la solution des équations et de l'inéquation suivantes :

$$\cos t + \sin t = \lambda\,, \quad \cos t + 2\sin t = \lambda\,, \quad \cos t - \sin t > 0\,,$$

où λ est un paramètre réel.

Exercice 2.—Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, exprimer $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction de $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$. Exprimer $\tan x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$.

Formules de duplication

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta-\sin^2\theta\\ &= 2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta\\ \tan(2\theta) &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\end{aligned}$$

Si $t=\tan\frac{\theta}{2}$,

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\ \tan\theta=\frac{2t}{1-t^2},$$

Exercice 3.— Résoudre les équations suivantes d'inconnue $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}t^2(\lambda+1)-2t+\lambda-1=0,\\ t^2(\lambda+1)-4t+\lambda-1=0,\\ 4t+2t^2-6t^3-2t^4+2t^5=0.\end{aligned}$$

Pour les deux premières, on discutera en fonction de la valeur du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$. On pourra également rechercher les solutions complexes.

Exercice 4.—

Etablir les relations suivantes :

$$\cos\theta=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \sin\theta=\frac{2u}{1+u^2},\quad \tan\theta=\frac{2u}{1-u^2},$$

avec $u=\tan(\theta/2)$. Pour quelles valeurs de θ sont-elles valides ? En utilisant ces relations, résoudre de nouveau les (in)équations de l'exercice 1, ainsi que l'équation suivante :

$$\cos t-3\sin t+2\tan(t/2)-1=0.$$

On pourra utiliser les résultats de l'exercice 3.

Linéarisation

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos(2\theta))}{2}\qquad \sin^2\theta=\frac{1-\cos(2\theta))}{2}$$

$$\cos a.\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b)),\qquad \sin a.\sin b=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b)),$$

$$\cos a.\sin b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b)).$$

En posant $p=a+b$, $q=a-b$, $a=\frac{p+q}{2}$, $b=\frac{p-q}{2}$

$$\begin{aligned}\cos p+\cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}\\ \cos p-cosq &= -2\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin p-\sin q &= 2\cos\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}\\ \sin p+\sin q &= 2\cos\frac{p-q}{2}.\sin\frac{p+q}{2}\end{aligned}$$

Nombres complexes

Définition

$z = a + i.b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$ avec $i^2 = -1$. Les règles de calcul algébrique littéral s'appliquent.

$$z + z' = (a + i.b) + (a' + i.b') = (a + a') + i(b + b')$$
$$z.z' = (a + i.b).(a' + i.b') = (a.a' - b.b') + i.(a.b' + a'b)$$
$$z^2 = (a + i.b)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

Conjugué

Si $z = a + i.b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\bar{z} := a - i.b$,

$$\mathrm{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2},\ \mathrm{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Module

$$|z|^2 := z.\bar{z} = a^2 + b^2,\ |z| \in \mathbb{R}^+$$
$$|z.z'| = |z|.|z'|,\ \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$
$$|z^n| = |z|^n,\ n \in \mathbb{Z},\ z \neq 0 \text{ si } n < 0$$
$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \qquad \text{(Inégalité triangulaire)}$$
$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \qquad \text{(Inégalité triangulaire bis)}$$

Exponentielle et argument

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta,\ |e^{i\theta}| = 1,\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \text{(EULER)}$$

$$e^{i0} = 1,\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ e^{i\pi} = -1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z},\ e^{ik2\pi} = 1$$

$$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')},\ e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \qquad \text{(EULER–DE MOIVRE)}$$

Si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors θ est un argument de z et $r = |z|$.

Angle moyen

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.2\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),\ e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.2i\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

En particulier, si $\beta = 0$;

$$e^{i\alpha} + 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}.2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ e^{i\alpha} - 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}.2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

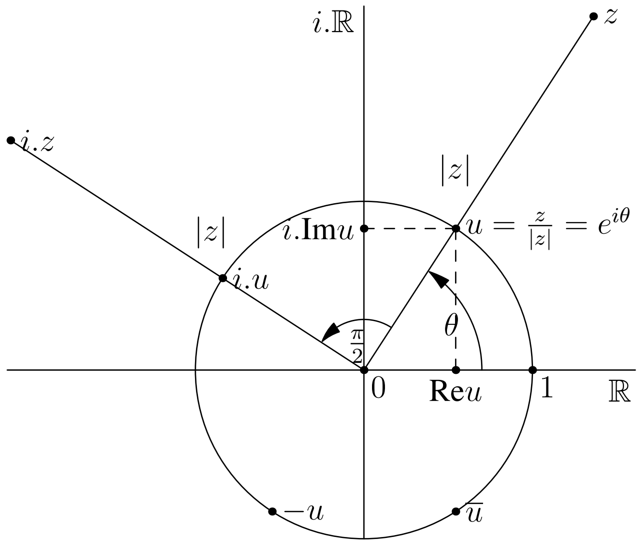

FIGURE 2 – Cercle trigonométrique et nombres complexes

Exercice 5.— Complexes : Questions diverses
1. Pour tout $k \in \{1,2,3,4\}$, déterminer les réels $\rho_k > 0$ et $\theta_k \in [0,2\pi[$ tels que $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, avec $z_1 = 1+i\sqrt{3}$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = 3-i\sqrt{3}$, $z_4 = \frac{1+i}{1-i}$. Représenter graphiquement les points z_k.
2. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que z^2+2z+2 est respectivement nul, réel ou imaginaire pur.
3. En utilisant la relation $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$, retrouver l'expression de $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$ en fonction de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$ en établissant un système linéaire de deux équations à deux inconnues dont ces nombres (en couple) sont solution. Prendre $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $\beta = \frac{\pi}{12}$.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tels que $\frac{i-z}{1+z}$ est réel.
5. Exprimer, en fonction de x et $\cos(t)$, pour $x,t \in \mathbb{R}$, $|x-e^{it}|^2$. Interpréter géométriquement cette quantité (dessin) et démontrer, géométriquement, que, pour $x>0$, $|x-e^{it}| \geq |x-1|$.

Exercice 6.— Mise sous forme trigonométrique
Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$-\sqrt{3}+i \quad , \quad \left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^n \quad , \quad \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\sin\varphi - i\cos\varphi} \quad , \quad \frac{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}.$$

Exercice 7.—
1. Simplifier les sommes $\sum_{k=0}^n \cos(k.x)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k.x)$ où n est un entier naturel et $x \in \mathbb{R}$.
2. et, $\sum_{k=0}^n k.\cos(k.x)$?

Exercice 8.— Une équation trigonométrique Soient n un entier naturel non nul. Résoudre l'équation d'inconnue x

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos(nx) = 0.$$

Exercice 9.—
1. Donner une formule pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, des sommes $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\cos(k.x)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\sin(k.x)$.
2. et, $\sum_{k=0}^n k.\binom{n}{k}\cos(k.x)$?

Exercice 10.— Racines mouvantes Soit t un réel non nul. Déterminer en fonction de t les racines réelles ou complexes du polynôme $P(z) = z^2 + tz + 2/t$. On note $z_-(t) < z_+(t)$ les deux racines réelles lorsque $t > 2$. Montrer que $z_-(t)$ et $z_+(t)$ tendent vers une limite que l'on déterminera lorsque $t \to +\infty$.

Utilisations en Analyse

Les formules d'EULER et de DE MOIVRE sont très utiles pour linéariser ou delinéariser une expression trigonométrique. Par exemple

1. (Linéarisation)

$$\begin{aligned}
(\cos x)^5 &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^5 \frac{1}{2^5}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^5 \\
(\text{NEWTON}) &= \frac{1}{2^5}\left(e^{i5x} + 5e^{i4x-ix} + 10e^{i3x-i2x} + 10e^{i2x-i3x} + 5e^{ix-i4x} + e^{-i5x}\right) \\
(\text{regroupement}) &= \frac{1}{2^4}\cos(5x) + \frac{5}{2^4}\cos(3x) + \frac{10}{2^4}\cos(x)
\end{aligned}$$

2. (Anti-linéarisation)

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \text{Re}\left(e^{i5x}\right) = \text{Re}\left(\cos x + i\sin x\right)^5 \\
(\text{NEWTON}) &= \text{Re}\Big(\cos(x)^5 + 5\cos(x)^4.i.\sin(x) + 10.\cos(x)^3.i^2.\sin^2(x) + \\
&\quad 10.\cos(x)^2.i^3.\sin(x)^3 + 5\cos(x).i^4.\sin(x)^4 + i^5.\sin(x)^5\Big) \\
(\text{simpl. } i^k) &= \cos(x)^5 - 10.\cos(x)^3\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin(x)^4 \\
&= \cos(x)^5 - 10.\cos(x)^3(1-\cos^2(x)) + 5\cos(x)(1-\cos(x)^2)^2
\end{aligned}$$

La linéarisation sert surtout lors de calculs de primitives et d'intégrales. L'anti-linéarisation est l'opération dans l'autre direction.

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = x + i.y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$e^z = e^x.e^{iy} = e^x.\cos(y) + i.e^x\sin(y)$$

où e^x est à prendre au sens de l'exponentielle réelle usuelle. On a $|e^z| = e^x = e^{\text{Re}z} > 0$.

Les règles usuelles sur les puissances s'appliquent : Si $z, z' \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z},\ (e^z)^n = e^{n.z},\ e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$$

Une application importante de l'exponentielle complexe concerne le calcul de primitives et/ou de solutions d'EDO linéaires du fait de la règle de dérivation suivante. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $e_\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t.\alpha}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (au sens où partie réelle et partie imaginaire le sont) avec

$$\frac{d(e^{\alpha.t})}{dt} = \alpha.e^{\alpha.t}$$

Par exemple, une primitive de $f : t \mapsto e^{-t}\cos(2.t)$ est la partie réelle d'une primitive de $t \mapsto e^{t(-1+2i)}$. On calcule donc une telle primitive F en prenant

$$F(t) = \text{Re}\left(\frac{1}{-1+2.i}e^{t(-1+2i)}\right) = -\frac{1}{5}\text{Re}\left((1+2.i)e^{t(-1+2i)}\right) = -\frac{1}{5}\left(e^{-t}\cos(2t) - 2e^{-t}\sin(2t)\right)$$

Exercice 11.— Linéarisation de polynômes trigonométriques Soit $f(x) := \cos^2 x \sin x$, $g(x) := \sin^3 x$. Linéariser ces expressions, calculer, par deux techniques différentes chacune des intégrales suivantes

$$\int_0^\pi f(x)\,dx \text{ et } \int_0^\pi g(x)\,dx.$$

Exercice 12.— Antilinéarisation Calculer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$. En déduire la valeur de $\cos(\pi/10)$.

Racines de l'unité (HP [1])

On a l'équivalence, pour un nombre réel θ,

$$e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\, \theta = 2k\pi$$

Exercice 13.-$\star$**-**Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
1. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer, en écrivant z sous forme trigonométrique, que l'on a l'équivalence

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\, z = e^{i.2\pi\frac{k}{n}}$$

2. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et expliquer l'équivalence

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0, \ldots, n-1\},\, z = e^{2i\pi\frac{k}{n}}$$

L'ensemble des nombres complexes vérifiant l'équation $z^n = 1$ est appelé l'ensemble des *racines n-ièmes de l'unité*. Il comporte exactement n éléments dont 1.
3. Résoudre l'équation $z^n = 1 + i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On pourra chercher une solution particulière $z_0 \neq 0$ et utiliser le fait que

$$z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$$

Exercice 14.— On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.
1. Que vaut ω^5 ? Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
2. Placer sur un dessin les nombres complexes 1, ω, ω^2, ω^3, ω^4.
3. On pose $\alpha = \omega + \omega^4$, $\beta = \omega^2 + \omega^3$. Vérifier que $1 + \alpha + \beta = 0$ et montrer que α et β sont racines d'un même polynôme P de degré 2.
4. Que valent α et β ? Que vaut $\cos\frac{2\pi}{5}$?
5. Proposer une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

Exercice 15.— Soit $\omega = \exp(i2\pi/n)$ avec n un entier strictement positif.
Calculer $\sum_{k=1}^n \omega^{kp}$ (avec $p \in \mathbb{N}$) puis $\sum_{k=1}^n \left(z + \omega^k\right)^n$ où z est un complexe quelconque.

Applications en géométrie plane.

Module et argument d'un nombre complexes ont des interprétations évidentes en termes de géométrie place euclienne.

— Si A et B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B alors [2] $|z_A - z_B|$ est la distance entre A et B.

1. Mais source inépiusable d'exercices
2. en application directe du théorème de PYTHAGORE,

— Si A, B et C sont trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C alors un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ est une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{BA}, \vec{BC})$.

— Si $A_j, j \in \{1, \dots, N\}$ sont N points du plan, $p_j, j \in \{1, \dots, N\}$, N nombres réels vérifiant $\sum_{j=1}^N p_j = 1$ alors le barycentre B des points $A_j, j \in \{1, \dots, N\}$ affectés des coefficients $p_j, j \in \{1, \dots, N\}$ a pour affixe

$$z_B = \sum_{j=1}^{N} p_j . A_j$$

En particulier, le milieu de deux points A et B a pour affixe $\frac{1}{2} z_A + \frac{1}{2} z_B$, le centre de gravité d'un triangle ABC (intersection des médianes) a pour affixe $\frac{1}{3} z_A + \frac{1}{3} z_B + \frac{1}{3} z_C$

Exercice 16.—Soient A, B et C trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Montrer l'inégalité (De quelle inégalité du cours est-elle la variation directe ?)

$$|z_A - z_C| \leq |z_A - z_B| + |z_B - z_C|$$

et en donner une interprétation géométrique. (Pourquoi l'inégalité du cours en question porte-t-elle ce nom ?)

Exercice 17.— Lieux géométriques

Déterminer dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
1) $|z - 3i| = 5$, 2) $z\bar{z} = 4$, 3) $\arg z = \frac{\pi}{3}\, [2\pi]$,
4) $\arg z = \frac{\pi}{3}\, [\pi]$, 5) $z + \frac{1}{z}$ soit réel.

Exercice 18.— Conditions géométriques exprimées en termes d'affixes

Soient trois points A, B et C d'affixes respectives a, b, c. Déterminer :

1. Une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que A, B et C soient alignés.
2. Une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

Exercice 19.— On considère, dans le plan identifié à $\mathbb{C}$ trois points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

1. Montrer que A, B et C sont non alignés si et seulement si $\mathrm{Im}(z_A - z_B)\overline{(z_A - z_C)} \neq 0$.

2. On suppose A, B et C non alignés et on considère le point Ω d'affixe

$$z_\Omega = z_A + \frac{(z_A - z_C)(z_A - z_B)\overline{(z_C - z_B)}}{\overline{(z_A - z_C)}(z_A - z_B) - \overline{(z_B - z_C)}(z_A - z_C)}$$

Montrer que $|z_\Omega - z_A| = |z_\Omega - z_B| = |z_\Omega - z_C|$.

3. Interprétation géométrique ?

Exercice 20.— Suite définie par une récurrence homographique

On considère la fonction f de variable complexe définie par la formule $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

1. Quel est le domaine de définition D_f de f ?

2. Résoudre successivement les équations, d'inconnue $z \in D_f$, $f(z) = 1$, $f(z) = 0$, $f(z) = -1$.

3. Chercher les points fixes de f, i.e les solutions de l'équation $f(z) = z$ d'inconnue $z \in D_f$. Sans trop de calculs, il y en a probablement deux, pourquoi ? Les trouver explicitement et les nommer α et β.

4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $z_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n)$$

4.a. Pour quelles valeurs de z_0 cette suite n'est-elle pas bien définie ?
On exclut dorénavant ces cas.
4.b. Montrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z_n = \alpha$ ou $z_n = \beta$ alors la suite z_n est constante.
On exclut dorénavant les cas $z_0 = \alpha$ et $z_0 = \beta$.
5. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{z_n-\alpha}{z_n-\beta}$.
Après avoir exprimé z_n en fonction de u_n, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. Donner une formule fermée pour z_n en fonction de n.

Python et représentations graphiques

En Python, directement et sous `numpy`, alias `np`, on peut calculer en nombres complexes directement en utilisant les opérations usuelles. Le nombre complexe fondamental i est noté `1j` donc, par exemple, `1+np.sqrt(3)*1j` est le nombre complexe $1+\sqrt{3}.i$.

On a si `z` est un nombre complexe ou un `ndarray` de nombres complexes, la liste de fonctions élémentaires, placée dans un script de démonstration, que l'on peut copier/coller directement dans la fenêtre Pyzo.

Listing 1 – python/demo-complexes.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
z=1+np.sqrt(3)*1j
w=complex(-np.sqrt(2),np.sqrt(2)) #declare w=-racine(2)+i*racine(2)
print("z=",z,"partie réelle de z=",z.real,"partie imaginaire de z=",z.imag)
print("z=",z,"conjugué de z=",z.conj(),"partie imaginaire de z=",z.imag)
print("z=",z,"module de z=",np.abs(z),"argument de z=",np.angle(z))
print("w*z=",w*z,"partie réelle de w*z=",(w*z).real,"partie imaginaire de w*z=",(w
print("w*z=",w*z,"module de w*z=",np.abs(w*z),"argument de w*z=",np.angle(w*z))
#En ndarray, racines n-iemes de l'unité
n=10
un=np.array([np.exp(1j*2*k*np.pi/n) for k in range(n)])
print("les modules des u_n valent",np.abs(un))
print("les parties réelles des u_n valent",un.real)
#rep. graphique : séparer parties réelles et parties imaginaires
fig,ax=plt.subplots()
ax.set_aspect("equal") #Pour repère visuellement orthonormé
plt.plot(un.real,un.imag)
plt.show()
```

Le script conclut sur une façon de représenter graphiquement un `ndarray` unidimensionnel de nombres complexes : il s'agit d'utiliser la commande `plt.plot` usuelle après avoir extrait parties réelles et parties imaginaires de la liste. D'un point de vue esthétique, il vaut mieux avoir une représentation en repère orthonormé visuellement.

Exercice 21.—Calculer et représenter graphiquement en Python la suite récurrente de l'exercice 20 pour une valeur de z_0 au choix.

2 Polynômes

Définition, vocabulaire

Définition 1. *1. Un polynôme P en l'indéterminée X à coefficients réels, resp. complexes, est*

- *soit une expression de la forme*[3]*, dite* **normale**

$$P = p_0 + p_1.X + \cdots + p_d.X^d \tag{FN}$$

où la suite des **coefficients** *de P, i.e la suite de nombres réels, resp. complexes,* $(p_0, \dots, p_d, \dots)$ *est nulle à partir d'un certain rang.*

- *soit une expression obtenue en additionnant, multipliant de telles expressions.*

2. Deux polynômes sont égaux si les expressions, une fois développées suivant les régles[4] *usuelles du calcul littéral sur $\mathbb{C}$, –et donc mises sous forme normale (FN)– de chacun de ces polynômes ont mêmes coefficients.*

1. Le symbole X (l'« indéterminée ») est un polynôme particulier, ce n'est pas un nombre.
2. Le polynôme nul est le polynôme dont les coefficients de la forme normale sont tous nuls. Son **degré** est conventionnellement $-\infty$.
3. Le coefficient p_i d'indice $i \in \mathbb{N}$ est souvent appelé le coefficient du terme de degré i dans P.
4. Si P n'est pas nul, son **degré**, noté $\deg P$, est l'indice maximum au delà duquel tous les coefficients de la forme normale sont nuls. Le coefficient du terme de degré $\deg P$ est *différent de* 0. Les coefficients des termes de degré $> \deg P$ sont nuls. En particulier le polynôme X est de degré 1.
5. Un polynôme est dit constant s'il est nul ou de degré 0.
6. l'ensemble des polynômes à coefficients réels, resp complexes, est noté $\mathbb{R}[X]$, resp. $\mathbb{C}[X]$, l'ensemble des polynômes de degré *inférieur ou égal* à d, $\mathbb{R}_d[X]$, resp. $\mathbb{C}_d[X]$.
7. Le coefficient du terme de degré $\deg P$ est appelé le **coefficient dominant** de P. Un polynôme est dit **unitaire** si son coefficient dominant vaut 1.
8. X est un polynôme unitaire de degré 1.
9. La somme, le produit de deux polynômes sont des polynômes. Le coefficient du terme d'indice k dans $P+Q$ vaut $p_k + q_k$, le coefficient du terme d'indice k dans $P.Q$ vaut

$$\sum_{\substack{m+n=k \\ m,n\in\mathbb{N}}} p_m.q_n = \sum_{\ell=0}^{k} p_\ell.q_{k-\ell}$$

On a

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) \text{ et } \deg P.Q = \deg P + \deg Q.$$

10. Bien qu'on ne puisse diviser deux polynômes en général, on a la régle de simplification suivante : Si P, A, B sont des polynômes, $P \neq 0$ et $P.A = P.B$ alors $A = B$.

3. On prend la convention d'écriture $X^0 = 1$, $X^1 = X$.
4. avec notamment la règle $X^k.X^\ell = X^{k+\ell}$.

Substitution, évaluation, composition

1. Substitution de X par une valeur. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P = p_0 + p_1.X + \cdots + p_d.X^d$ on note $P(\alpha)$, la **valeur de P en α** le nombre
$$P(\alpha) = p_0 + p_1.a + \cdots + p_d.a^d$$
On dit qu'on a effectué la **substitution** de X par la valeur α ou que l'on a **évalué** P en α, on peut noter[5] cette opération $X \leftarrow \alpha$.
On a $(P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$ et $(P.Q)(\alpha) = P(\alpha).Q(\alpha)$. A un polynôme P est donc naturellement associée une fonction[6] (dite **polynomiale**) P définie sur $\mathbb{C}$. $P : x \in \mathbb{C} \mapsto P(x) \in \mathbb{C}$. On peut restreindre cette fonction à $\mathbb{R}$ ou à un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, ce qui est monnaie courante en Analyse.
2. Substitution de X par un polynôme Q. Si $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$ alors $Q^k := \underbrace{Q.\ldots.Q}_{k \text{ fois}} \in \mathbb{C}[X]$.
Si maintenant $P = p_0 + p_1.X + \cdots + p_d.X^d \in \mathbb{C}[X]$, on note la **composée (à droite)** de P par Q[7]
$$P \circ Q = P(Q) := p_0 + p_1.Q + \cdots + p_d.Q^d \in \mathbb{C}[X].$$
Si P, Q, sont à coefficients réels, $P(Q)$ l'est aussi. X est un polynôme. On a donc $P(X) = P$. En général, $\deg P(Q) = \deg P.\deg Q$. Si p et q sont les fonctions associées à P et Q alors $p \circ q$ est la fonction associée à $P(Q) = P \circ Q$. On a $(P(Q))(\alpha) = P(Q(\alpha))$.
3. Substitution de X par une matrice carrée M. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$ alors[8] $M^k := \underbrace{M.\ldots.M}_{k \text{ fois}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Si maintenant $P = p_0 + p_1.X + \cdots + p_d.X^d \in \mathbb{C}[X]$, on note
$$P(M) := p_0.I_n + p_1.M + \cdots + p_d.M^d \in \mathbb{C}[X].$$
Si P, M, sont à coefficients réels, $P(M)$ l'est aussi. Un polynôme P tel que $P(M) = 0_n$ est dit **annulateur**[9] de M. Si $Y \in \mathbb{C}^n$, on a
$$P(M).Y = p_0.Y + p_1.M.Y + \cdots + p_d.M^d.Y$$

Polynôme dérivé et dérivés successifs

Définition 2. *1. Si $P = p_0 + p_1.X + \cdots + p_d.X^d = \sum_{k=0} p_k X^k$ est un polynôme, son polynôme dérivé est*
$$P' = p_1 + 2.p_2 + \cdots + d.p_d.X^{d-1} = \sum_{k=0}^{d-1} (k+1) p_{k+1} X^k$$

2. Si $\ell \in \mathbb{N}$, le ℓ-ième polynome dérivé de P, $P^{(\ell)}$ est défini par la récurrence $P^{(0)} = P$,
$$\forall \ell \in \mathbb{N}, P^{(\ell+1)} = (P^{(\ell)})' = (P')^{(\ell)}$$

5. et non pas $X = \alpha$, vu que X est un polynôme ayant sa valeur propre, on ne peut réaffecter ce symbole à une autre valeur.
6. Le programme officiel BCPST2 considère qu'un polynôme *est* la fonction polynomiale associée, la pratique des exercices d'oraux montre que ce point du programme n'est pas respecté. Pour nous un polynôme « *est* » la suite des coefficients $p_0, p_1, \ldots, p_d, \ldots$ permettant de fabriquer une « formule » polynômiale
7. Il y deux notations qui coexistent.
8. avec la convention $M^0 = I_n$
9. Cette notion est officiellement hors programme BCPST mais apparait dans nombre de problèmes et d'exercices

Au niveau du degré, $\deg P' = \deg P - 1$ si $\deg P \geq 1$, $-\infty$ sinon. Les dérivés d'une somme, d'un produit, d'une composition, ont les mêmes formules que pour la dérivation des fonctions d'une variable réelle.

Si $\ell > \deg P$, $P^{(\ell)} = 0$, si $d = \deg P \geq 0$, $P^{(d)} = d!p_d$. On a, pour $\ell \leq k$,

$$((X-\alpha)^k)^{(\ell)} = k.(k-1)\dots.(k-\ell+1)(X-\alpha)^{k-\ell} = \frac{k!}{(k-\ell)!})(X-\alpha)^{k-\ell}$$

et pour $\ell > k$,

$$((X-\alpha)^k)^{(\ell)} = 0$$

Par récurrence sur le degré du polynôme P, on tire la formule [10] de TAYLOR pour les polynômes, pour $\ell > \deg P$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X-\alpha) + \cdots + \frac{P^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!}(X-\alpha)^{\ell}$$

Cette notion de dérivation est purement formelle : on a posé la formule du polynôme dérivé à partir de celle du polynôme, il n'y a pas de limite de taux d'accroissement en jeu. Le nom de dérivation provient de l'opération homonyme en analyse et les règles de calcul sont les mêmes [11] :

Linéarité : $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $(\lambda.P + \mu.Q)' = \lambda.P' + \mu.Q'$

LEIBNIZ : $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $(P.Q)' = P'.Q + P.Q'$

Composé : $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $(P \circ Q)' = (P' \circ Q).Q'$

Il y a évidemment compatibilité des opérations de dérivation entre algèbre et analyse. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $p : I \to \mathbb{C}$ est la fonction polynomiale associée sur un certain intervalle [12] $I \subset \mathbb{R}$ non trivial définie par

$$\forall x \in I,\ p(x) = P(x) \text{ [substitution } X \leftarrow x \text{ dans le polynôme } P]$$

alors $\forall x \in I$,

$$\text{[dérivation analyse] } p'(x) = P'(x) \text{ [substitution } X \leftarrow x \text{ dans le polynôme } P'\text{, (dérivation algèbre)]}$$

Exercice 22.—

Discuter, suivant les valeurs des nombres réels a and b, du degré des polynômes P, Q, $P+Q$ et PQ si

$$P(X) = aX^3 - bX^2 + bX + a \text{ et } Q(X) = bX^2 + a^2X.$$

Exercice 23.—

1. Résoudre l'équation $Q^2 = XP^2$, où les inconnues P et Q sont des polynômes à coefficients complexes en l'indéterminée X.

Indication:Chercher les degrés possibles.

2. De même, résoudre l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$

$$(P')^2 = 4P.$$

Exercice 24.—

1. Trouver un polynôme P_2 tel que $P_2(0) = 0$ et

$$P_2(X+1) - P_2(X) = X^2$$

et en déduire la valeur de $\sum_{i=1}^{n} i^2$. Indication:Commencer par déterminer le degré d'un tel polynôme P_2

2. Déterminer par la même méthode une formule fermée pour $\sum_{i=1}^{n} i^3$.

Indication:Trouver un polynôme P_3 adhoc, par exemple, en primitivant P_2.

10. Hors programme BCPST

11. Il n'y a pas de règle concernant le quotient, vu qu'un quotient de deux polynôme, ce n'est pas un polynôme !

12. SVP : Ne parlez pas de fonction dérivable sur $\mathbb{C}$! ! ! !, dans la formule suivante vous ne pouvez pas remplacer I par une partie quelconque de $\mathbb{C}$ car la dérivation au sens de l'analyse d'une fonction de variable complexe est ABSOLUMENT hors de votre programme.

Racines et racines multiples

Définition 3. *On dit que $\alpha \in \mathbb{C}$ est* **racine** *de P si $P(\alpha) = 0$.*

Proposition 4. *α est racine de P s'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-\alpha).Q$.*

Proposition-Définition 5. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $P \in \mathbb{C}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$, On a équivalence entre*

1. *il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^k.Q$*
2. *$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$*

Dans ce cas, on dit que α est **racine d'ordre au moins** *k de P. Si α est racine de P, la* **multiplicité**[13] **de α en tant que racine de** *P est l'entier k tel que α est racine d'ordre au moins k de P* **et** *α n'est pas racine d'ordre au moins $k+1$ de P.*

Théorème 6.

1. *Si P est un polynôme* **non nul** *de degré $d \in \mathbb{N}$ alors P admet au plus d racines en comptant les multiplicités.*
2. *Si P est un polynôme ayant plus de $d \in \mathbb{N}$ racines distinctes alors soit $\deg P > d$, soit $P = 0$.*
3. *Si P est un polynôme ayant une infinité de racines distinctes alors $P = 0$.*

Théorème 7 (D'ALEMBERT-GAUSS)**.** *Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est non nul, alors P admet au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Exercice 25.— Pour un entier $n \geq 4$, on considère le polynôme $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$. Prouver que 1 est racine triple de P.

Exercice 26.— Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1 \in \mathbb{C}[X]$.
1. Donner au moins deux racines évidentes de P.
2. Montrer que si $j \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ vérifie $j^3 = 1$, alors j est racine au moins double de P.
3. Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 27.— Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Démontrer que les racines complexes du polynôme $P_n = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k$ sont toutes simples.
2. On considère maintenant P_n comme fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$. Démontrer par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_{2k} \text{ ne s'annule pas et } P_{2k+1} \text{ s'annule exactement une fois}$$

Exercice 28.—
1. On considère, pour $p, q \in \mathbb{R}$, le polynome $P = X^3 + pX + q$.

Montrer, par une étude de fonction que ce polynôme admet trois racines réelles distinctes si et seulement si $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Indication:Que penser du fait que les valeurs de P aux deux racines de son dérivé sont de signes opposés ?

2. Peut-on, sur cette base, déterminer une CNS sur les coefficients réels a, b, c pour que le polynôme $Q = X^3 + aX^2 + bX + c$ ait trois racines réelles distinctes ?

Indication:Ecrire Q sous le forme $P(X + \frac{1}{3}a)$ avec p et q bien choisis

---

13. par convention α est racine de multiplicité 0 si α n'est pas racine de P, i.e $P(\alpha) \neq 0$

Relations racines coefficients

Soit
$$P = p_0 + p_1.X + \cdots + p_d.X^d = p_d(X_{\alpha_1}).\ldots.(X_{\alpha_d})$$
un polynôme de degré d écrit sous forme normale et sous forme factorisée. On a alors
$$\frac{p_0}{p_d} = (-1)^d \prod_{j=1}^{d} \alpha_j$$
$$\frac{p_{d-1}}{p_d} = -\sum_{j=1}^{d} \alpha_j$$

Exercice 29.—Déterminer les solutions du système d'inconnue $(a,b) \in \mathbb{C}^2$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 2 \\ a.b & = & \frac{1}{2} \end{array} \right.$$
Indication:Montrer qu'un couple (a,b) est solution si et seulement si c'est le couple des racines d'un certain polynôme de degré 2.

Exercice 30.— Soit $n \geq 2$. On pose $P = (X+1)^n - 1$.
1. Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$, puis factoriser P.
2. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, de degré supérieur ou égal à 1. Exprimer la relation existant entre le produit des racines de Q et le terme constant dans Q.
3. Déterminer un polynôme Q vérifiant $P = XQ$ puis calculer à l'aide du 2 :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 31.— Somme et produit des racines n-ièmes de l'unité
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le produit et la somme des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 32.— Un parallélépipède a pour côtés d'arêtes les trois nombres (réels positifs), a, b et c. On appelle V son volume, S la surface de ses faces et P la longueur totale de ses arêtes.
1. Exprimer P, S et V en fonction de a, b et c et montrer l'égalité polynomiale
$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - \frac{P}{4}X^2 + \frac{S}{2}X - V$$
2. En étudiant à quelle(s) condition(s) nécéssaires la fonction définie par le membre de droite admet trois racines réelles positives, montrer qu'il n'existe pas de parallélépipède vérifiant $P^2 < 24S$.
3. Montrer que si $P^2 = 24S$ alors le seul parallélépipède possible est un cube.

Application en dénombrement/probabilités

Une technique commune, dûe à LAPLACE en théorie des probabilités, est la construction du *polynôme générateur* d'une loi de v.a. prenant un nombre fini de valeurs entières positives : Si X est une telle variable, sa loi est donnée par la suite $p = (p_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\mathbb{P}(X=k))_{k\in\mathbb{N}}$ dont seul un nombre fini de termes est non nul. Connaitre cette suite, c'est connaitre le polynôme (la fonction polynomiale)
$$P_X(t) = \sum_{k=0}^{K^*} p_k.t^k$$

où K^* est un entier à partir duquel $p_k = 0$. Ce polynôme est lié à l'espérance et la variance de X par le biais des formules

$$\mathbb{E}(X) = P'_X(1) \text{ et } \mathbb{E}(X.(X-1)) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X) = P''_X(1)$$

Ce type de technique permet de retrouver par exemple espérance et variance de nombreuses lois discrètes. On en donne une variante permettant de calculer espérances et variances [14] des lois hypergéométriques.

On rappelle que la loi hypergéométrique $\mathscr{H}(n,p,N)$ de paramètres N, n, $p = b/N$ est la loi du nombre de boules blanches obtenues en n tirages sans remise d'une urne contenant initialement N boules dont $b = p.N$ blanches.

Pour une v.a. $X \sim \mathscr{H}(n,p,N)$, on a

$$\forall k \in \{\max(0, n-(1-p)N), \ldots, \min(n, p.N)\}, \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Lorsque $k \in \mathbb{N}$ n'est pas dans la gamme précisée dans la formule, on a $\mathbb{P}(X=k) = 0$ et l'on convient dans les calculs suivants de considérer les coefficients binomiaux écrits comme nuls lorsque leurs arguments sont hors de la zone de définition habituelle. Pour $t, s \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}^*$, définissons

$$P(t,s) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(\sum_k \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{n-k}}{\binom{N}{n}} t^k \right) s^n$$

On a

$$\begin{aligned} P(t,s) &= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(\sum_{k+\ell=n} \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{\ell}}{\binom{N}{n}} (s.t)^k.s^\ell \right) = \left(\sum_k \binom{p.N}{k} (s.t)^k \right) \left(\sum_\ell \binom{(1-p).N}{\ell} s^\ell \right) \\ &= (1+s.t)^{p.N}(1+s)^{(1-p).N} \end{aligned}$$

On peut remarquer que pour $t = 1$, on a

$$P(1,s) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(\sum_k \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{n-k}}{\binom{N}{n}} \right) s^n = (1+s)^{p.N+(1-p).N} = (1+s)^N$$

En développant à gauche et en identifiant les coeff de s^n, on a [15]

$$\left(\sum_k \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{n-k}}{\binom{N}{n}} \right) = 1$$

Evaluons maintenant espérance et variance de la loi hypergéométrique. On a

1. Pour l'espérance,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t,s)}{\partial t} &= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(\sum_k \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{n-k}}{\binom{N}{n}} k.t^{k-1} \right) s^n \\ &= p.N.s.(1+t.s)^{p.N-1}.(1+s)^{(1-p).N} \end{aligned}$$

14. La formule de la variance est hors-programme BCPST
15. Ce qui est normal car on a une loi de v.a.

En prenant $t=1$, on obtient l'égalité de polynômes (en s),

$$\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\left(\sum_k \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{n-k}}{\binom{N}{n}}k\right)s^n = p.N.s.(1+s)^{N-1}$$

En développant et en identifiant les coefficients de chaque monôme s^n, on a donc, pour $1\leq n\leq N$

$$\binom{N}{n}\sum_k \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{n-k}}{\binom{N}{n}}k = p.N.\binom{N-1}{n-1}$$

Après simplification, il vient

$$\sum_k \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{n-k}}{\binom{N}{n}}k = p.N.\frac{n}{N} = p.n \text{ } i.e. \text{ } \mathbb{E}(X) = n.p$$

.

2. Pour la variance,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P(t,s)}{\partial t^2} &= \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\left(\sum_k \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{n-k}}{\binom{N}{n}}k.(k-1).t^{k-2}\right)s^n \\ &= p.N(p.N-1).s^2.(1+t.s)^{p.N-2}.(1+s)^{(1-p).N}\end{aligned}$$

En prenant $t=1$, on obtient l'égalité de polynômes (en s),

$$\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\left(\sum_k \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{n-k}}{\binom{N}{n}}k.(k-1)\right)s^n = p.N.(p.N-1)s^2.(1+s)^{N-2}$$

En développant en en identifiant les coefficients de s^n, on a donc, pour $2\leq n\leq N$

$$\binom{N}{n}\sum_k \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{n-k}}{\binom{N}{n}}k.(k-1) = p.N.(p.N-1)\binom{N-2}{n-2}$$

Après simplification, il vient

$$\sum_k \frac{\binom{p.N}{k}.\binom{(1-p).N}{n-k}}{\binom{N}{n}}k.(k-1) = p.N.(p.N-1)\frac{n.(n-1)}{N.(N-1)}$$

i.e. $\mathbb{E}(X.(X-1)) = p.n.(p.N-1)\frac{(n-1)}{(N-1)}$ et en utilisant $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X.(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$, on obtient

$$\mathbb{V}(X) = n.p(1-p).\frac{N-n}{N-1}$$

Exercice 33.— Soient n et p deux entiers naturels tels que $p\leq n$.
1. Pour $x\in\mathbb{R}^*$, calculer de deux façons différentes $\sum_{k=p}^{n}(1+x)^k$ en terme de puissances de x.

2. En déduire deux écritures différentes du polynôme $\sum_{k=p}^{n}(1+X)^k$. Grâce au coefficient de X^p, calculer :

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}.$$

Divisibilité, décomposition en facteurs irréductibles

Fixons, dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ l'un des deux ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rq : Dans le programme officiel de BCPST, seuls le cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ est au programme.

Définition 8. *Soient P, Q deux polynomes dans $\mathbb{K}[X]$. On dit que P* **divise** *Q ou que Q est* **factorisable** *par P s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = P.R$.*

Exemples : Un polynôme quelconque divise le polynôme nul. Un polynôme constant non nul divise tout polynôme. Le polynôme nul ne divise que lui-même. $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P d'ordre au moins k si et seulement si $(X-\alpha)^k$ divise P.

Définition 9. *On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré > 0, est* **irréductible** *dans $\mathbb{K}[X]$ si pour tous $Q,R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = Q.R$, soit Q, soit R est constant.*

Un polynôme de degré 1 est toujours irréductible.

Proposition 10. *Si $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré > 0, il existe des polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$, $P_1,..,P_r$ tels que*

$$P = P_1.\ldots.P_r$$

Théorème 11 (D'ALEMBERT-GAUSS revisité)**.**

1. *Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.*
2. *Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont exactement*
   (a) *les polynômes de degré 1.*
   (b) *les polynômes de degré 2 sans racines réelles*

Dans la preuve de la deuxième partie de ce théorème apparait l'énoncé suivant qu'il convient de singulariser.

Proposition 12. *Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P de multiplicité m alors $\overline{\alpha}$ est racine de P de multiplicité m.*

Théorème 13 (Décomposition en irréductibles)**.**

1. *Si $P \in \mathbb{C}[X]$, $P \neq 0$, $d := \deg P \geq 0$, il existe une unique famille [16] non ordonnée de polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, $(P_i = X-\alpha_i)_{i\in\{1,\ldots,d\}}$ et un unique $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que*
$$P = \lambda.\prod_i P_i = \lambda.\prod_i (X-\alpha_i)$$
2. *Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$, $d := \deg P \geq 0$, il existe une unique famille non ordonnée de polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, $(P_i)_{i\in\{1,\ldots,d_1+d_2\}}$ et un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que*
$$P = \lambda.\prod_i P_i$$
   Cette famille peut comporter des polynômes
   (a) *de degré 1, de la forme $P_i = X-\alpha_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$, au nombre de $d_1 \in \mathbb{N}$*
   (b) *de degré 2, de la forme $P_i = X+2.\beta_i.X+\gamma_i$ avec $\beta_i,\gamma_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i^2-\gamma_i < 0$, au nombre de $d_2 \in \mathbb{N}$.*
   On a $d_1+2d_2 = d$.

16. Si $d = 0$, cette famille est vide, le produit sur une famille vide vaut conventionnellement 1

Exercice 34.—
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$: $P = 6X^3 + X^2 - 19X + 6$ et $Q = X^4 + 1$.

Des exercices plus avancés

Exercice 35.— Polynômes de TCHEBYCHEV
1. Donner un polynôme (en l'indéterminée X) T_2 tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_2(\cos\theta) = \cos 2\theta.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer rapidement que si T_n et $\tilde{T}_n$ sont deux polynômes tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n.\theta) = \tilde{T}_n(\cos\theta),$$

alors $T_n = \tilde{T}_n$.
3.a. En remarquant que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos\theta.\cos(n\theta),$$

définir, par une récurrence à deux crans, une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

3.b. Déterminer le dégré de T_n ainsi que son coefficient dominant.
4. En utilisant les relations

$$\cos(n.\theta) + i.\sin(n.\theta) = (\cos(\theta) + i.\sin(\theta))^n \text{ et } \sin^{2k}(\theta) = (1 - \cos^2\theta)^k,$$

Donner une expression de T_n faisant intervenir un symbole de sommation ainsi que les coefficients binomiaux. (On ne demande pas que ce polynôme soit écrit sous forme complètement développée.)
5. Déterminer les zéros de T_n appartenant à l'intervalle $[-1,+1]$. Combien y en a-t-il ? Déterminer les racines complexes de T_n.
6. Montrer que, pour $m,n \in \mathbb{N}$, $T_n \circ T_m = T_{mn}$.
7. (Polynômes de 2^e espèce, facultatif) Déterminer une suite de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0[\pi]$,

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

Montrer que l'on peut construire cette suite de polynômes par une récurrence à deux crans.
8.a. Montrer que si T est un polynôme alors l'intégrale généralisée

$$I(T) := \int_{-1}^{+1} T(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

est convergente.
8.b. Montrer que si $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ alors

$$I(T_n.T_m) = 0.$$

8.c. Quelle est la valeur de $I(T_n^2)$?

Exercice 36.— Théorème de GAUSS-LUCAS
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $d > 0$ ayant d racines complexes distinctes, $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$,

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\overline{z - \alpha_k}}{|z - \alpha_k|^2}$$

2. Si a, b et c sont les affixes de trois points distincts A, B et C du plan, un point M d'affixe z est à l'intérieur, au sens large du triangle ABC, s'il existe $\beta_a, \beta_b, \beta_c \in \mathbb{R}$, positifs, de somme 1 tels que

$$z = \beta_a.a + \beta_b.b + \beta_c.c.$$

Montrer que si P est un polynome de degré 3 ayant 3 racines complexes distinctes a, b et c, alors les racines de P' sont à l'intérieur du triangle ABC.
3. Que peut-on dire dans le même esprit si P est un polynôme de degré d ayant d racines distinctes ? Que se passe-t-il si les racines de P sont quelconques ?