Corrections choisies 01

Intégrales généralisées

Correction Ex.–7 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\,, \\ -x\ln x & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

On pose pour tout $(h,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$I_k = \int_0^1 \frac{(f(x))^k}{k!}dx \quad \text{et} \quad H_{h,k} = \int_0^1 x^h (\ln x)^k dx\,.$$

Remarque préliminaire : On peut remarquer que toutes ces intégrales sont bien définies car, par croissances comparées, les intégrandes sont continues sur l'intervalle d'intégration *fermé*. Noter la limite nulle en 0 due au fait que $h > 0$.

Cependant, la définition en alternative et notre intention d'effectuer des i.p.p. va nous forcer à faire ces i.p.p au sens généralisé.

1. On a $I_1 = \int_0^1 f(x)dx = -\int x.\ln x\; dx$. (La dernière intégrale est "faussement" généralisée). On effectue l'i.p.p en posant

$$u'(x) = x,\, u(x) = \frac{1}{2}.x^2$$

et

$$v(x) = \ln x,\, v'(x) = \frac{1}{x}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ et donc, en effectuant l,'i.p.p. au sens généralisé, pourvu que les limites du terme de droite existent toutes on aura

$$I_1 = -\left[u(x).v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u(x).v'(x)\; dx = -\left[\frac{1}{2}x^2.\ln x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}.x\; dx$$

Par c.c. en 0, le crochet vaut 0 et on a donc

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{2}.x\; dx = \frac{1}{4}$$

2. Soit $k \geq 1$. On va effectuer le même style d'i.p.p pour avoir la récurrence. On a

$$\begin{aligned} (h+1)H_{h,k} &= \int_0^1 \underbrace{(h+1)x^h}_{u'(x)}.\underbrace{(\ln x)^k}_{v(x)}\; dx \\ &= \left[u(x).v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u(x).v'(x)\; dx \\ &= \left[x^{h+1}(\ln x)^k\right]_0^1 - k.\int_0^1 x^{h+1}.\frac{1}{x}.(\ln x)^{k-1}\; dx \end{aligned}$$

où on a posé

$$u'(x) = (h+1)x^h,\, u(x) = x^{h+1}$$

et

$$v(x) = (\ln x)^k,\, v'(x) = k.\frac{1}{x}.(\ln x)^{k-1}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ et donc, l'i.p.p. au sens généralisé est légitime pourvu que les limites du terme de droite existent toutes. C'est le cas du crochet (qui vaut 0), par croissance comparée en 0 et de l'intégrale qui vaut $H_{h,k-1}$. On a donc

$$(h+1)H_{h,k} = -kH_{h,k-1}$$

3. On a $H_{h,0} = \int_0^1 x^h\; dx = \frac{1}{h+1}$. Et donc (en fixant h, par récurrence sur k, *récurrence dont la rédaction complète est attendue*,

$$\forall h \geq 1, \forall k \geq 1, H_{h,k} = (-1)^k k!(h+1)^{-k-1}$$

4. On a, pour $k \geq 1$,

$$I_k = \frac{(-1)^k}{k!} H_{k,k} = (k+1)^{-k-1} = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$$

Remarque :Il s'agit d'une récurrence bien connue (récurrence « γ ») si l'on ose d'abord un changement de variable généralisé dans $H_{h,k}$ en posant $t = -\ln x$, $x = e^{-t}$, $\frac{dx}{x} = -dt$ et donc (on laisse les détails de justification au lecteur, notamment pour les bornes

$$H_{h,k} = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-(h+1)t}\, dt$$

puis $u = (h+1).t$ donne

$$H_{h,k} = (-1)^k (h+1)^{-(k+1)} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u}\, du$$

Correction Ex.–9 Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ est une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I (qu'il soit ouvert ou fermé), la distance parcourue par le mobile sur la trajectoire γ est par définition

$$D = \int_I |\gamma'(t)|\, dt,$$

cette intégrale étant, au besoin, à prendre au sens des intégrales généralisées [1].

1. Dans le cas où $I = [-\pi, \pi]$, $\gamma(s) = \cos s + i \sin s$, on a

$$\forall s \in I,\, \gamma'(s) = -\sin(s) + i\cos(s)$$

et donc

$$\forall s \in I,\, |\gamma'(s)| = 1$$

et donc

$$D = \int_{-\pi}^{+\pi} 1\, ds = 2\pi$$

2. Dans le cas où $I = \mathbb{R}$,

$$\gamma(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}$$

,

$$\forall t \in I,\, \gamma'(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2} + i\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

et donc

$$\forall s \in I,\, |\gamma'(t)| = \frac{2}{(1+t^2)^2}\sqrt{4t^2 + (1-t^2)^2} = \frac{2}{(1+t^2)^2}\sqrt{(1+t^2)^2} = \frac{2}{1+t^2}$$

et donc (sous réserve de convergence de l'intégrale)

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

et finalement (calcul classique avec arctan),

$$D = 2\pi$$

3. Les deux distances parcourues sont les mêmes. En traçant les courbes sous Python, on voit que dans le premier cas la trajectoire parcourue est tout le cercle (une fois, dans le sens trigo) et que dans le second cas, il s'agit du cercle privé du point d'affixe -1.

Noter que l'on passe d'une intégrale à l'autre par le changement de variable généralisé $t = \tan\frac{s}{2}$, $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\, ds$, *i.e.* $ds = \frac{2}{1+t^2}\, dt$.

1. Si l'intégrale généralisée en question diverge vers $+\infty$, on dit que cette distance est infinie.

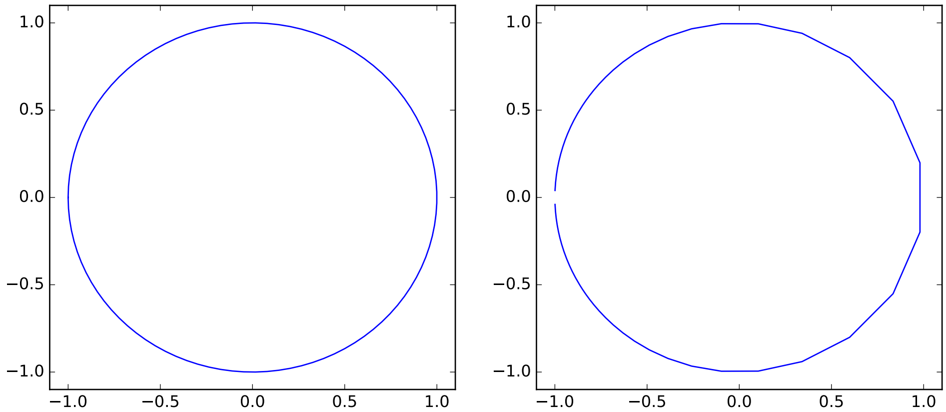

FIGURE 1 – Le cercle de gauche est celui du premier cas, celui de droite du second cas. Celui de droite ne pouvant être tracé sur tout $\mathbb{R}$, on voit qu'il manque une petite portion du côté du point d'affixe -1.

Listing 1 – python/cercles.py

```
#Tracé de deux trajectoires
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#
fig,ax = plt.subplots(1,2,figsize=(12,5))#Préparation fenêtre avec 2 paires d'axes
#premier cas
s=np.linspace(-np.pi,+np.pi,100)
x=np.cos(s)
y=np.sin(s)
plt.sca(ax[0]) #choix du graphique 0 (gauche)
plt.xlim(-1.1,1.1);plt.ylim(-1.1,1.1);
plt.plot(x,y)
#2e cas
t=np.linspace(-50,50,500)
x=(1-t**2)/(1+t**2)
y=2*t/(1+t**2)
plt.sca(ax[1]) #choix du graphique 1 (droite)
plt.xlim(-1.1,1.1);plt.ylim(-1.1,1.1);
plt.plot(x,y)
#Sauvegarde
plt.savefig('cercles.pdf',format='pdf')
plt.show()
```

Correction Ex.–11

1. $A = \int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$.
   (a) L'intégrande $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ est continue sur $[1,+\infty[$. La question de la nature de l'intégrale généralisée en question à un sens, elle a une singularité en $+\infty$.
   (b) (Prospection, au brouillon) L'intégrande $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ est *positive* sur $[1,+\infty[$, de limite 0 en $+\infty$ et on a, lorsque $x \to +\infty$,
   $$\frac{x}{\sqrt{x^3+1}} \sim x.x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$$
   Or $\int^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = +\infty$, on doit s'attendre à une divergence de l'intégrale considérée.
   (c) (Rédaction propre). On a, lorsque $x \to +\infty$,
   $$\frac{x}{\sqrt{x^3+1}} \sim x.x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$$
   et donc, il existe $X_0 \geq 1$ tel que
   $$\forall x \in [X_0,+\infty[,\ \frac{x}{\sqrt{x^3+1}} \geq \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}} \geq 0$$

Or $\int_{X_0}^{+\infty} \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}\ dx$ diverge vers $+\infty$ (une primitive est $\sqrt{x}$, qui a pour limite $+\infty$ en ∞) et donc, par le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées à intégrande positive, $\int_{X_0}^{+\infty} \frac{x\ dx}{\sqrt{x^3+1}}$ diverge (vers $+\infty$) et par CHASLES, il en est de même pour $\int_1^{+\infty} \frac{x\ dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

2. $B = \int_0^{+\infty} t^5.e^{-t^2}\ dt$.
   (a) L'intégrande $t \mapsto t^5.e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. La question de la nature de l'intégrale généralisée en question à un sens, elle a une singularité en $+\infty$.
   (b) (Prospection, au brouillon) L'intégrande $t \mapsto t^5.e^{-t^2}$ est *positive* sur $[0,+\infty[$, de limite 0 en $+\infty$ et on a, lorsque $t \to +\infty$,
   $$t^5.e^{-t^2} = o\left(e^{-t}\right)$$
   Or $\int^{+\infty} e^{-t}\ dt$ CV, on doit s'attendre à une convergence de l'intégrale considérée.
   (c) (Rédaction propre). On a, lorsque $t \to +\infty$, par croissance comparées,
   $$\frac{t^5.e^{-t^2}}{e^{-t}} \to 0$$
   et donc, il existe $T \geq 1$ tel que
   $$\forall x \in [T,+\infty[\,, 0 \leq t^5.e^{-t^2} \leq e^{-t}$$
   Or $\int_T^{+\infty} e^{-t}\ dt$ converge (vers e^{-T}) et donc, par le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées à intégrande positive, $\int_T^{+\infty} t^5.e^{-t^2}\ dt$ converge et par CHASLES, il en est de même pour $\int_0^{+\infty} t^5.e^{-t^2}\ dt$.

3. $C = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.
   (a) L'intégrande $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $]0,1[$ (elle tend vers $+\infty$ à chacune des extrémités), il est légitime de considérer la question de la convergence de l'intégralisée qui a deux singularités, l'une en 0, l'autre en $+1$. On traite la nature de chacune des intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}}$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1$ séparémment.
   (b) Convergence de $\int_0^{\frac{1}{2}}$ ....
   — (Au brouillon) L'intégrande est positive sur l'intervalle d'intégration, en 0, on a $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, or $\int_0^{*} x^{-\frac{1}{2}}\ dx$ est convergente et donc on doit s'attendre à la convergence de l'intégrale considérée.
   — (Au propre). On a, car, si $0 < x < \frac{1}{2}$, $\sqrt{1-x} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$,
   $$\forall x \in \left]0,\frac{1}{2}\right],\ 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \leq \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$
   Or l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$ est convergente (une primitive de l'intégrande est $Cst \times \sqrt{x}$, qui a une limite en 0^+)et donc, par le théorème de comparaison pour les IG à intégrande positive, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ est convergente.
   (c) Convergence de $\int_{\frac{1}{2}}^1$ .... Sur le même modèle, on a
   $$\forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right[,\ 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \leq \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$
   Or l'intégrale généralisée $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\ dx$ est convergente (une primitive de l'intégrande est $Cst \times \sqrt{1-x}$, qui a une limite en 1^-)et donc, par le théorème de comparaison pour les IG à intégrande positive, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ est convergente.
   (d) Convergence de $C = \int_0^1$ .... Comme $\int_{\frac{1}{2}}^1$ ... et $\int_0^{\frac{1}{2}}$ ... sont convergentes, par définition (et CHASLES), l'intégrale généralisée a deux singularités, $\int_0^1$ ... est convergente.

4. $D = \int_1^{+\infty} \sin t.e^{-2t}\ dt$.
   (a) L'intégrande $t \mapsto \sin t.e^{-2t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. La question de la nature de l'intégrale généralisée en question à un sens, elle a une singularité en $+\infty$.
   (b) (Prospection, au brouillon) L'intégrande $t \mapsto \sin t.e^{-2t}$ change de signe indéfiniment sur $[0,+\infty[$, de limite 0 en $+\infty$ et on a
   $$\left|\sin t.e^{-2t}\right| \leq e^{-2t}$$
   Or $\int^{+\infty} e^{-2t}\ dt$ CV, on doit s'attendre à une convergence *absolue* de l'intégrale considérée.

(c) (Rédaction propre). On a, du fait que $|\sin t| \leq 1$,

$$\forall t \geq 0, 0 \leq \left|\sin t . e^{-2t}\right| \leq e^{-2t}$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\, dt$ converge (vers $\frac{1}{2}$) et donc, par le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées à intégrande positive, $\int_0^{+\infty} \left|\sin t . e^{-2t}\right|\, dt$ converge et par le théorème $ACV \Rightarrow CV$, $\int_0^{+\infty} \sin t . e^{-2t}\, dt$ est convergente.

Remarques :

— On a de plus, le nombre $\int_0^{+\infty} \sin t . e^{-2t}\, dt$ étant bien défini par ce qui vient d'être dit, que

$$\left|\int_0^{+\infty} \sin t . e^{-2t}\, dt\right| \leq \frac{1}{2}$$

— On peut mener le calcul exact de cette intégrale (en passant en complexes ou par deux ipp), ce n'est pas la question ici.

5. $E = \int_0^1 \frac{\sin x - x}{1 - \cos x}\, dx$.

(a) L'intégrande $x \mapsto \frac{\sin x - x}{1-\cos x}$ est continue sur $]0,1]$, car, sur cet intervalle $1 - \cos x$ ne s'annule pas(annulation pour $x = 0$ puis $x = 2.\pi > 1$. La question de la nature de l'intégrale généralisée en question à un sens, elle a *a priori* une singularité en 0.

(b) Examinons le comportement de l'intégrande en 0. On a, lorsque $x \to 0$,

$$\sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

et donc

$$\frac{\sin x - x}{1 - \cos x} \sim -\frac{1}{3}x \to 0^+$$

L'intégrande se prolonge par continuité en 0^+. On a onc affaire à une intégrale faussement généralisée (elle est convergente, c'est une intégrale classique)