Notes de cours BCPST1

Fonctions réelles de deux variables réelles

Table des matières

1 Définir et représenter une fonction de deux variables réelles.

Définition 1. — *Une fonction (à valeur) réelle de deux variables réelles est une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}^2$.*

— *Le graphe d'une telle fonction est la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par*

$$G_f = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R},\ z = f(x, y)\}$$

— *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau λ est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$L_{\lambda,f} = \{(x, y) \in D,\ f(x, y) = \lambda\}$$

— *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble de surniveau λ est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$S_{\lambda,f} = \{(x, y) \in D,\ f(x, y) > \lambda\}$$

Des exemples par ordre de complexité croissante (en fixant une partie D de $\mathbb{R}^2$) :

— Fonctions constantes $f(x, y) = a$;

— Fonctions affines $f(x, y) = a.x + by + c$;

— Fonctions (polynomiales) quadratiques $f(x, y) = a.x^2 + b.y^2 + c.x.y$

— Fonctions polynomiales $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i.y^j$, combinaisons linéaires des monômes $(x, y) \in D \mapsto x^i.y_j$ où $i, j \in \mathbb{N}$;

— Fonctions définies par composition à gauche avec une fonction de variable réelle, p.ex. $(x, y) \in D \mapsto e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$. Ce type de formule peut donner lieu à des problèmes d'*ensemble de définition*, d'où la possibilité de restreindre le domaine de définition à une partie D de $\mathbb{R}^2$.

On peut représenter graphiquement une fonction réelle de deux variables réelles par représentant son graphe (en général une surface dans $\mathbb{R}^3$ et donc en 3D [1]) ou, à la manière d'une carte topographique, en 2D, en zonant le plan par lignes et ensembles de sur-(sous)-niveau pertinents.

Exemples : affines, quadratiques, à la machine carte topographique.

FIGURE 1 – Les lignes de niveau sur une carte topographique.

2 Limites et continuité.

Il y a pour les fonctions de deux variables réelles une notion de limite en un point (x_0, y_0) du plan, variante de la notion de limite d'une fonction d'une variable réelle en un point x_0 de la droite.

Cette notion est *stricto sensu* hors de notre programme mais sans y faire allusion, on ne peut pas comprendre le reste du discours.

1. Mettez vos lunettes !

La distance entre deux arguments de la fonction n'est plus mesurée par la valeur absolue de la différence mais par la norme (euclidienne) de la différence et mène à la définition suivante :

Définition 2. *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, ℓ un nombre réel, (x_0, y_0) un point du plan. On dit que f admet pour limite ℓ en (x_0, y_0), ce que l'on note*

$$f(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} \ell,$$

si

$$\begin{aligned}&\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in D,\\ &\qquad 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \eta \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \epsilon\end{aligned}$$

Remarques :

1. On peut toujours se ramener à zéro par une translation, on a en effet equivalence entre (on pose $x = x_0 + h, y = y_0 + k$)
$$f(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} \ell,$$
$$f(x_0+h, y_0+k) \overset{(h,k)\to(0,0)}{\to} \ell,$$
$$f(x_0+h, y_0+k) - \ell \overset{(h,k)\to(0,0)}{\to} 0.$$
2. La définition de limite n'a d'intérêt que pour les points (x_0, y_0) qui sont « proches » de D (on dit « adhérents » à D) qui vérifient
$$\forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in D,\ 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \eta$$
3. Comme dans le cas d'une fonction de variable réelle, on a unicité de la limite sous réserve d'existence ;
4. Comme dans le cas d'une fonction de variable réelle, on a compatibilité de l'opération de limite avec les opérations algébriques et la composition à gauche par une fonction d'une variable réelle, p.ex.
   (a) Si $f, g : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, si
   $$f(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} \ell_f \text{ et } g(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} \ell_g$$
   alors
   $$f(x,y) + g(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} \ell_f + \ell_g \text{ et } f(x,y).g(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} \ell_f.\ell_g$$
   (b) Si $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, si
   $$f(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} \ell_f,\ \boxed{\ell_f \neq 0}$$
   alors
   $$\frac{1}{f(x,y)} \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} \frac{1}{\ell_f}$$

(c) Si $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, si

$$f(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} \ell_f,\ \boxed{\ell_f > 0}$$

alors

$$\ln f(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} \ln \ell_f$$

NB : Dans ce cas, la fonction $\ln f$ n'est pas forcément définie sur tout D, elle est cependant définie en tout (x, y) suffisamment proche de (x_0, y_0).

La question de la position du point (x_0, y_0) relativement à l'ensemble D amène à s'intéresser aux points (x_0, y_0) qui sont « intérieurs » à D, *i.e.* tels qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \eta_0 \Rightarrow (x,y) \in D$$

Un ensemble D dont tous les points sont intérieurs à D est appelé un ensemble *ouvert dans* $\mathbb{R}^2$ et le seul exemple que nous ayons au programme est l'exemple des *pavés ouverts*, *i.e.* les parties de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la forme $I \times J$ où I et J sont des intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$. (Dessins ! ! !)

Une fois la définition de limite posée, les définitions de continuité d'une fonction en un point et de continuité sur une partie de $\mathbb{R}^2$ s'ensuivent comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle. Les résultats de stabilité de la continuité par opérations algébriques, composition à gauche par une fonction d'une variable réelle continue sont les mêmes que dans le cas des fonctions d'une variable réelle.

Définition 3. — *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in D$. On dit que f est continue en (x_0, y_0) si*

$$f(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} f(x_0,y_0)$$

— *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2$ et $P \subset D$. (Le programmme nous impose de travailler sur P, un pavé ouvert) On dit que f est continue sur P si f est continue en tout $(x_0, y_0) \in P$. On note ce fait par la locution « f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur P ».*

La continuité de f au point $(0, 0)$ est équivalente à l'existence du DL à l'ordre 0 en (x_0, y_0) :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + o(1)$$

où $o(1)$ est une fonction de limite 0 lorsque $(h, k) \to (0, 0)$.

Exemples pour l'établissement d'une continuité par analyse des opérations et compositions présentes dans une formule) :

— (Admis) Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Les exemples les plus simples sont les constantes $(x, y) \mapsto a$ et les fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$.

— De ceci, on déduit qu'une composée de fonction d'une variable réelle continue sur $\mathbb{R}$ par une fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par exemple $(x, y) \mapsto e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

— Plus généralement, si la composition « se passe bien », on a continuité de la fonction composée. Par exemple

$$f : (x, y) \in D \mapsto \ln(1 - (x^2 + y^2))$$

est continue sur tout pavé ouvert contenu dans le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\}$. En effet, soit P un tel pavé ouvert.

1. La fonction $p : (x, y) \mapsto 1 - (x^2 + y^2)$ est continue sur P car elle y est polynomiale. Elle y est à valeurs dans $]0, +\infty[$.
2. La fonction $\ln$ est $\mathscr{C}^0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. $f = \ln \circ p$ est donc continue sur P.

3 Différentier une fonction de deux variables réelles.

3.1 Ce qu'on veut faire

La question de la différentiabilité d'une fonction de deux variables en un point (x_0, y_0) est la question [2] de l'existence d'un DL d'ordre 1 en (x_0, y_0), *i.e.* la question de l'existence de a et b tels que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + a.h + b.k + o\left(\|(h, k)\|\right)$$

où $o\left(\|(h, k)\|\right)$ est une fonction (infinment petit d'ordre 1) telle que

$$\frac{o\left(\|(h,k)\|\right)}{\|(h,k)\|} \overset{(h,k)\to(0,0)}{\to} 0$$

Il s'agit de la possibilité d'approximer $f(x, y)$ au voisinage de (x_0, y_0) par une fonction affine de deux variables.

En physique on note $h = dx$, l'accroissement de la variable x, $k = dy$, l'accroissement de la variable y, et on écrit

$$f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + a.dx + b.dy \text{ à l'ordre 1}$$

Une remarque de notation importante : En mathématiques, usuellement, les lettres utilisées pour définir une fonction n'ont pas d'importance (invariance d'une proposition logique par substitution de noms de variables muettes) et les deux définitions de la fonction f par

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^2 + 2.y^2$$

et

$$\forall(s, t) \in \mathbb{R}^2,\ f(s, t) = s^2 + 2.t^2$$

sont logiquement strictement identiques.

Pour les fonctions de deux variables, nous faisons une entorse à cette règle ! ! ! Cette entorse, bien comprise, amène des simplifactions d'écriture notable (attention à lever les ambiguités) et est compatible avec l'usage en physique ou en théorie des équations différentielles. On dira donc soit f la fonction des deux variables x et y définie par la formule $f(x, y) = ..$ en n'oubliant pas les lettres ayant servi à cette définition.

3.2 Dérivées partielles

Etant donnée une fonction f des deux variables réelles x et y définie par $f(x, y) = ...$ pour $(x, y) \in P$, où $P = I \times J$ est un pavé ouvert dans $\mathbb{R}^2$, on peut, pour chaque point $(x_0, y_0) \in P$, définir deux fonctions d'une variable réelle, les fonctions partielles.

- La fonction partielle $f_{y=y_0}$ est fonction de la variable réelle x définie par $f_{y=y_0}(x) = f(x, y_0)$. (On maintient donc y constant à y_0). C'est une fonction définie sur l'intervalle ouvert I : $f_{y=y_0} : I \to \mathbb{R}$.
- La fonction partielle $f_{x=x_0}$ est fonction de la variable réelle y définie par $f_{x=x_0}(y) = f(x_0, y)$. (On maintient donc x constant à x_0). C'est une fonction définie sur l'intervalle ouvert J : $f_{x=x_0} : J \to \mathbb{R}$.

2. Ce n'est pas une limite de taux d'accroissement ! !

On note, sous réserve d'existence des nombres dérivés incriminés,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y=y_0}(x_0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x=x_0}(y_0)$$

De la sorte (imaginons qu'il n'y a jamais de réserve lorsque (x_0, y_0) est un point quelconque de P ! !), on définit deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ des deux variables x et y. Ce sont les deux dérivées partieles de f.

Exemples de calcul. D'un point de vue pratique, pour calculer les dérivées partielles d'une fonction f, on laisse tomber les indices $x_0 \to x$, $y_0 \to y$.

Exos.

Proposition-Définition 4. *Soit $f : P = I \times J = \{(x, y),\ x \in I,\ y \in J\} \to \mathbb{R}$ une fonction des deux variables réelles x et y ; Si les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bien définies sur P et y sont de classe $\mathscr{C}^0$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur P. Dans ce cas, en tout $(x_0, y_0) \in P$, on a le DL1*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).k + o\left(\|(h, k)\|\right)$$

La formule précédente s'écrit, en physique,

$$f(x + \delta x, y + \delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).\delta x + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).\delta y \text{ à l'ordre 1}$$

ou encore plus résumé (on oublie totalement la référence au point), en notant $\delta f(x, y) = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y)$,

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}.\delta x + \frac{\partial f}{\partial x}.\delta y \text{ à l'ordre 1}$$

3.3 Extrema

Proposition-Définition 5 (Principe de FERMAT)**.** *Si $f : D \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur le pavé ouvert $P \subset D$ admet un extremum en $(x_0, y_0) \in P$ alors le point (x_0, y_0) est critique pour f, i.e. , par définition*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \textit{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Exemples.

Les points critiques d'une fonction de deux variables sont extrêmement important pour la représentation d'une telle fonction. Dans les tracés par lignes de niveau, on s'attache à

— Déterminer les points critiques (dans beaucoup de cas, ils sont en nombre fini mais il peut y avoir des lignes critiques, des aires critiques) et les valeurs de la fonction f en chacun de ces points. Ces valeurs sont appelées *valeurs critiques* de f ;

— Pour chaque valeur critique λ de f, représenter la ligne de niveau λ. Le dessin de ces lignes de niveau forme un « puzzle » dans le plan.

4 Composition avec une trajectoire paramétrée.

Nous avons beaucoup parlé de composition à gauche par une fonction d'une variable réelle. On peut composer à droite une fonction de deux variables réelles par un couple de fonctions réelles d'une variable réelle. Etant données

$$f : (x, y) \in I \times J \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R},\ X : t \in T \mapsto X(t) \in I,\ Y : t \in T \mapsto Y(t) \in J$$

où I, J, T sont des intervalles (ouverts) de $\mathbb{R}$, on peut définir

$$h = f(X, Y) : t \in T \mapsto f(X(t), Y(t)) \in \mathbb{R}$$

Pour illustrer ceci, si on pense à une fonction f représentée par une carte topographique d'une région, la valeur de f en (x, y) étant l'altitude au point de coordonnées (x, y), $X(t), Y(t)$ décrit les coordonnées d'un promeneur à l'instant t alors $h(t) = f(X(t), Y(t))$ est l'altitude du promeneur à l'instant t.

Théorème 6. *Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur P, X et Y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur T alors h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur T avec*

$$\forall t \in T,\ h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t)).X'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t)).Y'(t)$$

En physique, ceci se réécrit en termes de variables physiques : F une variable dépendant de x et y ($F = f(x, y)$, x, y des variables dépendant de la variable t alors

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

Que signifie cette formule si le promeneur (un peu fatigué) se promène dans la ligne de niveau ?

Que signifie cette formule si le promeneur (très en forme) veut monter le plus rapidement possible ?

Démonstration. On utilise des DL1 et la caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un DL1. Soit $t_0 \in T$, $x_0 = X(t_0)$, $y_0 = Y(t_0)$, on a, pour δt suffisamment proche de 0,

$$\begin{aligned}
X(t_0 + \delta t) &= x_0 + \underbrace{X'(t_0).\delta t + o(\delta t)}_{\delta x} \\
Y(t_0 + \delta t) &= x_0 + \underbrace{Y'(t_0).\delta t + o(\delta t)}_{\delta y} \\
f(t_0 + \delta t) &= f(X(t_0 + \delta t), Y(t_0 + \delta t)) \\
&= f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) \\
&= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).\delta y + o\left(\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}\right) \\
&= f(x_0, y_0) + \\
&\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).X'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).Y'(t_0)\right).\delta t \\
&\quad + \text{Reste}(\delta t)
\end{aligned}$$

Et, pourvu que l'on vérifie que $\text{Reste}(\delta t) = o(\delta t)$, on vient d'obtenir un DL d'ordre 1 de h en t_0 qui montre que h est dérivable en t_0 avec nombre dérivé

$$h'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).X'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).Y'(t_0).$$

□

5 Dérivées secondes ; Le théorème de SCHWARZ.

Définition 7. *Si $f : D \to \mathbb{R}$, où $P \subset D$ est un pavé ouvert, est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur P telle que les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont elle-même de classe $\mathscr{C}^1$ sur P, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur P.*

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur P, on peut définir quatre dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}, \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}, \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}, \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y},$$

notées respectivement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Le remarquable théorème de SCHWARZ affirme que :

Théorème 8 (SCHWARZ)**.** *Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur P, alors, sur P :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, .$$

On peut vérifier que ce résultat, valable pour des fonctions très abstraites, sans formule *a priori* , se vérifie aisément pour des monômes, des fonctions polynômiales, des composées à gauche par des fonctions d'une variable réelle, etc...(Exemples ! ! !)

Exercice 1.—On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3 + x.y$$

1. Déterminer les points critiques de f. Quelles sont les valeurs critiques ?
2. Effectuer le changement de variables $x = u + v$, $y = u - v$ et déterminer la fonction g telle que $g(u, v) = f(x, y)$.
3. Déterminer la ligne de niveau $+\frac{1}{27}$ de g, puis celle de f. (On remarquera la factorisation $\frac{1}{27} - 2u^3 - 3u^2 = -\frac{1}{27}(3u + 1)^2(1 - 6u)$.)
4. Déterminer la ligne de niveau 0 de g en l'écrivant sous forme de réunion de deux graphes du type $v = \pm h(u)$ où h est une fonction réelle de variable réelle à déterminer. Tracer cette ligne de niveau dans le plan munis d'un système d'axes (u, v). (Attn : les calculs à la main sont un peu enlevés, on peut faire le tracé à la machine, les abscisses $u = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}$, 0 et $\frac{1}{6}$ jouent des rôles particuliers.)
5. Comment en déduire le dessin des lignes de niveau critique de f ?

Exercice 2.—Démontrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \ln(x^2 + 2.y^2 + 1)$$

est définie, continue, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses dérivées partielles et dérivées partielles secondes.

Exercice 3.—Démontrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, t) = e^{-4t} \cos(2x)$$

est définie, continue, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses dérivées partielles. Calculer $\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Exercice 4.—On considère la fonction $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t}}$.

Justifier rapidement le caractère $\mathscr{C}^1$ de f sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t), \frac{\partial f}{\partial t}(x,t),$$

et trouver la constante c telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c.\frac{\partial f}{\partial t}$.

Exercice 5.—Déterminer les points critiques sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ ou $g : (x,y) \mapsto x^2.y - x.y^2$.

Est-ce que ce sont des extrema locaux ?

Indication:Dans chaque cas, si (x_0, y_0) est critique, tracer la ligne de niveau contenant le points critique et marquer les zones délimités suivant le signe de $g(x,y) - g(x_0, y_0)$. Faire une justification graphique claire.

Exercice 6.—Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \neq (0,0), \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right.$$

Exercice 7.—Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \neq (0,0), \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right.$$

Indication:Y a t'il des solutions ? Penser au théorème de SCHWARZ.