
Notes de cours 04

Equations différentielles: compléments

Table des matières

1 Outils indispensables	1
1.1 Courbes paramétrées.	1
1.2 Fonctions de plusieurs variables réelles.	4
2 EDO, suites récurrentes et résolutions numériques	9
2.1 Introduction	9
2.2 Le schéma d'EULER explicite- cas autonome	12
2.3 Exemples	13
2.4 Variantes, cas non autonomes	23
3 EDO d'ordre 1 à variables séparées	27
3.1 Contexte, forme générale	27
3.2 Méthode abstraite de résolution	27
3.3 Exercices.	35
4 Quantités conservées : systèmes du premier ordre	37
4.1 Equation du ressort et énergie mécanique	37
4.2 Equation du pendule et énergie mécanique	39
4.3 Le pendule, un complément hors programme	40
4.4 Exercice(s).	42
4.5 Dyn. pop. :Modèle de LOTKA-VOLTERRA (1928)	43
5 Equations aux dérivées partielles	47
5.1 Equations de transport	47
5.2 Equation de la chaleur	48

1 Outils indispensables

1.1 Courbes paramétrées.

Les courbes paramétrées ne sont, en tant que telles, pas au programme officiel de Math., pour une raison mystérieuse. Cependant, elles sont au programme de Physique (description de trajectoires en mécanique) et sont un outil indispensable pour la compréhension des systèmes d'équations différentielles.

On se limite aux courbes planes. En quelques mots la situation :

1. Etant donnés un intervalle I de \mathbb{R} non trivial, deux fonctions $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$, continues sur I , on peut les accoupler pour former la fonction $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in I, \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

Une telle fonction s'appelle une *courbe paramétrée* dans le plan \mathbb{R}^2 . A titre d'exemple connu, la donnée d'une droite sous forme paramétrique $((a, c) \in \mathbb{R}^2, (a, c) \neq 0, (b, d) \in \mathbb{R}^2)$,

$$\begin{cases} x = a.t + b \\ y = c.t + d \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est en fait la donnée de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = (a.t + b, c.t + d)$$

2. Représentation graphique et Python. La commande `plot` de la librairie Python `matplotlib.pyplot` est faite pour tracer des courbes paramétrées. Le code Python suivant (à essayer)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
t=np.linspace(-np.pi, np.pi, 100)
x=np.exp(-t)*np.cos(t)
y=np.exp(-t)*np.sin(t)
plt.figure()
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

trace une représentation graphique de la courbe $\gamma : t \in [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t))$$

3. La trajectoire de la courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est $\gamma(I)$, un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . Il s'agit de l'ensemble

$$\gamma(I) = \{\gamma(t), t \in I\} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2, \exists t \in I, (X, Y) = \gamma(t)\}$$

Le tracé de $\gamma(I)$ est un ensemble de points (une courbe), la courbe paramétrée γ contient de plus l'information sur la façon dont est parcourue cette courbe. Une représentation graphique complète de γ devrait comporter une indication sur la correspondance entre t et le point $(x(t), y(t))$ de la trajectoire (Labeliser certains points).

4. Noter que le graphe d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est la trajectoire de la courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in I, \gamma(t) = (t, f(t))$$

Ceci explique notre utilisation habituelle de `plot` pour tracer des graphes de fonctions.

5. Si $\forall t \in I, \gamma(t) = (x(t), y(t))$ où les fonctions $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur I , on dit que la courbe γ est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
6. Si γ est une courbe de classe \mathcal{C}^1 , en dérivant les composantes de γ , on obtient la fonction $v = \gamma'$ définie par

$$\forall t \in I, \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

En cinématique, si t est la variable de temps et γ décrit la trajectoire d'un mobile, $v(t)$ est la vitesse (vectorielle) à l'instant t . La norme de $v(t)$ est la vitesse « au compteur ».

7. Si $v(t)$ est non nul, la droite passant par $\gamma(t)$, de vecteur directeur $v(t)$ est dite tangente à la courbe paramétrée à l'instant t .
8. Une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I dont la vitesse v ne s'annule jamais est dite *régulière*.

Listing 1 – python/essai-courbe-vecteurs.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
t=np.linspace(-np.pi,np.pi,1000)
x=np.exp(-t)*np.cos(t)
y=np.exp(-t)*np.sin(t)
xp = -x-y #la dérivée de x s'exprime en fonction de x et y
yp = x-y #la dérivée de y s'exprime en fonction de x et y
plt.figure()
plt.plot(x,y)
#Pour tracer des flèches, basées en (x,y), dirigées par (x',y')
#Une tous les 50 points
plt.quiver(x[::50],y[::50],xp[::50],yp[::50], \
          units="dots",angles="xy",scale_units="xy",scale=10)
plt.show()
```

Le code Python précédent (à essayer) trace une représentation graphique de la courbe $\gamma : t \in [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t))$$

avec représentation de la vitesse par des flèches. (La fonction `quiver` n'est pas à connaître, c'est elle qui dessine les flèches).

Exemples géométriques élémentaires :

- Paramétrage d'une droite $\gamma(t) = A + t \cdot \vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$ où A est un point de la droite, \vec{v} un vecteur directeur.
- Paramétrages d'un cercle. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$.
 - Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall \theta \in I, \gamma(\theta) = (x_0 + R \cos(\theta), y_0 + R \sin(\theta))$$

La courbe paramétrée γ a pour trajectoire un arc de cercle contenu dans le cercle de centre (x_0, y_0) , de rayon R .

- Soit $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{\gamma}(t) = \left(x_0 + R \frac{1-t^2}{1+t^2}, y_0 + R \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

La courbe paramétrée $\tilde{\gamma}$ a pour trajectoire le cercle de centre (x_0, y_0) , de rayon R , privé du point le plus à l'ouest. Si on restreint $\tilde{\gamma}$ à un intervalle J contenu dans \mathbb{R} , la trajectoire est un arc de cercle.

On peut reparamétriser la trajectoire d'une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t)$ en effectuant changement de variable.

- Soit J un intervalle de \mathbb{R} et $\phi : J \rightarrow I$ une bijection strictement monotone. La courbe (l'arc) paramétrée $\tilde{\gamma}$ définie par

$$\forall s \in J, \tilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi(s))$$

a même trajectoire que γ . Au sens de la physique, on a posé $t = \phi(s)$.

— Si ϕ est de classe \mathcal{C}^1 , ϕ' ne s'annule pas sur J et γ est une courbe \mathcal{C}^1 , régulière alors $\tilde{\gamma}$ l'est aussi.

Exercice 1.—(Paramétrage par la longueur d'arc, utilisation systématique en physique). Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma = (x, y)$, une courbe \mathcal{C}^1 , régulière, $t_0 \in I$. On définit la longueur d'arc parcouru de t_0 à $t \in I$ par

$$s = \psi(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)} d\tau$$

1. Montrer que ψ ainsi définie est une fonction de classe \mathcal{C}^1 strictement croissante sur l'intervalle I , dont la dérivée ne s'annule pas sur I .

2. Justifier que $J = \psi(I)$ est un intervalle, que ψ définit une bijection $I \rightarrow J$ et que la bijection réciproque $\phi : J \rightarrow I$ est de classe \mathcal{C}^1 et donner une formule pour sa dérivée en $s = \psi(t)$.

3. On définit $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{\gamma} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, par

$$\forall s \in J, \tilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi(s))$$

Démontrer que

$$\forall s \in J, \tilde{x}'^2(s) + \tilde{y}'^2(s) = 1$$

4. Interprétation cinématique ?

1.2 Fonctions de plusieurs variables réelles.

Les fonctions de deux variables réelles, à valeurs réelles sont au programme. Voici un résumé de ce qui est à connaître.

— Un pavé ouvert dans \mathbb{R}^2 est un sous-ensemble de la forme $I \times J \subset \mathbb{R}^2$ où I et J sont deux intervalles non triviaux de \mathbb{R} .

— On définit la continuité d'une fonction f en un point $(x_0, y_0) \in I \times J$ d'un pavé ouvert de \mathbb{R}^2 en demandant que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

— Les deux dérivées partielles d'une telle fonction f sont définies (sous réserve d'existence des limites incriminées par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

D'un point de vue pratique, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, on dérive la fonction d'une variable réelle $x \mapsto f(x,y)$ en considérant y comme une constante.

— Principe de FERMAT. Si une fonction f définie sur $I \times J$ admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in I \times J$ et y admet des dérivées partielles alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Un tel point (x_0, y_0) où les deux dérivées partielles s'annulent est dit *critique* pour f . En un point critique de f , il n'y a pas forcément d'extremum local, comme le montre l'exemple $(x,y) \mapsto x.y$ pour lequel $(0,0)$ est critique sans que f y admette un extremum local (exemple de point *col*).

- Une fonction $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times J$ si
 1. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $I \times J$.
 2. Ces fonctions sont continues sur $I \times J$.
- Une fonction $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe \mathcal{C}^2 sur $I \times J$ si
 1. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $I \times J$.
 2. Ces fonctions sont \mathcal{C}^1 sur $I \times J$.
- En exemples typiques, les fonctions monômes, pour $m, n \in \mathbb{N}$, $M_{m,n} : (x, y) \mapsto x^m \cdot y^n$ sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 , on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial M_{m,n}}{\partial x}(x, y) = m \cdot x^{m-1} \cdot y^n, \text{ et } \frac{\partial M_{m,n}}{\partial y}(x, y) = n \cdot x^m \cdot y^{n-1}$$

et

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 M_{m,n}}{\partial x^2}(x, y) &:= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{m,n}}{\partial x} \right) (x, y) = m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} \cdot y^n, \\ \frac{\partial^2 M_{m,n}}{\partial y^2}(x, y) &:= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{m,n}}{\partial y} \right) (x, y) = n \cdot (n-1) \cdot x^m \cdot y^{n-2}, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial^2 M_{m,n}}{\partial y \partial x}(x, y) &:= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{m,n}}{\partial x} \right) (x, y) = m \cdot n \cdot x^{m-1} \cdot y^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{m,n}}{\partial y} \right) (x, y) =: \frac{\partial^2 M_{m,n}}{\partial x \partial y}(x, y) \end{aligned}$$

- Il y a *a priori* 4 dérivées partielles, mais...en général, on a (théorème de SCHWARZ), si f est \mathcal{C}^2 sur $I \times J$,

$$\forall (x, y) \in I \times J, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

- L'ensemble des fonctions \mathcal{C}^0 (resp. \mathcal{C}^1 , \mathcal{C}^2) sur un pavé $I \times J$ est stable par
 - Combinaisons linéaires. Par exemple, une combinaison linéaire des monômes $M_{m,n}$, une *fonction polynomiale* en deux variables est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .
 - Produit.
 - Quotient, *pourvu que le dénominateur ne s'annule pas sur $I \times J$*
 - Composition à gauche par une fonction de variable réelle, de même régularité, *pourvu que « la composition se passe bien »*. Par exemple,
 - La fonction (non nommée)

$$(x, y) \mapsto e^{x^2 \cdot y^3 + x \cdot y}$$

est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 en tant que composée de $z \in \mathbb{R} \mapsto e^z$, \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , avec la fonction polynomiale $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 \cdot y^3 + x \cdot y \in \mathbb{R}$, \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

- La fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^4}$ est continue sur \mathbb{R}^2 en tant que composée de $z \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{z}$, continue sur \mathbb{R}^+ , avec la fonction polynomiale $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^4 \in \mathbb{R}^+$, continue sur \mathbb{R}^2 .
- Le même argument ne tient pas pour le caractère \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 car $z \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{z}$ n'est pas \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$.
- En revanche, la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur (par exemple) le pavé $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, en tant que composée de $z \in]0, +\infty[\mapsto \sqrt{z}$, \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$, avec la fonction polynomiale $(x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \mapsto x^2 + y^4 \in]0, +\infty[$, \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

En termes de représentation graphique que ce soit à la main ou à la machine, on peut représenter des *lignes de niveau* d'une fonction $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$, i.e. pour une famille de nombres réels λ bien choisis, les ensembles

$$L_{f=\lambda} := \{(x, y) \in I \times J, f(x, y) = \lambda\}$$

Une telle ligne de niveau est une représentation cartésienne d'un certain ensemble du plan.

Listing 2 – python/essai-lignes-niveau.py

```
#Pour tracer des lignes de niveau
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x, y):
    return y**3 - x*(x-1)
x=np.linspace(-1, 2, 50)
y=np.linspace(-2, 2, 50)
X,Y=np.meshgrid(x, y)
Z=f(X, Y)
lambada=[-1, 0, 0.25, 1] #les niveaux voulus. 0.25 niveau du point critique
plt.figure()
CS=plt.contour(X, Y, Z, lambada)
plt.clabel(CS, inline=1, fontsize=10)#pour placer niveaux sur lignes
plt.show()
```

Le code Python précédent (à essayer) trace des lignes de niveau choisies pour la fonction f définie par

$$f(x, y) = y^2 - x.(x - 1)$$

dont le seul point critique est $(\frac{1}{2}, 0)$.

Cette représentation en lignes de niveau est bien entendu réminiscente des lignes de niveau d'altitude sur une carte de randonnée.

Concluons sur la formule *indispensable* de dérivation d'une composition à droite.

Théorème 1. *Hypothèses :*

- Soit $I \times J$ un pavé ouvert dans \mathbb{R}^2 , $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times J$.
- Soit $\gamma : t \in L \mapsto \gamma(t) = (X(t), Y(t))$ une courbe paramétrée \mathcal{C}^1 sur l'intervalle (non trivial) L , dont la trajectoire est contenue dans $I \times J$

Conclusion :

- La fonction $F = f \circ \gamma : L \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\forall t \in L, F(t) = f(X(t), Y(t))$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur L

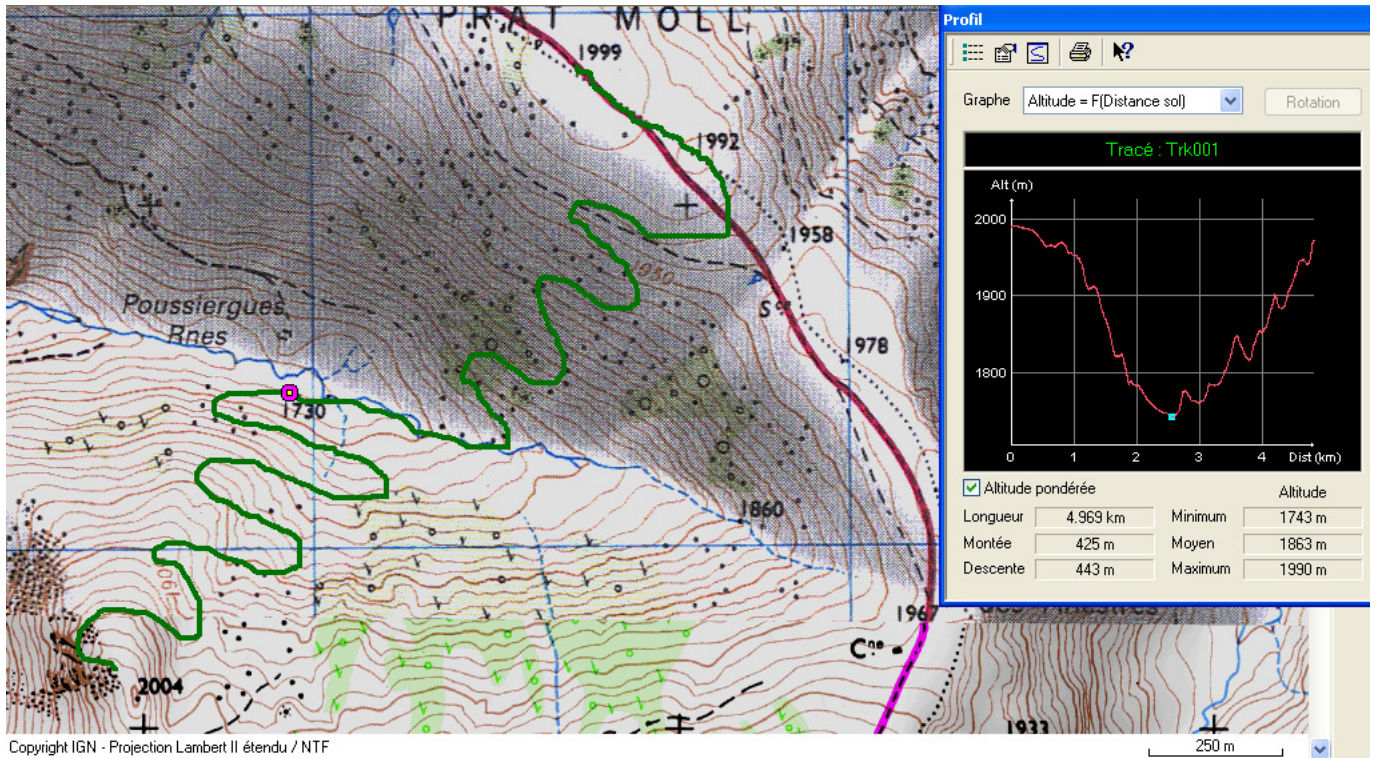


FIGURE 1 – Carte IGN, lignes de niveau

— et sa dérivée est donnée par la formule

$$\forall t \in L, F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t)) \cdot X'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t)) \cdot Y'(t)$$

Dans les notations classiques de la physique, ceci se réécrit, par, sur L

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) \cdot \frac{dX}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(X, Y) \cdot \frac{dY}{dt}$$

On rappelle que le gradient de f en (x, y) est le vecteur « colonne » noté $\nabla_{(x,y)} f$ défini par

$$\nabla_{(x,y)} f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

La conclusion du théorème s'écrit donc

$$\frac{dF}{dt} = \left\langle \nabla_{(X,Y)} f, \begin{pmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{pmatrix} \right\rangle$$

où $\langle U, V \rangle$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs U et V de \mathbb{R}^2 .

A titre d'exemple, sur la figure 1 sont tracés

— Sur le plan de la carte, la représentation en lignes de niveau de l'altitude f en fonction de coordonnées (x, y) ;

- en vert, la trajectoire (vue de haut d'une ballade en montagne), *i.e.* une courbe paramétrée γ sur le plan de la carte ;
- Dans la fenêtre, le graphe de la fonction réelle de variable réelle $F = f \circ \gamma$.

Une conséquence géométrique importante est la suivante.

Si γ est une courbe régulière de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle L dont la trajectoire est contenue dans une ligne de niveau de f alors en tout point, la tangente à γ est perpendiculaire au gradient de f .

En effet, dans ce cas, la fonction F définie comme dans le théorème est constante sur L (valant la valeur du niveau de f en jeu), sa dérivée est nulle et la nullité du produit scalaire se traduit en termes de perpendicularité.

Exercice 2.—Indiquer en quelques points de la figure 1, la direction du gradient de l'altitude.

Exercice 3.—Démontrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \ln(x^2 + 2 \cdot y^2 + 1)$$

est définie, continue, de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 et déterminer ses dérivées partielles et dérivées partielles secondes.

Exercice 4.—Démontrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, f(x, t) = e^{-4t} \cos(2x)$$

est définie, continue, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et déterminer ses dérivées partielles. Calculer $\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Exercice 5.—On considère la fonction $f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{t}}$.

Justifier rapidement le caractère \mathcal{C}^1 de f sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t), \frac{\partial f}{\partial t}(x, t),$$

et trouver la constante c telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c \cdot \frac{\partial f}{\partial t}$.

Exercice 6.—Déterminer les points critiques sur \mathbb{R}^2 de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ ou $g : (x, y) \mapsto x^2 \cdot y - x \cdot y^2$.

Est-ce que ce sont des extrema locaux ?

Indication: Dans chaque cas, si (x_0, y_0) est critique, tracer la ligne de niveau contenant le points critique et marquer les zones délimités suivant le signe de $g(x, y) - g(x_0, y_0)$. Faire une justification graphique claire.

Exercice 7.—Déterminer les fonctions f de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0), \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Exercice 8.—Déterminer les fonctions f de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0), \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Indication: Y a t'il des solutions ? Penser au théorème de SCHWARZ.

2 EDO, suites récurrentes et résolutions numériques

2.1 Introduction

On va s'intéresser dans ce chapitre à des mécanismes d'évolution *déterministes*. Supposons que l'on connaisse la situation d'un système (biologique, chimique, physique, mathématique, informatique,..) à un instant donné et la loi de passage d'un instant à l'instant suivant. Un peu de réflexion nous amène à penser que si l'on connaît le système à l'instant initial alors nous sommes en mesure de déterminer ou calculer son évolution sur la période temporelle suivant cet instant initial. La notion d'*instant suivant* dépend de la conception du temps que nous adoptons.

- Si nous adoptons une conception du temps *discrète*, les instants se succèdent les uns les autres à la manière des nombres entiers et nous pouvons donc numéroter instants et configurations du système par les entiers naturels ou relatifs.
- Si nous adoptons une conception du temps *continue*, **il n'y a pas d'instant suivant un instant donné**, plutôt un intervalle de temps. Dans ce cas, les instants sont disposés à la façon des nombres réels sur la droite réelle et nous pouvons nous servir de ceux-ci pour numéroter instants et configurations du système.

Dynamique des populations A titre d'exemple élémentaire : Considérons le modèle d'évolution le plus élémentaire en dynamique des populations, le modèle de MALTHUS.

Le point d'origine est la constatation par T. MALTHUS (fin XVIIe, début XVIIIe) de la tendance à l'accroissement exponentiel d'une population si celle-ci ne connaît pas de contraintes.

Cela se traduit mathématiquement par la notion de **taux d'accroissement de la population**¹.

Le taux d'accroissement² d'une population N sur un intervalle de durée Δt est $r = \frac{1}{N} \frac{\Delta N}{\Delta t}$ où N est la population au début de l'intervalle, ΔN est la variation de population au cours de cet intervalle.

Si on suppose que r est constant,

1. dans le cas discret, avec un pas de temps τ , la loi d'évolution de la population est décrite par la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}} = N(n \cdot \tau)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $N(0) = N_0$ à l'instant 0 et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, N((n+1)\tau) = (1 + \tau \cdot r) \cdot N(n \cdot \tau)$$

La suite (N_n) est donc une suite géométrique de raison $1 + \tau \cdot r$.

2. Dans le cas continu, la loi d'évolution de la population est décrite par le problème de CAUCHY, $N(0) = N_0$ et

$$\forall t \geq 0, N'(t) = r \cdot N(t)$$

Il s'agit d'une EDO linéaire d'ordre 1, homogène, à coefficients constants.

La fonction $N : t \mapsto N(t)$ est donc, à constante multiplicative près, une fonction exponentielle.

En dynamique des populations, les variables élémentaires sont évidemment le nombre d'individus de telle ou telle population. **Il s'agit a priori de nombres entiers!** Le hic de nos modélisations vient de la remarque suivante : si N est une fonction continue sur un intervalle prenant des valeurs entières alors N est constante, y a quelque chose qui cloche là-dedans !

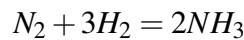
1. Les mots et expressions dans ce format sont à retrouver dans votre glossaire de SVT

2. En anglais, taux =rate, ceci explique l'emploi de la lettre r

Il faut comprendre, exactement comme pour l'exercice portant sur la décroissance de la population d'atomes lors d'une réaction radioactive, que l'on fait des raisonnements « en moyenne ». N peut alors prendre des valeurs réelles positives et n'est pas contrainte aux valeurs entières.

Derrière ces modèles déterministes se cachent des modèles probabilistes fins qui parlent de l'évolution d'une population suivant certaines règles intégrant l'aspect aléatoire. Quand on fait de la dynamique des populations déterministe, on parle de la tendance centrale qui se dégage lorsque que l'on regarde plusieurs (une infinité en fait) de ces populations et que l'on moyenne.

Cinétique chimique La cinétique chimique fournit de nombreux exemples (de systèmes) d'EDO. Beaucoup sont similaires à ceux utilisés en dynamique des populations. En quelque sorte, la cinétique chimique, c'est la dynamique de populations de molécules. On écrit une réaction chimique sous la forme produits – réactifs = 0 en utilisant des coefficients stœchiométriques algébriques. Par exemple, on écrira, pour la synthèse de l'ammoniac



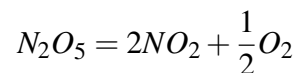
le produit de la réaction NH_3 est affecté du coefficient $v_{NH_3} = +2$ alors que les réactifs sont affectés des coefficients $v_{N_2} = -1$ pour N_2 et $v_{H_2} = -3$ pour H_2 . Ce qui nous intéresse c'est la vitesse à laquelle à lieu cette (unique) réaction. On peut quantifier cette vitesse en considérant la variation de quantité de matière de chaque constituant ou la variation instantanée des concentrations³ (ici, c_{NH_3} , c_{N_2} et c_{H_2}) de chaque matière. Si le système est fermé, le principe de conservation de la matière (d'après le tableau d'avancement, on peut constater que quand une mole de N_2 disparaît, 2 moles de NH_3 sont apparues et 3 moles de H_2 ont disparu) implique que

$$\frac{1}{v_{N_2}} \frac{dc_{N_2}}{dt} = \frac{1}{v_{H_2}} \frac{dc_{H_2}}{dt} = \frac{1}{v_{NH_3}} \frac{dc_{NH_3}}{dt} = v$$

où v est la vitesse de cette réaction.

Maintenant la vitesse de réaction est fonction⁴ des concentrations. Un cas particulier est celui des réactions à ordre, *i.e.* v est un « monôme » en les concentrations de réactifs et produits. L'exemple le plus simple est le suivant

La réaction



est d'ordre 1 et comporte un réactif. Dans ce cas⁵ $v = k \cdot c_{N_2O_5}$. En posant $c = c_{N_2O_5}$, on a

$$-\frac{dc}{dt} = k \cdot c$$

et donc $c = c(0)e^{-k \cdot t}$.

Il s'agit d'une EDO linéaire d'ordre 1, homogène, à coefficients constants.

La fonction $c : t \mapsto c(t)$ est donc, à constante multiplicative près, une fonction exponentielle.

3. en phase gazeuse, ce sont les pressions partielles qui sont pertinentes
4. Ces fonctions sont dans beaucoup de cas empiriques ou issus de calculs liés au caractère géométrique et aléatoire des mouvements de molécules dans les fluides
5. k est la *constante de vitesse*, elle dépend de la température via la loi d'ARHENIUS

En physique. Les équations différentielles (ou aux dérivées partielles) sont souvent obtenues, lors de la phase de modélisation—l'établissement de l'équation—par des raisonnements faisant intervenir un bilan de forces, un bilan d'échanges thermiques entre des « éléments de volume dx » sur de « petits » intervalles de temps dt .

On transforme ensuite, par un passage à la limite tacite, cette modélisation discrète, en une modélisation par EDO.

D'autres sont obtenues par l'application du principe fondamental de la dynamique (qui fait intervenir une dérivée seconde, d'où l'importance des équations d'ordre 2) et par l'utilisation des caractéristiques de réponse de composants des circuits électriques.

Quelques exemples au programme de physique

1. Mécanique : Equation d'un ressort oscillant (linéaire d'ordre 2), Equation du pendule (non linéaire d'ordre 2),
2. Equations d'un circuit RL (linéaire d'ordre 1), RLC (linéaire d'ordre 2),
3. Lois de FOURIER et de FICK, menant à l'équation de la chaleur et d'autres équations de diffusion (seconde loi de FICK) (équations aux dérivées partielles)

En conclusion. Les mathématiques permettent de considérer les deux cas de figures, discret et continu et d'établir des ponts entre ces deux aspects.

— Les suites récurrentes permettent de décrire le premier cas : partant d'une configuration du système u , on note $f(u)$ la configuration à l'instant suivant et le système est décrit par la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 , la configuration initiale et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

— Les équations différentielles permettent de décrire le second cas. Partant d'une configuration (numérique) u , le *taux d'accroissement instantané* de u à l'instant t est donné par $\phi(u)$, une fonction de u *i.e.* la fonction u vérifie sur un certain intervalle⁶ I , $u(0) = u_0$ la configuration initiale, et l'EDO⁷

$$\forall t \in I, u'(t) = \frac{du}{dt}(t) = \phi(u(t))$$

Ces deux conceptions sont reliées par l'idée (très XVIIIe siècle) de durée infinitésimale. On considère le temps sous sa forme discrète mais en supposant que deux instants successifs sont séparés par une durée δt infiniment petite. On a, on posant $u_n = u(n \cdot \delta t)$ que « $u_{n+1} - u_n \simeq u'(n \cdot \delta t) \cdot \delta t$ » et donc

$$u_0 = u(0) \text{ et } \forall n, u_{n+1} \simeq u_n + \delta t \cdot \phi(u_n) = f(u_n)$$

Tel quel, ce qui est écrit n'a pas vraiment de sens. La façon moderne d'écrire cela est d'introduire le schéma d'EULER associé à une EDO.

6. non trivial et contenant 0

7. Equation Différentielle Ordinaire

2.2 Le schéma d'EULER explicite- cas autonome

Définition 2. Soit $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $T \in]0, +\infty[$, $I = [0, T[$ et $u_0 \in \mathbb{R}^d$,

Soit $h \in]0, +\infty[$. Le schéma d'EULER, de pas h , associé au problème de CAUCHY

$$u(0) = u_0 \text{ et } \forall t \in I, u'(t) = \phi(u(t))$$

est la suite u_h (partiellement) définie par

$$u_{h,0} = u_0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{h,n+1} = u_{h,n} + h \cdot \phi(u_{h,n})$$

Le schéma d'EULER associé à une EDO réalise une connexion fondamentale entre suites récurrentes et EDO :

- La modélisation en physique raisonne souvent au niveau discret et "passe" à la limite pour obtenir une équation différentielle (dt, dx etc.).
- Etant donnée une ODE, pour la résoudre numériquement, on la transforme en suite récurrente avec l'introduction d'un pas (de temps, souvent) $h = \delta t > 0$, suffisamment petit.

Remarques

1. Il est naturel de vouloir comparer $(u_{h,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u(n.h))_{n \in \mathbb{N}}$. Il n'y a aucune raison d'avoir égalité mais il est raisonnable que ces deux suites soient proches sous certaines hypothèses sur la fonction ϕ et ce, d'autant plus que h est proche de zéro.
2. D'un point de vue formel, le temps, concept physique, n'est ici qu'une variable réelle comme une autre. On verra des exemples d'EDO où la dérivation a lieu par rapport à d'autres variables.
3. *Simuler* le système c'est implémenter en machine le calcul de la suite récurrente, la résolution du problème de CAUCHY via le schéma d'EULER ou un schéma numérique plus élaboré.

Point fixes/Points d'équilibre Les points d'annulation de la fonction ϕ jouent un rôle extrêmement important. Soit u_* un tel point, on donc $\phi(u_*) = 0$ et $f(u_*) = u_*$.

1. Pour le schéma d'EULER, u_* est point fixe de la récurrence. Si $u_{h,n} = u_*$ pour une certain n , alors $u_{h,p} = u_*$ pour tout $p \geq n$. Modulo quelques hypothèses de continuité, si $(u_{h,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge, c'est probablement vers un tel point u_* .
2. Modulo quelques hypothèses standards de régularité sur ϕ , on a des résultats analogues pour l'EDO.
 - La fonction constante $u = u_*$ est solution de l'EDO.
 - Si $u(0) = u_*$ alors $\forall t \geq 0, u(t) = u_*$.
 - Si $u(t)$ converge lorsque $t \rightarrow +\infty$, il y a de fortes chances que ce soit vers un tel point u_* .

En physique, un tel point d'équilibre est appelé *régime permanent*.

Dans les exemples et les exercices, on essaiera de mettre en valeur ce type de propriétés.

Que l'on étudie une suite récurrente ou une équation différentielle, les solutions constantes jouent un rôle central.

2.3 Exemples

Exponentielle et suites géométriques Un problème de CAUCHY très simple apparait lorsque la fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est linéaire. Soit $a \in \mathbb{C}$. Il n'y a qu'une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ où $I = [0, +\infty[$ au problème

$$u(0) = 1 \text{ et } \forall t \in I, u'(t) = a.u(t)$$

qui est donnée par la formule

$$\forall t \in I, u(t) = e^{a.t}$$

Remarquons que si $a \neq 0$, le seul point d'équilibre de l'EDO est $u_* = 0$. La fonction nulle est solution de l'EDO. Soit $h > 0$ et considérons le schéma d'EULER associé. Il s'agit de la suite $u_h = (u_{h,n})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_{h,0} = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{h,n+1} = (1 + h.a).u_{h,n}$$

On reconnaît en u_h une suite géométrique de raison $(1 + a.h)$, de premier terme 1, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{h,n} = (1 + a.h)^n$$

On doit comparer $u(n.h) = e^{a.n.h}$ et $u_{h,n} = (1 + a.h)^n$. Il est clair que pour n fixé, lorsque $h \rightarrow 0$, ces deux termes sont proches (et proches de 1). Ce n'est pas très intéressant.

Il est beaucoup plus intéressant de comparer ces deux termes lorsque les points $n.h$ couvrent un intervalle fixé à l'avance. Par exemple $I' = [0, 1]$.

Voir la figure 2.

Afin de simplifier le propos (et d'éviter l'apparition de parties entières qui ne sont qu'un aspect technique), supposons que $h = \frac{1}{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, de sorte que le problème devient : évaluer

$$\max_{n \in \{0, \dots, N\}} |e^{n \cdot \frac{a}{N}} - e^{n \cdot \ln(1 + \frac{a}{N})}|$$

pour montrer que cette quantité tend vers 0 lorsque $N \rightarrow +\infty$.

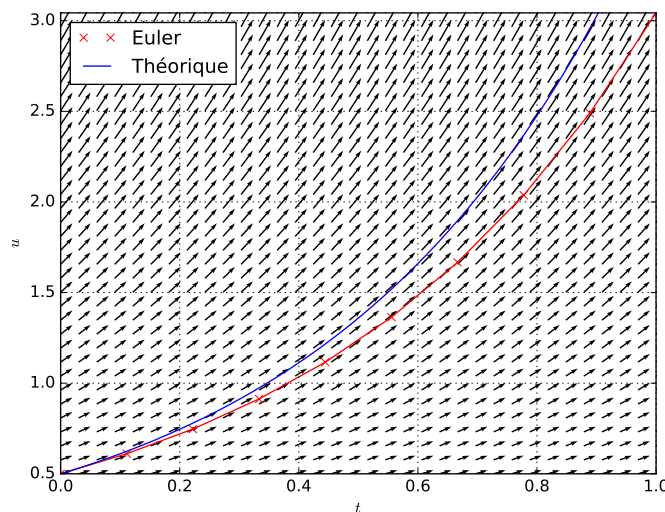


FIGURE 2 – Exponentielle et suite géométrique. Pas $dt = 0.1$, $u(0) = 0.5$, $a = 2$

Utiliser le script euler-base.py.

On a, pour $n \in \{0, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} |e^{n \cdot \frac{a}{N}} - e^{n \cdot \ln(1 + \frac{a}{N})}| &= |e^{n \cdot \frac{a}{N}}| \cdot |1 - e^{n \cdot (\ln(1 + \frac{a}{N}) - \frac{a}{N})}| \\ &\leq e^{|a|} \cdot |1 - e^{n \cdot (\ln(1 + \frac{a}{N}) - \frac{a}{N})}| \end{aligned}$$

Avec le TAF en vue, il s'agit d'évaluer $\ln(1+x) - x$ pour $x = \frac{a}{N}$. Cette quantité est en $O(x^2)$ lorsque $x \rightarrow 0$ si on en croit le développement limité classique. Allons plus loin et cherchons une vraie inégalité.

J'affirme que par études élémentaires de fonctions, on a, pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$,

$$0 \leq x - \ln(1+x) \leq x^2$$

On a donc, dès que $N \geq 2|a|$, $0 \leq n \leq N$,

$$\left| n \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{a}{N}\right) - \frac{a}{N} \right) \right| \leq n \frac{a^2}{N^2} \leq \frac{a^2}{N}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} |e^{n \cdot \frac{a}{N}} - e^{n \cdot \ln(1 + \frac{a}{N})}| &= |e^{n \cdot \frac{a}{N}}| \cdot |1 - e^{n \cdot (\ln(1 + \frac{a}{N}) - \frac{a}{N})}| \\ &\leq e^{|a|} \frac{a^2}{N} \sup_{0 \leq t \leq \frac{a^2}{N}} e^t \end{aligned}$$

et donc, pour tout $N \geq 2|a|$,

$$\max_{n \in \{0, \dots, N\}} |e^{n \cdot \frac{a}{N}} - e^{n \cdot \ln(1 + \frac{a}{N})}| \leq e^{|a|} \frac{a^2}{N} e^{\frac{a^2}{N}}$$

La quantité de droite tend clairement vers 0 lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Dans le cas $a \in \mathbb{C}$, l'inégalité

$$\max_{n \in \{0, \dots, N\}} |e^{n \cdot \frac{a}{N}} - (1 + \frac{a}{N})^n| \leq e^{|a|} \frac{|a|^2}{N} e^{\frac{|a|^2}{N}}$$

est vraie, elle est techniquement plus difficile à démontrer.

Version matricielle Les deux exemples précédents ont trait à des équations différentielles/suites récurrentes dont les solutions sont à valeurs numériques (réelles ou complexes). On peut (et ce n'est pas par pur jeu) étendre ce qui a été dit au cas de fonctions ou suites à valeurs vectorielles.

Considérons un vecteur $X_0 \in \mathbb{C}^d$, une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et considérons le problème de CAUCHY

$$X(0) = X_0 \text{ et } \forall t \in]0, +\infty], X'(t) = A.X(t) \quad (*)$$

Les points équilibre de l'EDO sont les points X_* vérifiant $A.X_* = 0$. L'ensemble des points d'équilibre est donc le noyau de A , $\text{Ker } A$.

Si $X_0 \in \text{Ker } A$, la fonction constante $X = X_0$ est solution du problème de CAUCHY en considération.

Le schéma d'EULER de pas $h > 0$ associé à cette EDO est la suite X_h définie par

$$X_{h,0} = X_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_{h,n+1} = (I_d + h.A)X_{h,n}$$

Il s'agit d'une suite géométrique à valeurs dans \mathbb{R}^d dont la raison est la matrice $I_d + h.A$. Elle se résout en

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{h,n} = (I_d + h.A)^n . X_0$$

Nous verrons dans le chapitre "diagonalisation de matrices" comment calculer directement la puissance n -ième de la matrice $I_d + h.A$.

On y construira notamment, dans beaucoup de cas, une matrice $P \in GL_d(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}.A.P = \Delta$, une matrice diagonale.

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \delta_d \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on a $(I_d + h.A) = P.(I_d + h.\Delta).P^{-1}$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{h,n} = P.(I_d + h.\Delta)^n . P^{-1}.X_0$$

où

$$(I_d + h.\Delta)^n = \begin{pmatrix} (1 + h.\delta_1)^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (1 + h.\delta_d)^n \end{pmatrix}$$

Le même procédé permet de résoudre (*). $X : I \rightarrow \mathbb{C}^d$ est solution de (*) ssi $Y = P^{-1}.X : I \rightarrow \mathbb{C}^d$ est solution du problème de CAUCHY

$$Y(0) = Y_0 := P^{-1}.X_0 \text{ et } \forall t \in]0, +\infty], Y'(t) = \Delta.Y(t) \quad (**)$$

Le système (**) est un système de d EDO à valeurs complexes

$$\begin{cases} y_1'(t) = \delta_1.y_1(t) \\ \vdots = \vdots \\ y_d'(t) = \delta_d.y_d(t) \end{cases}$$

que l'on peut résoudre *indépendamment* les unes des autres (le système est dit *découplé*). On obtient

$$\forall t \geq 0, Y(t) = \begin{pmatrix} e^{t\delta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{t\delta_d} \end{pmatrix} . Y_0$$

d'où l'on peut déduire $X(t) = P.Y(t)$.

Remarquons que dans ce cas, si $X_0 \in \text{Ker } A$, *i.e.* X_0 est point d'équilibre de l'EDO, alors la seule solution du problème de CAUCHY est la solution constante $X = X_0$. C'est un fait général.

EDO d'ordre supérieur Nous avons vu jusqu'à présent des EDO d'ordre 1 *i.e.* imposant une relation entre la fonction inconnue et sa première dérivée. La physique est friande d'EDO d'ordre 2, *i.e.* imposant une relation entre la fonction inconnue et ses deux premières dérivées. On peut généraliser ce concept et parler d'équation différentielle d'ordre d , *i.e.* imposant une relation entre la fonction inconnue u et ses dérivées jusqu'à l'ordre d : $u', u'', \dots, u^{(d)}$.

Une simple astuce, à connaître, permet de ramener une telle équation différentielle à un système d'équations différentielles du premier ordre. Supposons $d \geq 2$. Si u est une fonction de classe \mathcal{C}^d sur un intervalle I , à valeurs réelles ou complexes, on peut former, par accouplement, la fonction U , définie sur I , à valeurs vectorielles, par

$$\forall t \in I, X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(d-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Cette fonction est de classe \mathcal{C}^1 sur I au sens où chacune de ses composantes (à valeurs réelles ou complexes) l'est.

On va voir, sur des exemples, que u est solution d'une EDO d'ordre d si et seulement si X est solution d'une EDO d'ordre 1.

Oscillateur harmonique L'équation différentielle régissant l'oscillateur harmonique est (sur \mathbb{R})

$$u'' + \omega^2 \cdot u = 0$$

où $\omega \in]0, +\infty[$ est une constante.

En posant $x = u$, $y = u'$, cette EDO est donc équivalente à

$$\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = y(t) \text{ et } y'(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, elle équivaut à l'EDO vectorielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X(t)$$

On est amené à résoudre une EDO vectorielle du type traité précédemment. Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}.$$

P est inversible, son déterminant est $-2i\omega$ et son inverse est donc

$$P^{-1} = \frac{1}{2i\omega} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}$$

et de ceci on déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = P \cdot \begin{pmatrix} e^{it\omega} & 0 \\ 0 & e^{-it\omega} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot X(0)$$

En tout état de cause, ceci force les composantes de X à être combinaisons linéaires des fonctions $t \mapsto e^{i\omega t}$ et $t \mapsto e^{-i\omega t}$, autrement dit, à être combinaisons linéaires de $t \mapsto \cos \omega t$ et $t \mapsto \sin \omega t$ et permet de retrouver les formules habituelles de la physique où la solution u est déterminée grâce aux conditions initiales $u(0)$ et $u'(0)$.

L'EDO d'ordre n à coefficients constants Considérons maintenant la résolution de l'EDO

$$\forall t \in \mathbb{R}, u^{(d)}(t) + a_{d-1}u^{(d-1)}(t) + \dots + a_1u'(t) + a_0.u(t) = 0 \quad (\text{EDO,Ld})$$

où $d \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{C}$ et la fonction inconnue u est de classe \mathcal{C}^d sur \mathbb{R} , à valeurs complexes.

Associons à une telle fonction u la fonction vectorielle $X = \begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u^{(d-1)} \end{pmatrix}$ à valeurs dans \mathbb{C}^d . La fonction

X est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = \begin{pmatrix} u' \\ \vdots \\ u^{(d)} \end{pmatrix}$ est solution de EDO,Ld si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A.X(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

Il reste alors à trouver une matrice P , une matrice diagonale Δ telles que $\Delta = P^{-1}.A.P$ pour pouvoir appliquer les principes précédemment décrits. Ce n'est pas toujours possible comme on le verra dans le chapitre **diagonalisation de matrices**. C'est cependant possible lorsque le polynôme caractéristique de ce système d'EDO,

$$P(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_0$$

admet d racines distinctes $\delta_1, \dots, \delta_d$. Une solution u est alors combinaison linéaire des d fonctions $t \mapsto e^{\delta_k t}$, $k \in \{1, \dots, d\}$, combinaison dont on trouve les coefficients en résolvant le système lié aux conditions initiales $u(0), \dots, u^{(d-1)}(0)$, i.e. à la valeur de $X(0)$. Le lien avec les suites récurrentes linéaires d'ordre d est frappant. Une telle suite u satisfait une relation du type

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+d} = \alpha_{d-1}u_{n+d-1} + \dots + \alpha_0u_n$$

où $d \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{C}$.

Si le polynôme caractéristique de cette récurrence,

$$P(x) = x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \dots - \alpha_0$$

admet d racines distinctes $\delta_1, \dots, \delta_d$. Une telle suite u est alors combinaison linéaire des d suites géométriques $(\delta_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $k \in \{1, \dots, d\}$, combinaison dont on trouve les coefficients en résolvant le système lié

aux d premières valeurs u_0, \dots, u_{d-1} . On peut transformer une telle suite récurrente d'ordre d en une suite vectorielle récurrente d'ordre 1 (i.e. une suite vectorielle géométrique) en posant pour $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \end{pmatrix}$$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A.X_n$$

où A est la matrice définie précédemment avec $a_k = -\alpha_k$ pour $k \in \{0, \dots, d-1\}$.

Pendule L'équation du pendule pesant est un exemple abordable et important d'EDO d'ordre 2 *non linéaire*. Nous en faisons une simple présentation sans tenter de la résoudre.

On repère la position d'un pendule pesant (masse m , longueur ℓ) par l'angle θ que celui-ci fait avec la verticale. Une fois tout écrit, le principe fondamental de la dynamique donne que, sur l'intervalle temporel I pendant lequel se déroule le mouvement,

$$\theta'' + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (\text{EDO, Pend})$$

Nous ne suivons pas la route de l'approximation aux petits angles qui mène à l'équation linéaire $\theta'' + \frac{g}{\ell} \theta = 0$ et permet de retrouver⁸ la valeur approximative de la fréquence du pendule $\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ et sa période $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

On peut choisir l'unité de temps de sorte que $\frac{g}{\ell} = 1$.

Transformons cette EDO du second ordre en un système d'EDO du premier ordre par la méthode usuelle en définissant la vitesse angulaire $\omega = \theta'$. θ est solution de (EDO, Pend) si et seulement si le couple (θ, ω) satisfait, sur I ,

$$\theta' = \omega \text{ et } \omega' = -\sin \theta$$

Les points d'équilibre de ce système différentiel sont les couples (θ_*, ω_*) tels que $\sin \theta_* = 0$ et $\omega_* = 0$. Cela correspond aux deux positions verticales du pendule (avec vitesse nulle). La position basse est *stable*, la haute est *instable*⁹. Ecrivons maintenant le schéma d'EULER de pas $h > 0$ associé à cette équation. Supposons les valeurs θ_0 et ω_0 à l'instant $t = 0$ données, on construit les suites θ_n et ω_n par $\theta_{h,0} = \theta_0$, $\omega_{h,0} = \omega_0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \theta_{h,n+1} &= \theta_{h,n} + h.\omega_{h,n} \\ \omega_{h,n+1} &= \omega_{h,n} - h.\sin \theta_{h,n} \end{cases}$$

Fourrons ceci dans la machine...

Sur une durée plus longue, on obtient les graphiques des figures 4 et 5. Utiliser le script `pendule.py`. Ce qui ne va pas dans ce calcul, c'est que l'on ne respecte pas la physique! En effet, plus que l'équation différentielle issue du principe fondamental de la dynamique, il s'agit de respecter les principes énergétiques. Dans le système du pendule pesant, l'énergie mécanique E , proportionnelle à

$$\frac{1}{2}\omega^2 + (1 - \cos \theta)$$

8. le raisonnement fait via cette approximation est plus que douteux même s'il donne le résultat correct, c.f. http://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_pesant

9. On ne détaillera pas la signification mathématique de ces deux termes

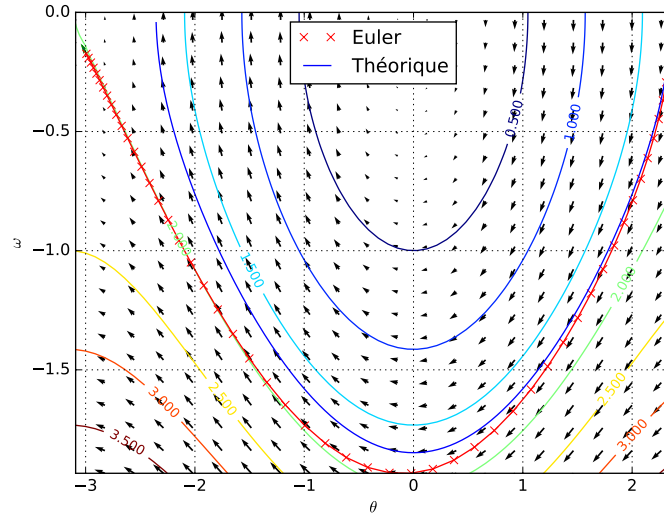


FIGURE 3 – Pendule. $dt = 0.1$, $\theta(0) = \frac{3\pi}{4}$, $\omega(0) = 0$.

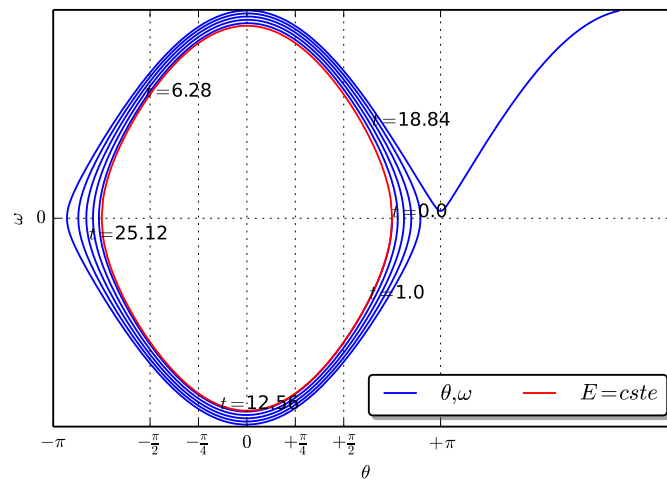


FIGURE 4 – Schéma d'EULER pour le pendule pesant. Portrait de phase. $h = 0.01$, $n \in \{0, \dots, 6300\}$, $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$, $\omega_0 = 0$

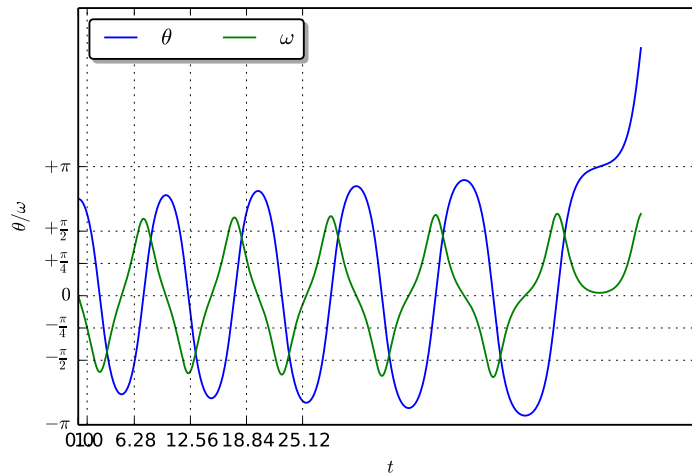


FIGURE 5 – Schéma d'EULER pour le pendule pesant. Graphes. $h = 0.01$, $n \in \{0, \dots, 6300\}$, $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$, $\omega_0 = 0$

doit être conservée. Autrement dit, sur la figure 4, la courbe bleue devrait parcourir la courbe rouge sans dévier.

La simulation suivant le schéma d'EULER ne respecte pas ce principe, pire, elle fait gagner de l'énergie au système. Au lieu d'osciller entre deux positions extrémales, il va finir par tourner autour du point d'attache.

Une bonne simulation doit respecter les principes fondamentaux !

La morale de cet exemple est qu'il faut être précautionneux lorsqu'on utilise un schéma d'EULER pour simuler le comportement d'un système différentiel.

Circuit RLC Pour un circuit RLC en série comme sur le schéma fig. 6, la tension $U = u_c$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC}U = \frac{1}{LC}e$$

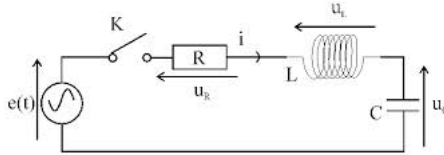


FIGURE 6 – Circuit RLC série (schéma IUT Paris XIII)

Posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\alpha = \frac{R}{2L}$, l'EDO devient

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\alpha \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = \frac{1}{LC}e \quad (\text{RLC})$$

Le discriminant de l'équation caractéristique associée à l'EDO homogène est

$$\Delta = 4(\alpha^2 - \omega_0^2)$$

Dans la terminologie physique, on distingue plusieurs régimes suivant le signe de Δ .

- $\Delta > 0$: Régime aperiodique. La traduction littérale du terme anglo-saxon est « régime sur-amorti ».
- $\Delta = 0$: Régime critique (HP Physique) La traduction littérale du terme anglo-saxon est « à amortissement critique ».
- $\Delta < 0$: Régime pseudo-périodique. La traduction littérale du terme anglo-saxon est « sous-amorti ».

Exercice 9.— Les graphiques suivants présentent des solutions de l'équation (RLC), avec $e = 0$, obtenues théoriquement (figure 7) et obtenues par résolution via un schéma d'EULER. (figure 8) dans chacun de ces régimes.

Ecrire un programme Python permettant de résoudre numériquement (via un schéma d'EULER) et tracer la solution de l'équation (RLC). Une telle équation est spécifiée par R,L,C,e, valeurs initiales $u(0)$ et $u'(0)$.

Pour le code ayant permis de tracer les graphiques. Utiliser le script RLC . py.

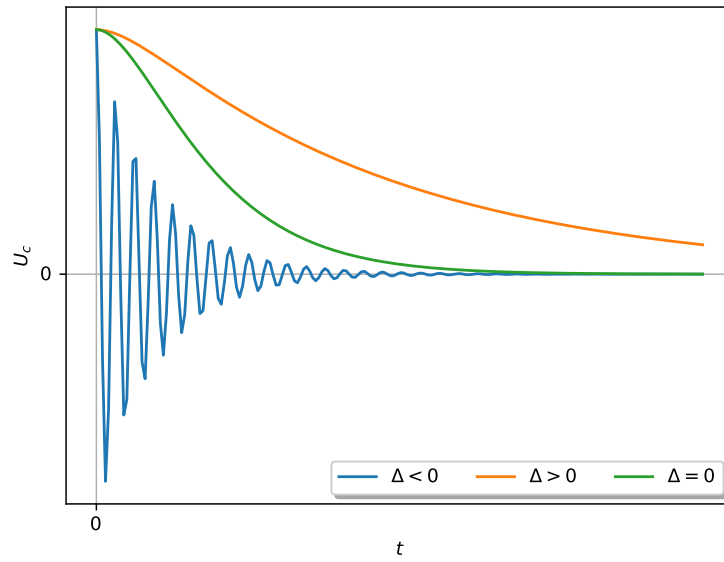


FIGURE 7 – Equations RLC : graphes théoriques : $R = 0.1$, $L = 1$ et $C = 1,400,1000$

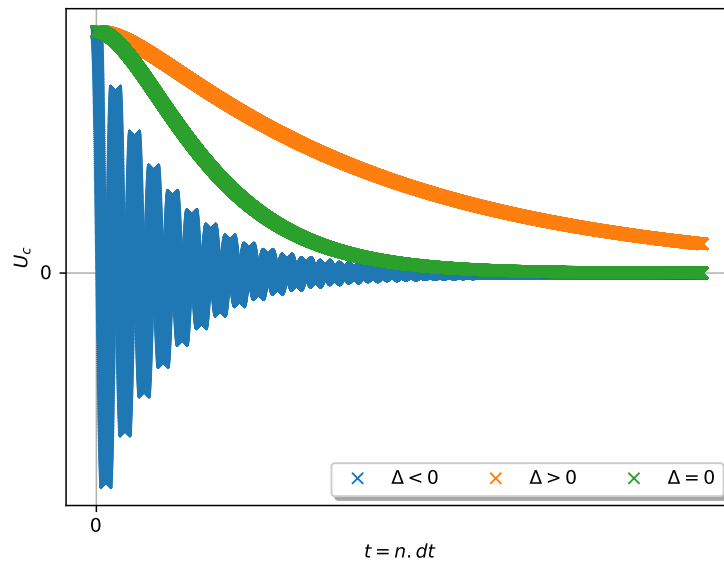


FIGURE 8 – Equations RLC : Simulation $h = 0.01$

2.4 Variantes, cas non autonomes

Description On peut avoir affaire à des EDO du type

$$\forall t \in I, u'(t) = \phi(t, u(t))$$

où ϕ est une fonction sur $I \times \mathbb{C}^d$ et l'inconnue u est une fonction \mathcal{C}^1 , $u : I \rightarrow \mathbb{C}^d$.

Ici, à chaque instant t , $u'(t)$ dépend à la fois de $u(t)$ mais aussi, possiblement, directement de t . Si $u'(t)$ ne dépend que des $u(t)$ et pas « directement », on dit que l'EDO est autonome, c'est le cas traité précédemment.

Le schéma d'EULER de pas $h > 0$ associé au problème de CAUCHY

$$u(0) = u_0 \text{ et } \forall t \in I, u'(t) = \phi(t, u(t))$$

est la suite $u_h = u_{h,n}$, à valeurs dans \mathbb{C}^d , vérifiant la récurrence

$$u_{h,0} = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{h,n+1} = u_{h,n} + h\phi(n.h, u_{h,n})$$

On peut penser au mouvement d'une particule dans un fluide dont les lignes de courant varient avec le temps.

Dans l'exemple suivant, on considère le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = & y(t) \\ y'(t) = & -\sin(x(t) + t) \end{cases}$$

ce qui revient à résoudre l'équation du second ordre¹⁰

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin(x + t)$$

Primitivation Illustrons ceci sur le problème de CAUCHY non autonome en un sens le plus simple, celui de la primitivation.

Soit $I = [0, 1]$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Trouver la primitive de f sur I qui s'annule en 0, c'est résoudre le problème de CAUCHY d'inconnue F

$$F(0) = 0 \text{ et } \forall t \in I, F'(t) = f(t)$$

L'équation différentielle est d'un type particulier au sens où le membre de droite n'est pas fonction de la fonction inconnue.

Le schéma d'EULER de pas $h > 0$ associé à ce problème est la suite F_h définie (partiellement) par

$$F_h(0) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, F_{h,n+1} = F_{h,n} + h.f(n.h)$$

10. Une solution de cette équation est $x(t) = \theta(t) - t$ pour θ une solution de l'équation du pendule.

Cette récurrence se résout en

$$\forall n \in \mathbb{N} \cap \{n, n.h \in I\}, F_{h,n} = \sum_{k=0}^{n-1} h.f(k.h)$$

Limitons nous au cas où $h = \frac{1}{N}$, N destiné à tendre vers $+\infty$. On doit pouvoir comparer $F(n.h)$ avec $F_{h,n}$ pour tout $0 \leq n \leq N$ (de sorte que $h.n = \frac{n}{N}$). On a donc à comparer

$$\int_0^{\frac{n}{N}} f(t) dt \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{N}$$

Une variante du théorème des sommes de RIEMANN donne que la différence de ces deux quantités, en module, se majore, indépendamment de $n \in \{0, \dots, N\}$ par une quantité tendant vers 0 lorsque $N \rightarrow +\infty$. On illustre ceci dans la figure 10.

On peut le démontrer assez facilement à l'aide du TAF lorsque $f \in \mathcal{C}^1(I)$.

EDO linéaire d'ordre 1, coefficients non constants Soit I un intervalle, $t_0 \in I$ et deux fonctions $r, s : I \rightarrow \mathbb{C}$. Soit $u_0 \in \mathbb{C}$. Considérons le problème de CAUCHY

$$u(t_0) = u_0, \forall t \in I, u'(t) = r(t).u(t) + s(t) \quad (\text{EDO,1L})$$

Il admet une unique solution et le schéma d'EULER de pas $h > 0$ associé à ce problème est la suite $u_h = (u_{h,n})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_{h,0} = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{h,n+1} = (1 + h.r(h.n)).u_{h,n} + h.s(h.n)$$

Exercice 10.—

1. Résoudre le problème de CAUCHY sur $I =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

$$u(0) = 1 \text{ et } \forall t \in I, u'(t) + \tan(t).u(t) = \cos(t)$$

2. Résoudre ce problème numériquement en Python, obtenir le graphique 11 et comparer les résultats.

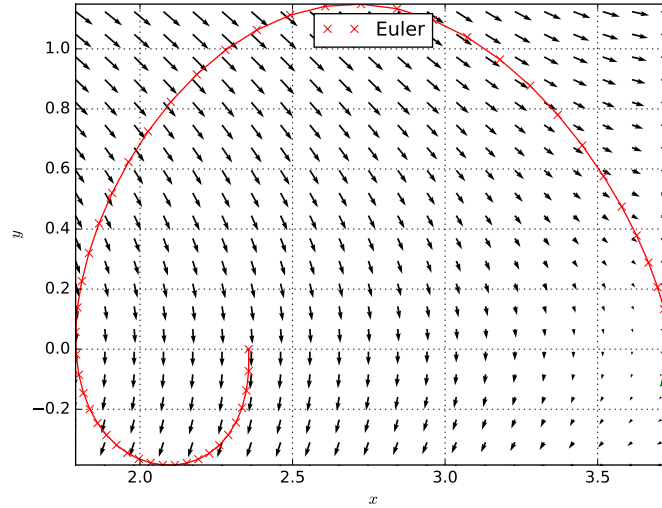


FIGURE 9 – Calcul avec champ dépendant du temps, $dt = 0.1$.

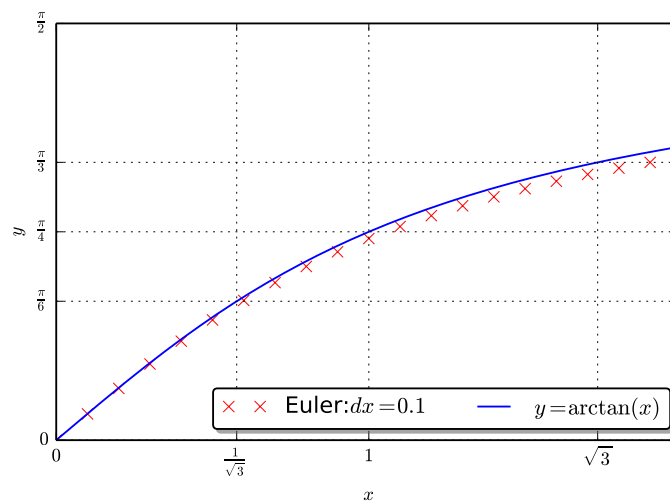


FIGURE 10 – Primitivation de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Pas = 0.1.

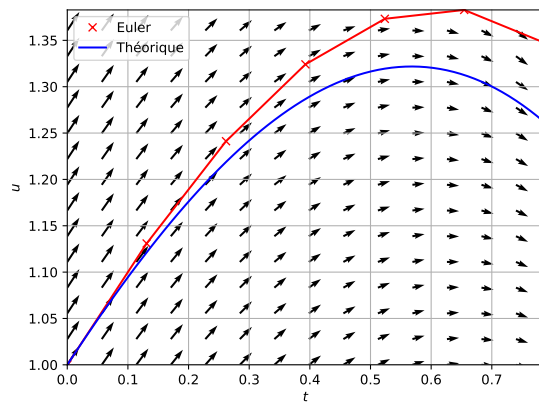


FIGURE 11 – Résolution de $u'(t) + \tan(t) \cdot u(t) = \cos(t)$, $u(0) = 1$, $dt = 0.1$.

3 EDO d'ordre 1 à variables séparées

3.1 Contexte, forme générale

Toutes les équations différentielles ne sont pas linéaires !

Dans la pratique, chaque équation différentielle (issue ou pas de la physique, chimie, biologie, etc...) est un problème nouveau qui doit être regardé avec une certaine naïveté. S'il s'avère qu'on a affaire à une équation linéaire, tant mieux, on dispose d'un outillage tout prêt. Si ce n'est pas le cas, on peut regarder si l'équation en question fait partie du bestiaire déjà étudié.

Un cas important d'équations de ce bestiaire est le cas des équations à variables séparées. Il s'agit d'équations de la forme

$$\forall x \in I, g(y(x)).y'(x) = f(x) \quad (\text{EVS})$$

où $y : I \rightarrow J$ est la fonction inconnue et où $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sont, typiquement des fonctions continues sur leurs intervalles de définition, respectivement I et J .

Pour expliquer la terminologie à *variables séparées*, il faut savoir qu'en physique, on écrit une équation de ce type sous l'une des formes symboliques

$$g(y) \cdot \frac{dy}{dx} = f(x) \text{ ou } g(y) \cdot dy = f(x) \cdot dx$$

et l'on considère que x et y , variables au sens physique du terme, jouent des rôles symétriques (on n'a pas plus de raison d'exprimer x en fonction de y et/ou y en fonction de x). On peut même considérer que x et y sont fonctions d'une variable t variant sur un intervalle L , à inventer, et que l'on cherche à résoudre, *i.e.* trouver les fonctions $x : L \rightarrow I$ et $y : L \rightarrow J$ vérifiant,

$$\forall t \in L, g(y(t))y'(t) = f(x(t))x'(t)$$

3.2 Méthode abstraite de résolution

Revenons à notre problème (EVS).

1. On le complète en imposant une condition initiale $y(x_0) = y_0$ où $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ sont fixés.
2. On fait l'hypothèse que g ne s'annule pas sur J .

Raisonnons par analyse-synthèse :

Soit G une primitive de g sur J , F une primitive de f sur I . L'équation (EVS) se réécrit (mathématiquement)

$$\forall x \in I, (G \circ y)'(x) = F'(x)$$

ou, de façon physicienne, pour x parcourant I ,

$$\frac{d}{dx} (G(y(x))) = \frac{d}{dx} (F(x))$$

et donc, en intégrant cette égalité de dérivées sur l'intervalle I , en utilisant la condition initiale, on obtient que (EVS)+(y(x₀) = x₀) équivaut à

$$\forall x \in I, G(y(x)) = G(y_0) + F(x) - F(x_0)$$

On cherche $y(x)$ en fonction de x . Pour cela, on utilise l'hypothèse que g ne s'annule pas sur J . On déduit du théorème de la bijection et du théorème de dérivation de l'application réciproque que

1. $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ établit une bijection de J sur un intervalle $K \subset \mathbb{R}$,
2. que $G^{-1} : K \rightarrow J$ est de classe \mathcal{C}^1 sur K .

On a alors

$$\forall x \in I, G(y_0) + F(x) - F(x_0) \in K \text{ et } y(x) = G^{-1}(G(y_0) + F(x) - F(x_0))$$

Pour effectuer la synthèse, on peut vérifier que *pourvu qu'elle soit bien définie, i.e. pourvu que* $x \in I \mapsto G(y_0) + F(x) - F(x_0)$ soit à valeurs dans K , la fonction $y : I \rightarrow J$ définie par

$$\forall x \in I, y(x) = G^{-1}(G(y_0) + F(x) - F(x_0))$$

La question en suspens est donc celle de la bonne définition de la fonction y , pour cela il suffit que $x \in I \mapsto G(y_0) + F(x) - F(x_0)$ soit à valeurs dans K . Analysons un peu l'ensemble des valeurs possibles que l'on peut obtenir en se plaçant au voisinage de x_0 .

1. $F(x) - F(x_0)$, prend, par continuité de F , des valeurs proches de 0,
2. $G(y_0) \in K$, du fait que $y_0 \in J$,
3. et donc, si $G(y_0)$ est à l'intérieur de K , $G(y_0) + F(x) - F(x_0)$ prend ses valeurs dans K pourvu que x soit suffisamment proche de x_0

En résumé, on vient de montrer que si y_0 est à l'intérieur de J , (et donc $G(y_0)$ est à l'intérieur de K) alors

1. La fonction y construite par la formule

$$y(x) = G^{-1}(G(y_0) + F(x) - F(x_0))$$

est bien définie, de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle (non trivial) I_0 contenu dans I , contenant x_0 .

2. y vérifie (EVS) sur I_0 et $y(x_0) = x_0$.
3. Si \tilde{y} vérifie (EVS) sur I et $y(x_0) = x_0$ alors $\tilde{y} = y$ sur I_0 .

Exemple. Il ne faut pas retenir par coeur le résultat final mais revenir au raisonnement qui mène à la formule.

On cherche à résoudre l'équation différentielle avec condition initiale

$$y'(x) = x^2 \cdot (y^2(x) - 1), y(0) = 0 \tag{EVS-CI}$$

sur un intervalle, le plus grand possible, à déterminer, I contenant 0.

Raisonnons par analyse-synthèse : Supposons que y est solution de (EVS-CI) sur l'intervalle I , le plus grand possible, sur lequel y ne prend pas les valeurs ± 1 . Sur I , comme $y(0) = 0$, y prend ses valeurs dans l'intervalle $] -1, +1[$ (c'est dû au TVI, y ne peut prendre les valeurs ± 1 et comme elle est en 0 à un moment, elle reste dans l'intervalle borné par les valeurs omises). On a donc,

$$\forall x \in I, \frac{1}{y^2(x) - 1} y'(x) = x^2$$

avec

$$\forall x \in I, y(x) \in] -1, +1[$$

Soit G une primitive de $g : t \mapsto \frac{1}{t^2 - 1}$ sur $] -1, +1[$.

Comme $\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1}$, on peut prendre comme formule de définition (attention au signe de l'argument du \ln !),

$$\forall t \in]-1, +1[, G(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-t}{1+t}$$

Une courte étude de fonction nous montre que $G:]-1, +1[\rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection, strictement décroissante. Sa bijection réciproque G^{-1} est définie, après résolution de l'équation

$$G(t) = s$$

par $G^{-1}(s) = \frac{1-e^{2s}}{1+e^{2s}} = -\text{th}(s)$.

Comme y est solution de l'équation (EVS-CI), on a donc

$$\forall x \in I, G'(y(x)) \cdot y'(x) = x^2$$

et, en intégrant, de 0 à x ,

$$\forall x \in I, G(y(x)) - G(y(0)) = \frac{1}{3}x^3$$

D'après les conditions initiales et le choix de G , on a donc

$$\forall x \in I, G(y(x)) = \frac{1}{3}x^3$$

et donc, en inversant G , en prenant $I = \mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{1 - e^{\frac{2}{3}x^3}}{1 + e^{\frac{2}{3}x^3}} = -\text{th}(e^{\frac{1}{3}x^3})$$

Pour faire la synthèse, il suffit de constater que cette fonction est effectivement solution de (EVS-CI) sur \mathbb{R} .

Dyn. pop. :Equation logistique ou modèle de VERHULST (1838) On suppose que le taux de croissance est fonction affine de la population, négative lorsque N est grand, positive lorsque N est proche de 0 i.e. $r = -aN + b = b \cdot (1 - \frac{N}{K})$ avec $a, b > 0, K = \frac{b}{a}$. l'EDO correspondante s'écrit alors

$$\frac{dN}{dt} = b \cdot (1 - \frac{N}{K}) \cdot N$$

Il s'agit d'une équation à variables séparées qui se réécrit et se résout, en posant $u = \frac{N}{K}$ sous la forme,

$$\frac{1}{(u-1) \cdot u} \frac{du}{dt} = -b \text{ et } \forall t \geq 0, u(t) = \frac{u(0)}{(u(0)(1 - e^{-bt}) + e^{-bt})}$$

Démonstration. On a successivement

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) \frac{du}{dt} &= -b \\ \ln \left| \frac{u-1}{u} \right| - \ln \left| \frac{u(0)-1}{u(0)} \right| &= -b.t \\ \frac{u-1}{u} &= \frac{u(0)-1}{u(0)} e^{-b.t} \\ \frac{1}{u} &= 1 - \frac{u(0)-1}{u(0)} e^{-b.t} = \frac{1}{u(0)} \left(u(0)(1 - e^{-bt}) + e^{-bt} \right) \\ u &= \frac{u(0)}{(u(0)(1 - e^{-bt}) + e^{-bt})} \end{aligned}$$

Il faut commenter sur cette résolution : elle est valable sur un intervalle $I = [0, \alpha[$ sur lequel u ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1. En particulier $\frac{u-1}{u}$ reste de signe constant, ce qui explique la disparition des valeurs absolues. La forme finale montre qu' *a posteriori* , le calcul est valable sur $I = \mathbb{R}^+$. \square

Dans tous les cas, $u(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et donc $N(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} K$. K s'appelle la **capacité du milieu**.
Il y a deux cas qui se distinguent :

1. Si $u(0) > 1$, i.e. $N(0) > K$, alors $\frac{u(0)-1}{u(0)} > 0$ et u décroît strictement vers 1.
2. Si $0 < u(0) < 1$, i.e. $0 < N(0) < K$, alors $\frac{u(0)-1}{u(0)} < 0$ et u croît strictement vers 1.

La figure 12 montre ces différents cas ainsi que l'allure générale du graphe de u .

Utiliser le script `logistique.py`.

La version à temps discret à pas de temps $h > 0$ s'écrit

$$N_{n+1} = \left(1 + h.b.\left(1 - \frac{N_n}{K}\right) \right).N_n$$

ou, si l'on introduit $u_n = \frac{N_n}{K}$,

$$u_{n+1} = (1 + h.b.(1 - u_n)).u_n$$

Les figures 13, 14 et 15 montrent les différents cas avec des pas h variables.

Dyn. pop. :Modèle de GOMPERTZ (1925) Le modèle de GOMPERTZ suppose que le taux de croissance r est de la forme

$$r = -a \ln \frac{N}{K}$$

où a, K sont deux constantes > 0 . K s'appelle là encore la capacité du milieu et a et, comme b précédemment une constante de vitesse. Lorsque $N < K$, $r > 0$ et la population a tendance à croître alors que lorsque $N > K$, $r < 0$ et la population aura tendance à décroître. L'idée est la même que dans le modèle de VERHULST.

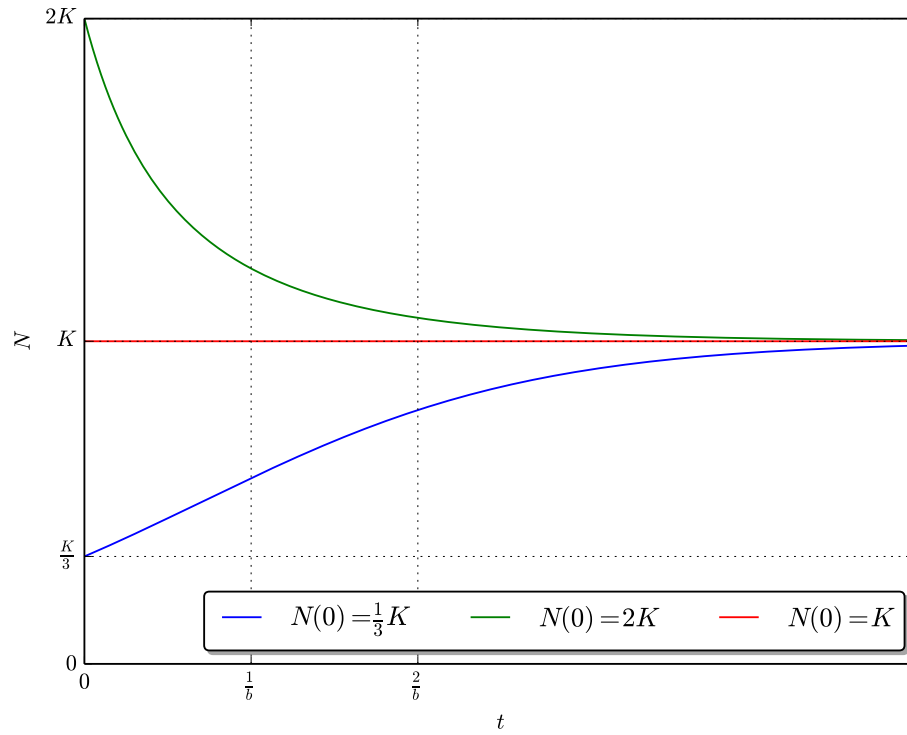
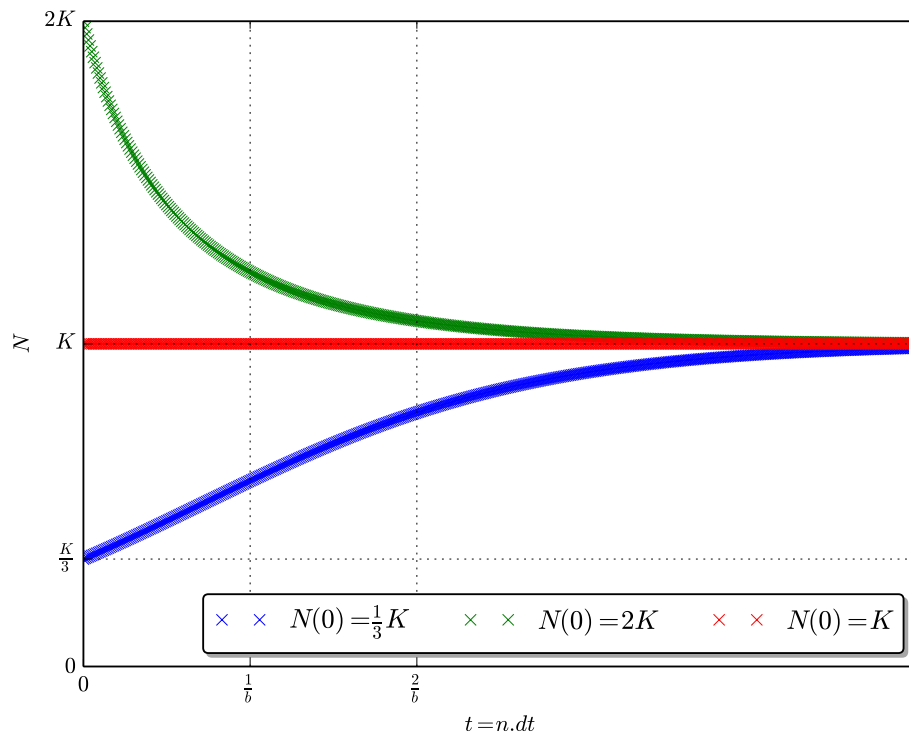
En posant $u = \frac{N}{K}$, l'EDO et sa résolution s'écrivent

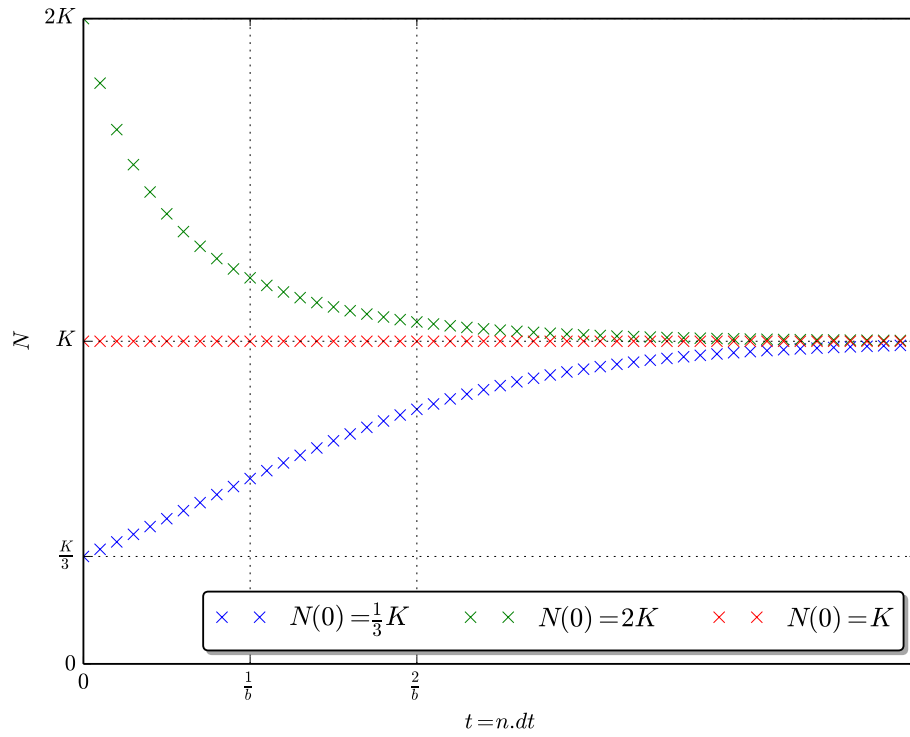
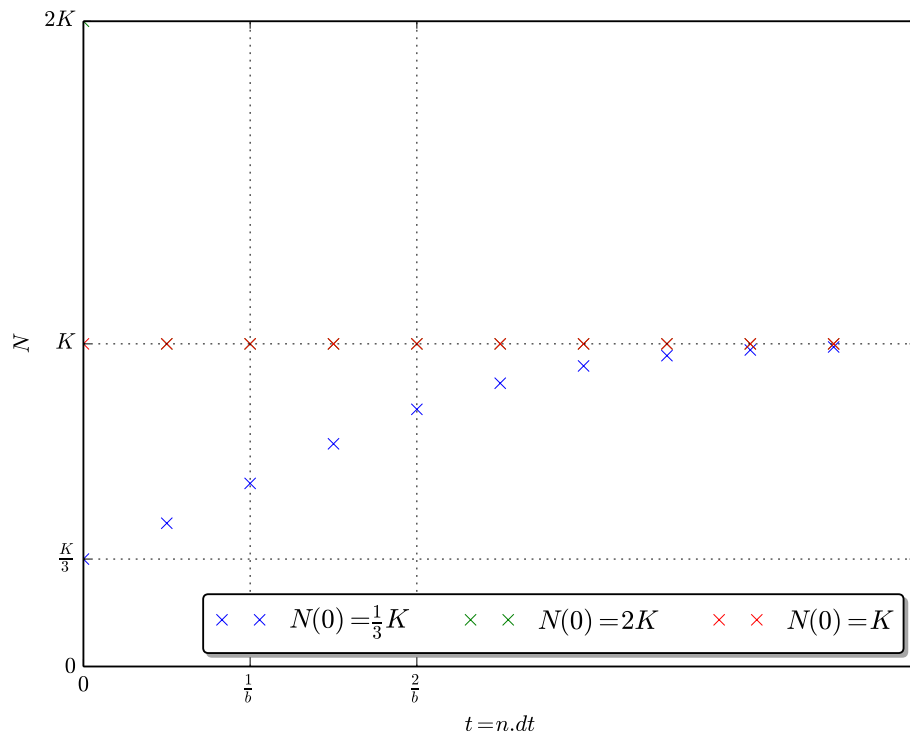
$$\frac{du}{dt} = -a.u \ln u \text{ et } \forall t \geq 0, u(t) = e^{\ln u(0)e^{-a.t}} = u(0)^{e^{-a.t}}$$

On fait le même travail graphique que pour l'équation logistique.

La figure 16 montre ces différents cas ainsi que l'allure générale du graphe de u .

La figure 17 montre une simulation des différents cas $h = 0.5$.

FIGURE 12 – Equation logistique : graphes théoriques, $b = 1$ FIGURE 13 – Equation logistique : Simulation $b = 1$, $h = 0.01$

FIGURE 14 – Equation logistique : Simulation $b = 1$, $h = 0.1$ FIGURE 15 – Equation logistique : Simulation $b = 1$, $h = 0.5$

Démonstration. Il s'agit là encore d'une EDO à variables séparées. Si on pose $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ (fonction continue sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ alors $f(x) = F'(x)$ où $F(x) = \ln |\ln x|$ et l'équation se réécrit

$$F'(u) \frac{du}{dt} = -a$$

En intégrant— on travaille sur un intervalle $I =]0, \alpha[$ sur lequel u ne prend pas les valeurs 0 et 1 — on obtient

$$F(u) - F(u(0)) = -a.t$$

i.e.

$$|\ln u| = |\ln u(0)| e^{-a.t}$$

et finalement

$$u = e^{\ln u(0) e^{-a.t}} = u(0) e^{-a.t}$$

On voit *a posteriori* que l'on peut travailler sur l'intervalle $]0, +\infty[$. □

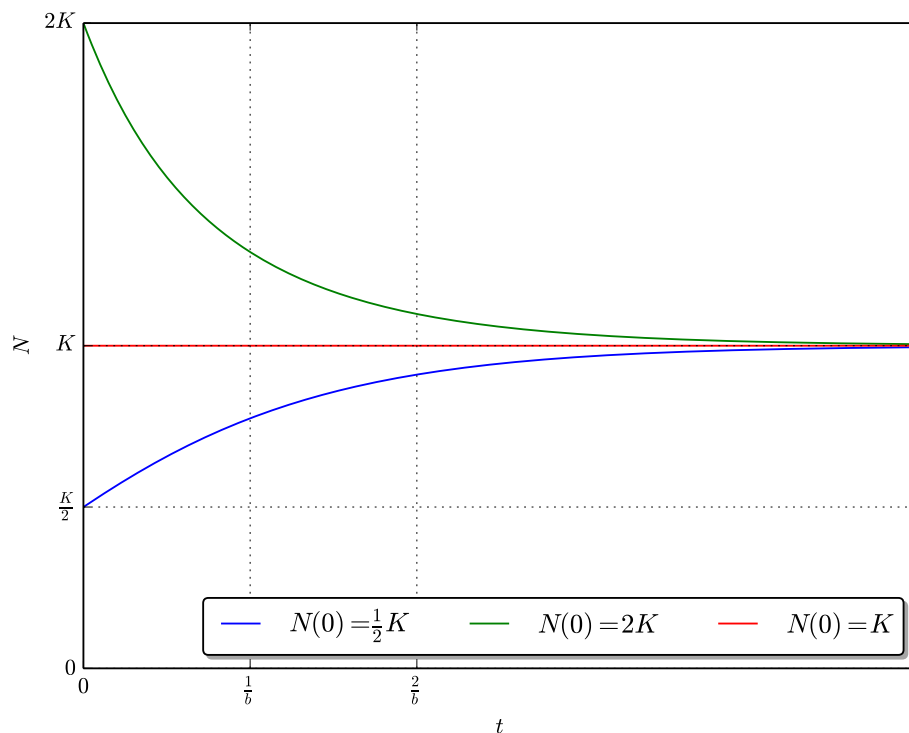
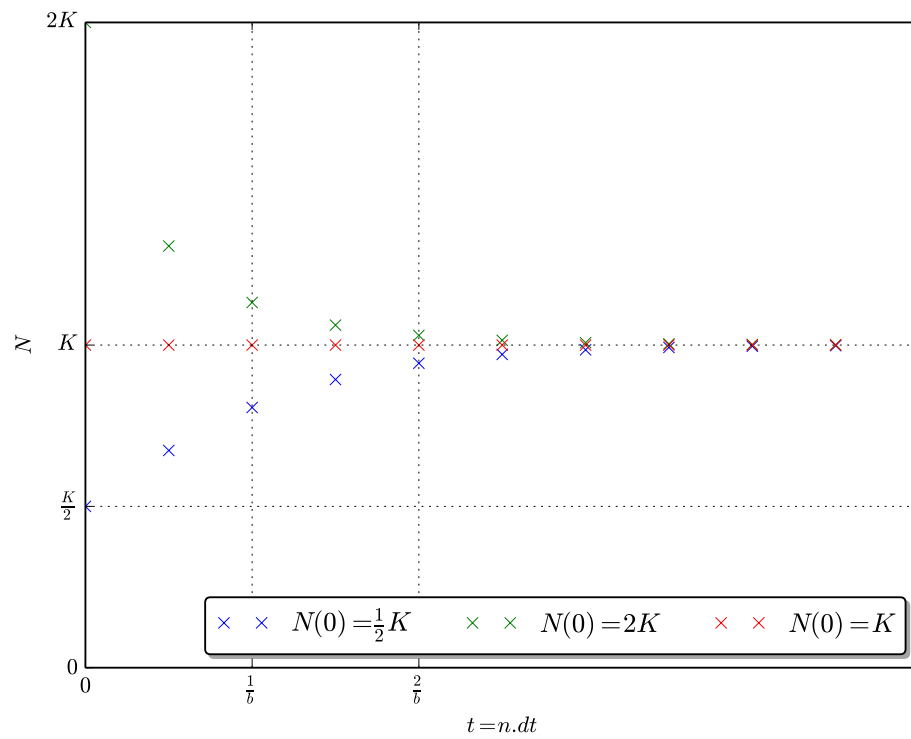
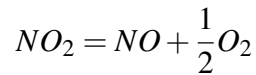


FIGURE 16 – Equation de GOMPERTZ : graphes théoriques, $b = 1$

Utiliser le script `gompertz.py`.

FIGURE 17 – Equation de GOMPERTZ : Simulation $b = 1, h = 0.5$

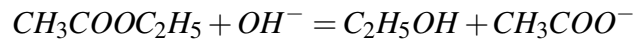
Cinétique chimique : Ordre 2, un réactif

Dans ce cas, $v = k \cdot c_{NO_2}^2$. En posant $c = c_{NO_2}$, on a

$$-\frac{dc}{dt} = k \cdot c^2$$

et donc $-\frac{1}{c} + \frac{1}{c(0)} = -k \cdot t$, *i.e.*

$$c = \frac{c(0)}{1 + c(0)k \cdot t}$$

Cinétique chimique : Ordre 2, deux réactifs La réaction de saponification

Dans ce cas $v = k \cdot c_{OH^-} \cdot c_{CH_3COOC_2H_5}$. En considérant x l'avancement volumique de la réaction, on a

$$c_{OH^-} = c_{OH^-}(0) - x = c_A - x \text{ et } c_{CH_3COOC_2H_5} = c_{CH_3COOC_2H_5}(0) - x = c_B - x$$

et x satisfait

$$x(0) = 0, \frac{dx}{dt} = k \cdot (c_A - x) \cdot (c_B - x)$$

et donc $\frac{1}{c_B - c_A} \ln \frac{c_A(c_B - x)}{c_B(c_A - x)} = k \cdot t$, *i.e.* $x = ???$

Les points d'équilibre de l'EDO sont $x_* = c_A$ et $x_* = c_B$, ces valeurs correspondent aux cas où l'un des deux réactifs est intégralement consommé.

3.3 Exercices.

Exercice 11.— Résoudre les problèmes de CAUCHY suivants. A chaque fois donner la formulation mathématique et/ou la formulation physique. Donner le domaine de validité de votre solution.

1. $\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln x$, $y_{x=1} = 1$. (Formulation physique)
2. $\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln x + 1$, $y_{x=1} = 1$. (Formulation physique)
3. $y'(x) = -\frac{x^2}{y(x)}$, $y(0) = 1$ (Formulation mathématique)
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x \cdot y}$ avec $y_{x=1} = 1$. (Formulation physique). (On posera $u = \frac{y}{x}$ pour tomber sur une équation à variables séparées.)

Exercice 12.— On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$\forall x \in I, y'(x) = x^2 \cdot (y^2(x) + 1) \quad (ED)$$

avec $y(0) = 0$. (Il s'agit de trouver aussi un intervalle I contenant 0 adapté...)

1. Mettre (ED) sous la forme $g(y(x)) \cdot y'(x) = f(x)$.
2. On considère G une primitive de g (sur un intervalle à préciser), F une primitive de f sur I , montrer que si y est solution de notre problème alors

$$\forall x \in I, G(y(x)) - G(0) = F(x) - F(0)$$

3. Conclure sur l'intervalle I le plus grand possible et la valeur de y sur cet intervalle.

Exercice 13.— La courbe du chien¹¹ On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. A l'instant initial, un chien C est à la position $(0,0)$. Le chien suit le maître de sorte que sa vitesse $v > 0$ est constante et sa direction est toujours en direction de son maître. Le maître M marche parallèlement à l'axe des ordonnées, ses coordonnées à l'instant t sont $(x_0, \alpha.v.t)$, où $x_0, \alpha > 0$. On pourra supposer, de sorte à limiter certaines discussions, que $\alpha \neq 1$.

On appelle $(x(t), y(t))$ les coordonnées du chien à l'instant t .

1. Vérifier que ces hypothèses se traduisent mathématiquement par

$$\forall t \geq 0, x'(t)^2 + y'(t)^2 = v^2 \text{ et } (y(t) - \alpha.v.t)x'(t) - (x(t) - x_0).y'(t) = 0$$

2. Montrer qu'en posant $X(s) = \frac{x(\frac{x_0}{v}.s)}{x_0}$, $Y(s) = \frac{y(\frac{x_0}{v}.s)}{x_0}$, il s'agit de trouver X et Y telles que

$$X(0) = 0, Y(0) = 0 \text{ et } \forall s \geq 0, X'(s)^2 + Y'(s)^2 = 1 \text{ et } (Y(s) - \alpha.s)X'(s) - (X(s) - 1).Y'(s) = 0$$

Que valent $Y'(0), X'(0)$? (Pourquoi supposer que $X'(0) > 0$?)

3. Simuler ce mouvement en machine.

4. On suppose que l'on a une solution (X, Y) de ce problème définie sur $I = [0, \eta[$ sur lequel $X' > 0$ et $X < 1$ et que, pour une certaine fonction f , réelle de variable réelle, \mathcal{C}^2 sur $J = [0, X(\eta)[$, on a $\forall s \in I, Y(s) = f(X(s))$.

4.a. Que valent $f(0)$? $f'(0)$?

4.b. Etablir que sur I ,

$$X'^2(1 + f'(X)^2) = 1 \text{ et } X' = \frac{1}{(1 + f'(X)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

4.c. Etablir que

$$\forall s \in I, f(X(s)) - \alpha.s - (X - 1).f'(X(s)) = 0$$

$$\text{et } \forall x \in J, \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha}{1 - x}$$

4.d. En reconnaissant dans le membre de gauche la dérivée de $x \mapsto \ln(f'(x) + \sqrt{1 + f'^2(x)})$, en déduire que

$$\forall x \in J, f'(x) = \frac{1}{2}((1-x)^{-\alpha} - (1-x)^\alpha) \text{ et si } \alpha \neq 1, \forall x \in J, f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha-1}(1-x)^{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha+1}(1-x)^{\alpha+1}\right) - \frac{\alpha}{\alpha^2-1}$$

5. Synthèse : On considère la fonction f définie sur $J' = [0, 1[$ par la formule précédente.

5.a. Tracer le graphe de f , à la machine, dans les cas $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{2}$.

5.b. Montrer que

$$\forall x \in J', (1 + f'(x)^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}((1-x)^{-\alpha} + (1-x)^\alpha)$$

et indiquer comment construire une solution X une solution du problème de CAUCHY sur un intervalle $I' = [0, \eta[$

$$X(0) = 0, X' = \frac{1}{(1 + f'(X)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Déterminer η , le plus grand possible, pour que, sur I , $X < 1$. (Discuter suivant la position de α par rapport à 1).

5.c. Montrer qu'alors, sur I , en posant par ailleurs $Y = f(X)$, on a obtenu une solution à notre problème. Conclure.

5.d. Quelle est la trajectoire pour le chien, le chien rattrape-t-il son maître? En combien de temps?

11. « Le grand-duc de Virginie, beau comme un mémoire sur la courbe que décrit un chien en courant après son maître, s'enfonça dans les crevasses d'un couvent en ruines. » LAUTRÉAMONT, *Les chants de Maldoror*, chant V

4 Quantités conservées : systèmes du premier ordre

4.1 Equation du ressort et énergie mécanique

Rappelons l'équation différentielle régissant l'élongation x d'un ressort en fonction du temps t dans la situation décrite dans la Fig. 18

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \cdot x = 0 \quad (\text{EDO2,Ressort})$$

où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la raideur du ressort est k , la masse au bout du ressort est de m . Il s'agit d'une EDO linéaire

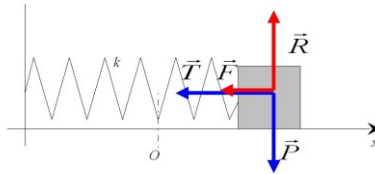


FIGURE 18 – Les forces agissant sur une masse m située au bout d'un ressort placé horizontalement. L'abscisse 0 correspond à la longueur à vide.

d'ordre 2 à coefficients constant que nous avons déjà résolue, théoriquement p.16 et numériquement p.21. Nous suivons ici une autre voie, basée sur la conservation de l'énergie.

Cette EDO linéaire du second ordre se transforme en un système de deux EDO du premier ordre en posant $y = x'$. L'équation (EDO2,Ressort), devient alors

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x \end{cases} \quad (\text{EDO1,Ressort})$$

La quantité $E(x, y) = \omega^2 \cdot x^2 + y^2$ est conservée le long d'une solution de ce système d'EDO. Et effet, soient $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ un couple de solutions de EDO1,Ressort et posons, pour $t \in I$,

$$e(t) = E(x(t), y(t))$$

On a alors, **par dérivation de fonctions composées**,

$$\forall t \in I, e'(t) = 2 \cdot \omega^2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t)$$

Sachant que

$$\forall t \in I, x'(t) = y(t) \text{ et } y'(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

En substituant $x'(t)$ et $y'(t)$ dans l'équation précédente, on obtient

$$\forall t \in I, e'(t) = 2 \cdot \omega^2 \cdot x(t) \cdot y(t) - 2y(t) \cdot \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

La fonction e est donc de dérivée nulle sur l'intervalle I , elle y est donc constante. La constance de cette fonction e , qui est construite à partir de E et de la solution (x, y) de (EDO1,Ressort) est ce que nous entendons par la locution « La quantité $E(x, y) = \omega^2 \cdot x^2 + y^2$ est conservée le long d'une solution de ce système d'EDO »

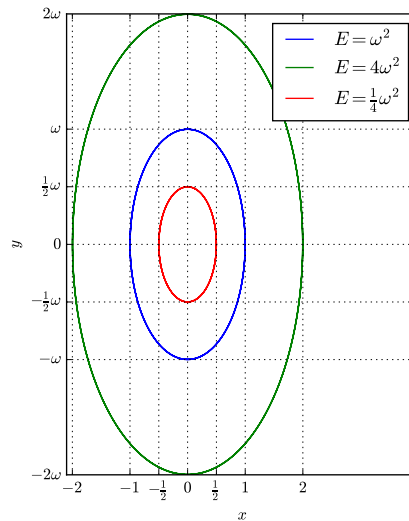


FIGURE 19 – Quelques lignes de niveau de E

Les physiciens auront reconnu le principe de la conservation de l'énergie mécanique totale. La quantité E est proportionnelle à l'énergie mécanique totale.

La conséquence géométrique est que si l'on trace une solution de (EDO1,Ressort) dans le plan muni des coordonnées (x, y) , le **plan de phases**, cette solution est contrainte à rester dans une ligne de niveau de E . *c.f.* Fig. 19. En résumé, on a obtenu, par la constance de l'énergie, pour une solution (x, y) du système (EDO1,Ressort) une équation **cartésienne** de la trajectoire. Il s'agit d'une information différente (et complémentaire) de celle obtenue par la méthode de l'équation caractéristique qui donne un système d'équations **paramétriques** de la trajectoire, *i.e.* x et y en fonction de t .

4.2 Equation du pendule et énergie mécanique

Reprenons l'équation du pendule pesant que nous avons résolue numériquement p.18.

On repère la position d'un pendule pesant (masse m , longueur ℓ) par l'angle θ que celui-ci fait avec la verticale.

$$\theta'' + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (\text{EDO2,Pendule})$$

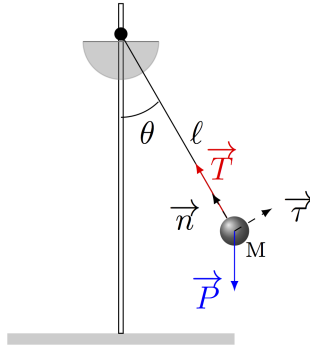


FIGURE 20 – Les forces agissant sur une masse M située au bout d'un pendule. L'angle $\theta = 0$ correspond à la verticale.

On peut choisir l'unité de temps de sorte que $\frac{g}{\ell} = 1$ et on transformons cette EDO du second ordre en un système d'EDO du premier ordre par la méthode usuelle en définissant la vitesse angulaire $\omega = \theta'$. θ est solution de (EDO,Pend) si et seulement si le couple (θ, ω) satisfait, sur I .

$$\theta' = \omega \text{ et } \omega' = -\sin \theta \quad (\text{EDO1,Pendule})$$

La quantité $E(\theta, \omega) = (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}\omega^2$ est conservée le long d'une solution de ce système d'EDO. En effet, soient $\theta, \omega : I \rightarrow \mathbb{R}$ un couple de solutions de EDO1,Pendule sur un intervalle I et posons, pour $t \in I$,

$$e(t) = E(\theta(t), \omega(t))$$

On a alors, **par dérivation de fonctions composées**,

$$\forall t \in I, e'(t) = \sin(\theta(t)) \cdot \theta'(t) + \omega(t) \cdot \omega'(t)$$

Sachant que

$$\forall t \in I, \theta'(t) = \omega(t) \text{ et } \omega'(t) = -\sin(\theta(t))$$

En substituant $\theta'(t)$ et $\omega'(t)$ dans l'équation précédente, on obtient

$$\forall t \in I, e'(t) = \sin(\theta(t)) \cdot \omega(t) + \omega(t) \cdot (-\sin(\theta(t))) = 0$$

La fonction e est donc de dérivée nulle sur l'intervalle I , elle y est donc constante.

On a bien montré que « La quantité $E(\theta, \omega) = (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}\omega^2$ est conservée le long d'une solution du système d'EDO (EDO1,Pendule) »

Les physiciens auront encore reconnu le principe de la conservation de l'énergie mécanique totale. La quantité E est proportionnelle à l'énergie mécanique totale.

La conséquence géométrique est que si l'on trace une solution de EDO1,Ressort dans le plan muni des coordonnées (θ, ω) , le **plan de phases**, cette solution est contrainte à rester dans une ligne de niveau de E , c.f. Fig 21.

- Le fait que pour $E_0 > 2$ la ligne de niveau E_0 de E soit de la forme indiquée sur la figure 21 montre, qu'à ces niveaux d'énergie le pendule « fait le grand tour ».
- La ligne de niveau $E_0 = 2$ de E est particulière, elle correspond à la situation limite où le pendule monte vers sa position d'équilibre instable (verticale) en une durée infiniment longue.

Dans ce cas, on a, le long d'une solution

$$1 - \cos(\theta) + \frac{1}{2}\omega^2 = 2 \text{ i.e. } \omega^2 = 2(1 + \cos(\theta)) = 4\cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Sur un intervalle I où ω ne s'annule pas, par continuité (et le théorème des valeurs intermédiaires), ω reste de signe constant et donc

— Soit

$$\forall t, \theta'(t) = \omega(t) = 2\cos \frac{\theta(t)}{2}$$

— Soit

$$\forall t, \theta'(t) = \omega(t) = -2\cos \frac{\theta(t)}{2}$$

Dans un cas comme dans l'autre, il s'agit d'une équation à variables séparées. On peut la résoudre (difficile¹² mais dans les clous du programme) en

$$\theta = -\pi + 4 \arctan(C.e^{-t}), t \in \mathbb{R} \text{ (mouvement de } +\pi \text{ à } -\pi)$$

ou

$$\theta = -\pi + 4 \arctan(C.e^{+t}), t \in \mathbb{R} \text{ (mouvement de } -\pi \text{ à } +\pi)$$

- Le fait que pour $0 \leq E_0 < 2$, la ligne de niveau E_0 de E est une courbe fermée fournit une preuve que, pour ces niveaux d'énergie, la trajectoire du pendule est périodique, ceci, sans avoir recours à l'approximation aux petits angles. Nous discutons de l'évaluation de la période –problème difficile– dans la partie suivante, hors programme.

En résumé, on a obtenu, par la constance de l'énergie, pour une solution (θ, ω) du système (EDO1, Pendule) une équation **cartésienne** de la trajectoire. Pour résoudre complètement ce système d'EDO, il faudrait maintenant obtenir un système d'équations **paramétriques**, i.e. l'expression de θ et ω en fonction de t . C'est un niveau de difficulté nettement au-dessus.

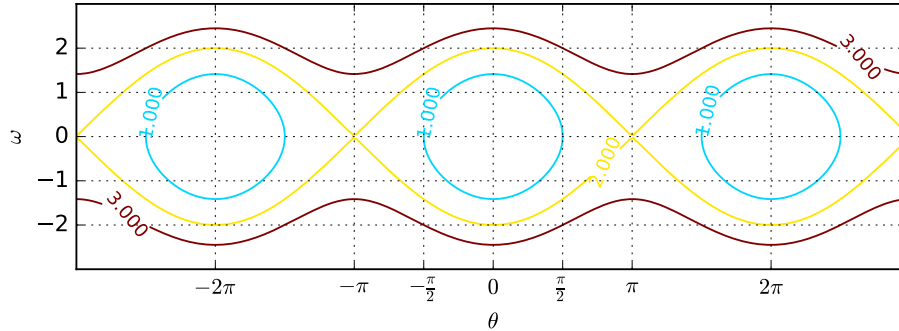
4.3 Le pendule, un complément hors programme

Soit (θ, ω) une solution de (EDO1, Pendule). On vient de voir que l'énergie mécanique totale $E = \frac{1}{2}\omega^2 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$ est constante lors du mouvement. Sa valeur est déterminée par les conditions initiales, position et vitesse, θ_0 et ω_0 . Posons $E_0 = \frac{1}{2}\omega_0^2 + 2\sin^2 \frac{\theta_0}{2}$. On a donc

$$\forall t, \omega(t) = \pm \left(2E_0 - 4\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

12. On donne la dérivée, valable pour $\theta \in]-\pi, +\pi[$:

$$\frac{d}{d\theta} \ln \left(\tan \left(\frac{\theta + \pi}{4} \right) \right) = -\frac{1}{2\cos \frac{\theta}{2}}$$

FIGURE 21 – Quelques lignes de niveau de E

Supposons que sur un certain intervalle temporel $I = [0, \alpha]$, $\omega \leq 0$. On a alors

$$\forall t \in I, \frac{d\theta}{dt}(t) = - \left(2E_0 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{EVS, Pendule})$$

θ satisfait, sur I , une EDO à variables séparées, que l'on peut résoudre jusqu'à un certain point. Considérons g la fonction définie par $g(x) = (2E_0 - 4 \sin^2 \frac{x}{2})^{-\frac{1}{2}}$. Cette fonction est définie, continue sur l'intervalle $]-\theta_0, +\theta_0[$, elle admet donc, sur cet intervalle, une primitive G s'annulant en 0. On a,

$$\forall t \in I, G'(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt}(t) = -1$$

et, en intégrant

$$\forall t \in I, G(\theta(t)) - G(\theta_0) = -t$$

G est impaire et définit une bijection strictement croissante de $]-\theta_0, +\theta_0[$ sur $]-G(\theta_0), +G(\theta_0)[$. On a

$$\forall t \in I, \theta(t) = G^{-1}(G(\theta_0) - t)$$

Un peu de réflexion sur les graphes présentés en Fig. 21 montre que si $\theta_0 \in [0, \pi[$, $\omega_0 = 0$ (et donc $E_0 = 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$) alors ω reste ≤ 0 pendant tout un mouvement de balancier, *i.e.* pendant une demi-période, période que l'on note T . On a donc $I = [0, \frac{T}{2}]$. Lorsque $t = \frac{T}{2}$, $\theta = -\theta_0$ et $T = 2G(\theta_0)$.

On obtient ainsi une formule pour la période

$$T = 4G(\theta_0) = 2 \int_0^{\theta_0} (\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$T = 4 \int_0^1 \frac{dv}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \cdot v^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Cette expression à ceci d'intéressant qu'elle permet d'apporter des formules approchées pour T lorsque θ_0 n'est pas si petit que ça. Un DL de l'intégrande, utilisant le fait que $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$ lorsque $x \rightarrow 0$, montre que l'on peut prendre pour expression approchée de T , à une erreur d'ordre 4 en θ_0 près,

$$\begin{aligned} T &\approx 4 \int_0^1 \frac{dv}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}} + 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \int_0^1 \frac{v^2 dv}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &\approx 2\pi \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \end{aligned}$$

Il s'agit de la formule de BORDA.

L'équation du pendule est donc intégrée et on a une expression complète de θ en fonction de t . Bien évidemment les difficultés résident dans l'expression de la fonction G et de sa réciproque.

Le calcul de la fonction G peut se faire de façon approchée ou en utilisant la méthode d'EULER pour approcher une solution de l'équation (EVS, Pendule).

4.4 Exercice(s).

Exercice 14.—

On considère un couple (x, y) de fonctions définies de classe \mathcal{C}^1 sur $I =]-\infty, 1[$, à valeurs réelles vérifiant les conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 1$ et le système différentiel.

$$\forall t \in I, \begin{cases} x'(t) &= -4 \cdot x(t)^3 \cdot y(t)^3 \\ y'(t) &= 3 \cdot x(t)^2 \cdot y(t)^4 \end{cases}$$

1. Soit $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall X, Y \in \mathbb{R}, E(X, Y) = X^3 \cdot Y^4$ et e la fonction définie sur I par

$$\forall t \in I, e(t) = E(x(t), y(t))$$

Montrer que la fonction e est constante sur I et donner la valeur de cette constante.

2. On pose $\mathcal{C} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2, E(X, Y) = 1\}$.

2.a. Représenter graphiquement l'ensemble \mathcal{C} . On pourra remarquer que \mathcal{C} est la réunion de deux graphes d'équation type $Y = f_{\pm}(X), X \in]0, +\infty[$ ou que \mathcal{C} est un seul graphe d'équation type $X = g(Y), Y \in \mathbb{R}^*$.

2.b. Montrer que $\{(x(t), y(t)), t \in I\} \subset \mathcal{C}$. A-t-on égalité?

2.c. Que dire du signe des fonctions x et y ? De leur sens de variation? Indiquer sur le graphe des positions plausibles pour $(x(t), y(t))$ lorsque $t = -1, t = 0, t = \frac{1}{2}$.

3.

3.a. En déduire que y est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y'(t) = 3y^{\frac{4}{3}}(t)$$

et résoudre cette équation différentielle à variables séparées.

3.b. Donner une expression de $x(t)$ en fonction de $t \in I$.

4.5 Dyn. pop. :Modèle de LOTKA–VOLTERRA (1928)

Le modèle de LOTKA–VOLTERRA ou modèle proie-prédateur est un modèle où deux populations co-existent, une population de proies qui tend à augmenter d'autant plus qu'il y a moins de prédateurs et une population de prédateurs qui tendent à se décroître lorsque qu'il y a peu de proies¹³.

Appelons D le nombre de proies à l'instant t , G le nombre de prédateurs¹⁴, r_D et r_G leurs taux de croissance respectifs. On fait l'hypothèse que

$$r_G = -r_g + k_G \cdot D \text{ et } r_D = r_d - k_D \cdot G$$

où r_g , k_G , r_d et k_D sont des constantes positives. On a donc le système d'EDO.

$$\frac{dG}{dt} = (-r_g + k_G \cdot D) \cdot G \text{ et } \frac{dD}{dt} = (r_d - k_D \cdot G) \cdot D$$

Ces EDO sont non linéaires et couplées. Les points d'équilibre jouent, comme toujours, un rôle crucial : ici le point d'équilibre de coordonnées strictement positives est

$$(G_c, D_c) = \left(\frac{r_d}{k_D}, \frac{r_g}{k_G} \right)$$

En posant $u = \frac{G}{G_c}$ et $v = \frac{D}{D_c}$, le système devient

$$\frac{du}{dt} = -r_g(1-v) \cdot u \text{ et } \frac{dv}{dt} = +r_d(1-u) \cdot v$$

Ce système se « résout » avec le même type de méthode que pour le pendule pesant. On remarque qu'en posant

$$E = r_d(\ln u - u) + r_g(\ln v - v) = \ln(u^{r_d} e^{-r_d \cdot u} v^{r_g} e^{-r_g \cdot v})$$

On a

$$\frac{dE}{dt} = r_d \frac{1-u}{u} \frac{du}{dt} + r_g \frac{1-v}{v} \frac{dv}{dt} = 0$$

et donc E est constante dans l'évolution. Les lignes de niveau de E jouent un rôle important dans la résolution.

Les figures 22 et 23 montrent les résultats de simulations (portrait de phase et graphes) obtenues par l'application d'un schéma d'EULER

Utiliser le script LV.py.

Nous sommes confrontés au problème que la méthode d'EULER simple ne conserve pas l'énergie E . Les graphes suivants sont issus d'une méthode avec correction où, à chaque pas de la méthode d'EULER, on corrige les valeurs calculées pour que l'énergie reste conservée.

Les figures 24 et 25 montrent les résultats de simulations (portrait de phase et graphes) obtenues par l'application d'un schéma d'EULER corrigé.

Il faut parfois se confronter au réel !

Je n'ai pas pu retrouver les graphes originaux de VOLTERRA (1928) qui traitait de poissons dans l'Adriatique. On trouve sur le web quelques graphes issus de données réelles. La figure 26 montre les évolutions de la population de lièvres et de lynx au nord du Canada.

Pour finir, en figure 27, le rendu d'une simulation probabiliste de rencontres gourmandes entre proies et prédateurs.

13. et inversement !

14. D comme délicieux et G comme gourmet. P et P ça ne pouvait pas aller

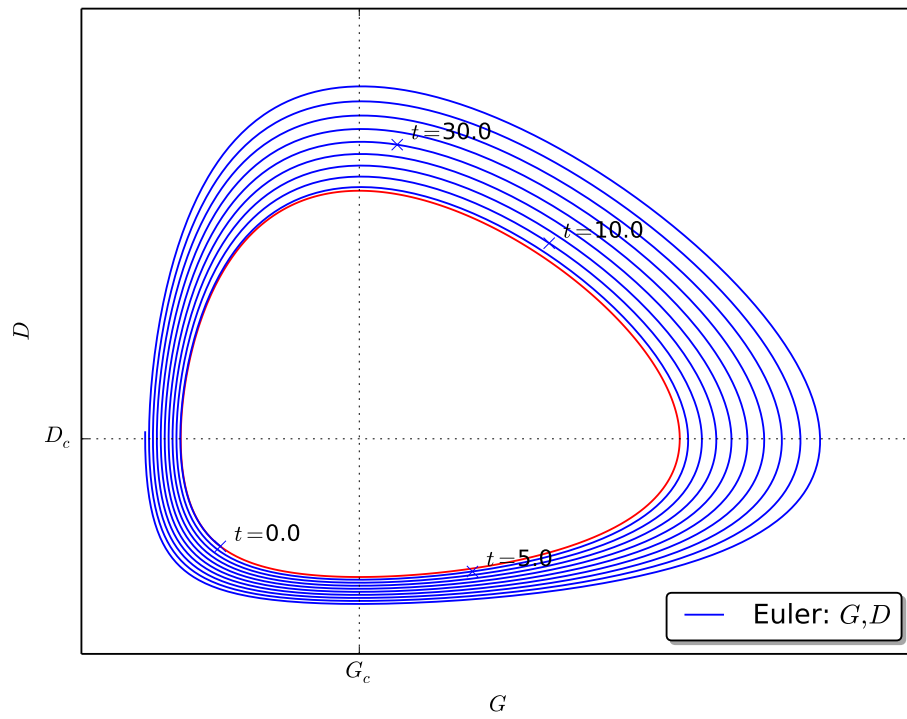


FIGURE 22 – LOTKA–VOLTERRA, EULER standard : portrait de phase

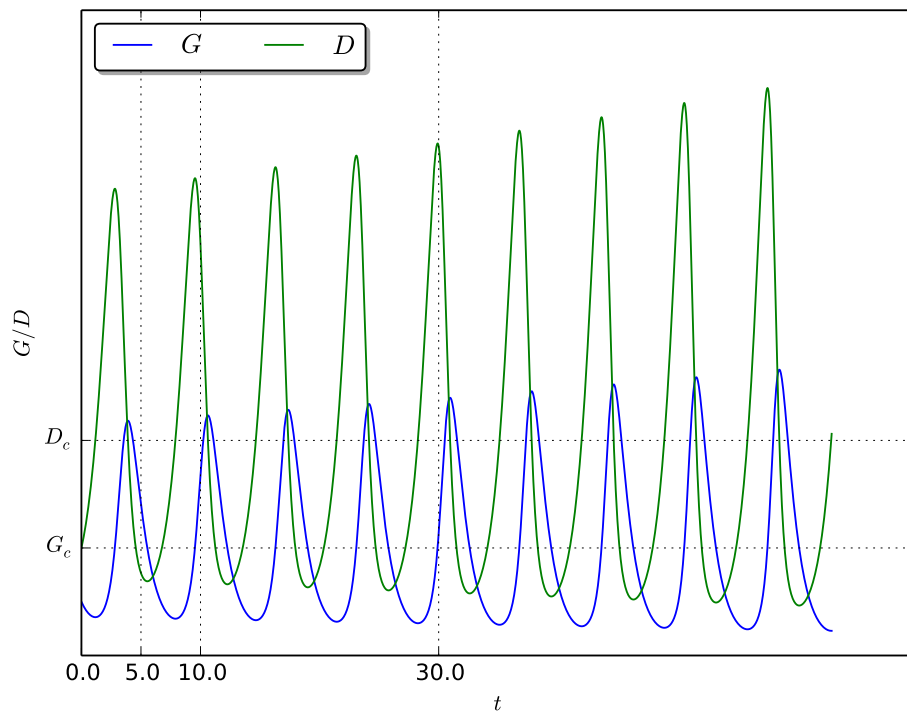


FIGURE 23 – LOTKA–VOLTERRA, EULER standard : graphes

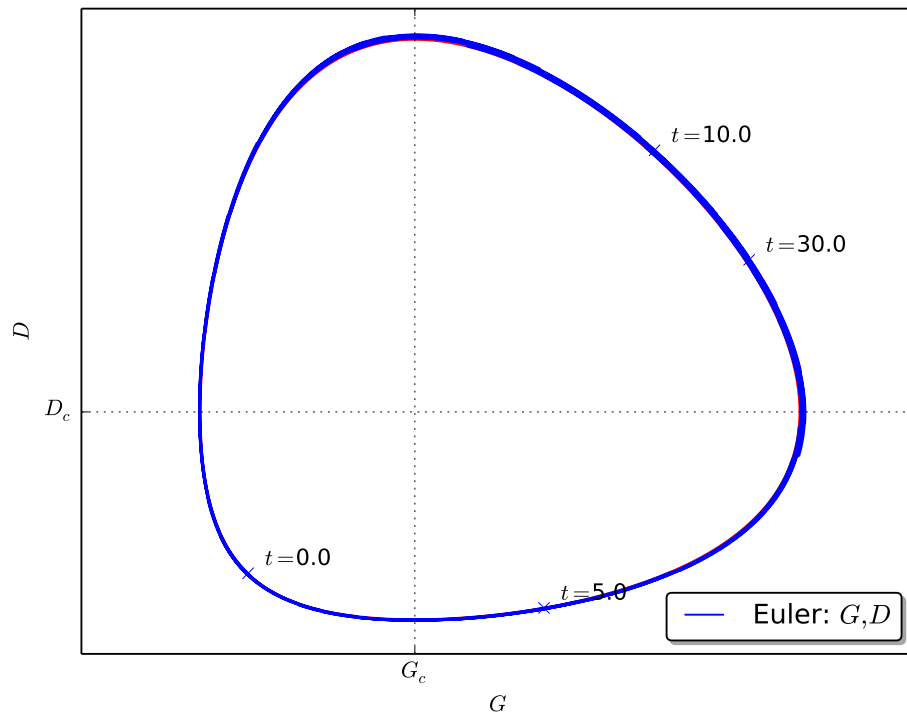


FIGURE 24 – LOTKA–VOLTERRA, EULER corrigé : portrait de phase

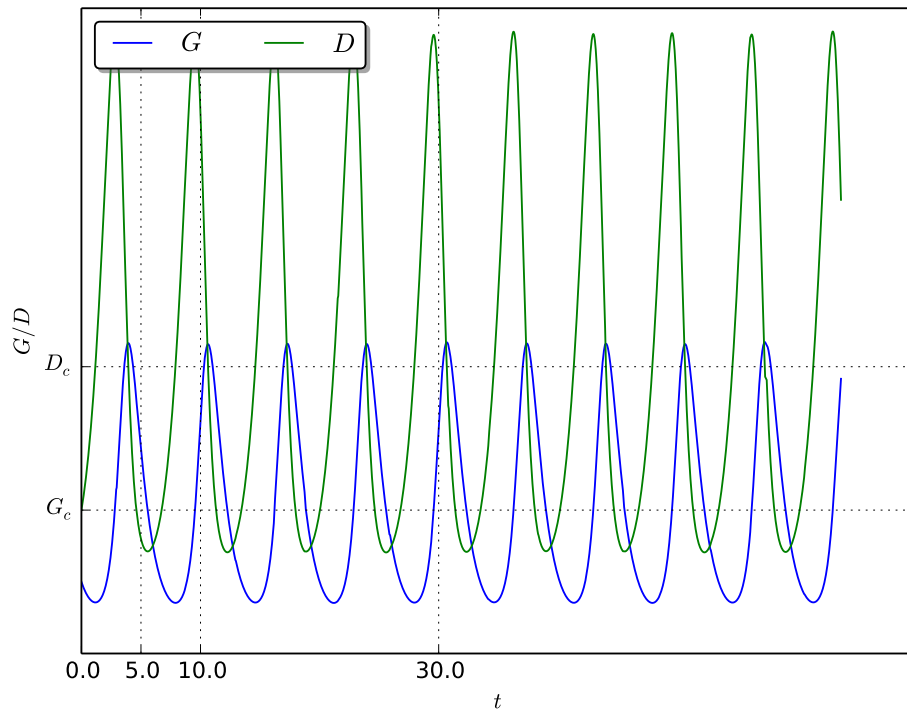


FIGURE 25 – LOTKA–VOLTERRA, EULER corrigé : graphes

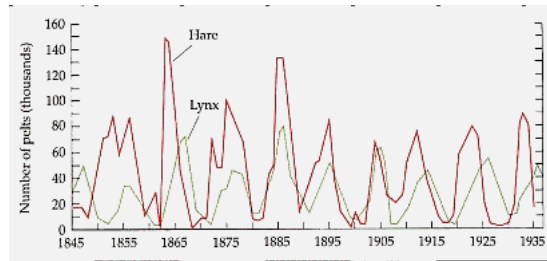


FIGURE 26 – Populations de Lièvres et Lynx au Canada-(PURVES et al., 1992)

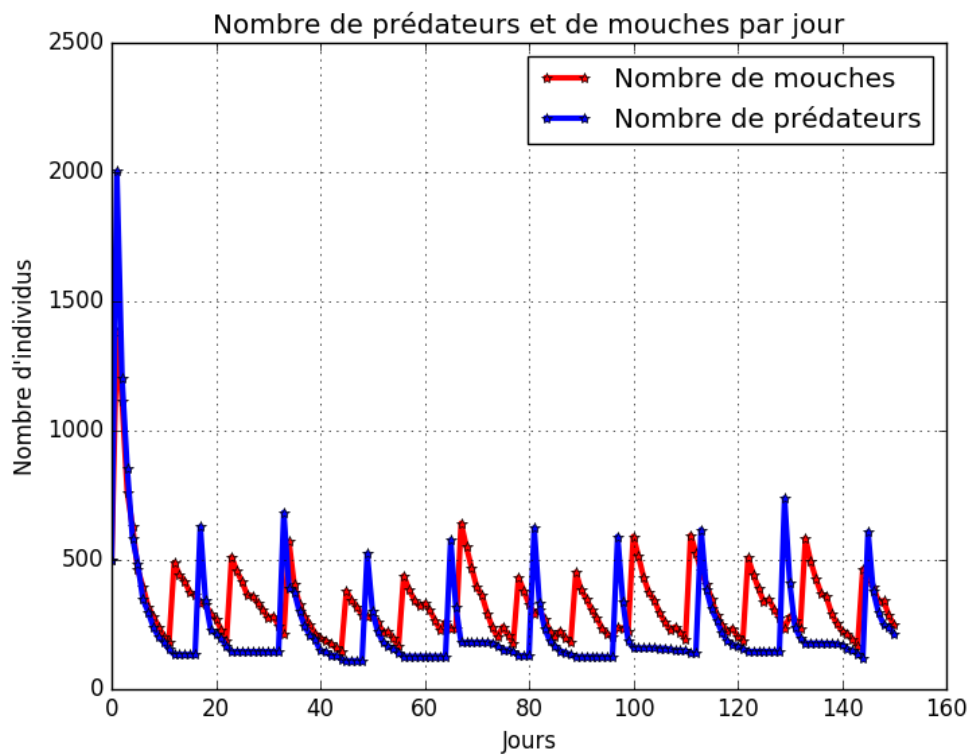


FIGURE 27 – Simulation proies/prédateurs avec comportement individuel probabiliste, G. ROBERT, 2017

5 Equations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles est une équation dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables (réelles) liant les dérivées partielles de la fonction inconnue.

La physique (mécanique, mécanique des fluides) est une source inépuisable de telles équations.

Les techniques d'équations différentielles servent de base pour tenter de résoudre des équations aux dérivées partielles.

5.1 Equations de transport

Exercice 15.— Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq 0$.

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 vérifiant

$$a \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (*)$$

On pourra changer de variables, poser $x = a.u + b.v$, $y = b.u - a.v$ et chercher l'équation satisfaite par

$$g(u, v) = f(x, y) = f(a.u + b.v, b.u - a.v)$$

Indication: On doit trouver que $f(x, y) = h(b.x - a.y)$ pour une certaine fonction h de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

2. En interprétant géométriquement cette quantité comme le produit scalaire du gradient de f avec un certain vecteur. Comment sont les lignes de niveau de f ? Est-ce cohérent avec le résultat trouvé?

Exercice 16.— **Equation des ondes.** Soit $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 , vérifiant l'équation (dite équation des ondes)

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0$$

1. En posant $h_+(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$, montrer que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial h_+}{\partial t}(t, x) - c \cdot \frac{\partial h_+}{\partial x}(t, x) = 0$$

Indication: Penser à l'égalité de SCHWARZ garantissant la possibilité de permuter les dérivées partielles.

2. Dédire de l'exercice 15 que h_+ est de la forme

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, h_+(t, x) = f(x + c.t)$$

pour une certaine fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

3. Soit F une primitive de f et $h_-(t, x) = u(t, x) - \frac{1}{2c}F(x + ct)$. Montrer que h_- vérifie

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial h_-}{\partial t}(t, x) + c \cdot \frac{\partial h_-}{\partial x}(t, x) = 0$$

et déduire de l'exercice 15 que h_- est de la forme

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, h_-(t, x) = g(x - c.t)$$

pour une certaine fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

4. Conclure l'exercice en donnant la forme particulière que doit avoir u (On essaiera d'en donner la présentation la plus symétrique possible).

Exercice 17.— Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 , vérifie l'équation (dite de transport)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + u'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Montrer que pour tout $C \in \mathbb{R}$, f est constante sur le graphe de $x \mapsto y = u(x) + C$ et en déduire que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(0, y + u(0) - u(x))$$

5.2 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur 1D gouverne l'évolution de la température dans une barre de longueur ℓ donnée, t est la variable de temps, $t \geq 0$ et x la variable marquant l'abscisse du point de la barre considérée.

L'inconnue est la fonction T , $T : [0, +\infty[\times [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, pour $t \geq 0$, $x \in [0, \ell]$, $T(t, x)$ est donc la température au point d'abscisse x , à l'instant t .

T est régie par l'équation aux dérivées partielles, issue d'un bilan d'échange de chaleur (lois de FOURIER),

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

i.e.

$$\forall t > 0, \forall x \in [0, \ell], \frac{\partial T}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t, x)$$

D'un point de vue mathématique, la fonction T doit être suffisamment régulière pour que les équations aient un sens (on n'insiste pas sur ce point)

On peut imposer, comme conditions aux extrémités (ou conditions aux limites), par exemple,

1. Une température T_0 à l'instant initial, *i.e.* la répartition de température sur la barre à l'instant $t = 0$, $T_0 : x \in [0, \ell] \mapsto T_0(x) \in \mathbb{R}$ et donc on veut

$$\forall x \in [0, \ell], T(0, x) = T_0(x)$$

2. La température aux extrémités de la barre *i.e.*

$$\forall t > 0, T(t, 0) = T(t, \ell) = 0$$

Il ne s'agit pas d'une équation différentielle. On peut cependant se ramener à des études d'équations différentielles dans des cas particuliers très importants de températures initiales.

Analysons ce problème en supposant¹⁵ que $T(t, x) = U(t) \cdot V(x)$. Si l'on veut respecter les conditions aux extrémités, on peut imposer $U(0) = 1$ et $V(x) = T_0(x)$.

De plus, l'équation de la chaleur se réécrit

$$\forall t > 0, \forall x \in [0, \ell], U'(t) \cdot V(x) = U(t) \cdot V''(x) \quad (*)$$

15. Il s'agit d'un *ansatz* : dans l'analyse du problème, on se limite aux solutions ayant une forme particulière

et donc, au voisinage d'un point x_0 tel que $V(x_0) \neq 0$, on a, pour $t > 0$,

$$U'(t) = \frac{V''(x_0)}{V(x_0)} \cdot U(t)$$

La quantité à droite est indépendante de x , celle de gauche indépendante de t et donc, en posant $\alpha = \frac{V''(x_0)}{V(x_0)}$, on a, pour tout $t > 0$, $U(t) = e^{\alpha \cdot t}$.

En reprenant l'équation (*), on obtient alors que

$$\forall x \in [0, \ell], V''(x) - \alpha \cdot V(x) = 0$$

Séparons les cas suivant le signe de α .

1. Si $\alpha > 0$, V est combinaison linéaire des deux fonctions $x \mapsto e^{+\sqrt{\alpha} \cdot x}$ et $x \mapsto e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x}$, *i.e.* il existe A_{\pm} deux constantes telles que

$$\forall x \in [0, \ell], V(x) = A_+ e^{+\sqrt{\alpha} \cdot x} + A_- e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x}$$

La condition de bord $V(0) = V(\ell) = 0$ se traduit par le système linéaire

$$A_+ + A_- = 0 \text{ et } A_+ e^{+\sqrt{\alpha} \cdot \ell} + A_- e^{-\sqrt{\alpha} \cdot \ell} = 0$$

Le déterminant de ce système est $e^{-\sqrt{\alpha} \cdot \ell} - e^{+\sqrt{\alpha} \cdot \ell}$ et il ne s'annule pas. La seule solution est donc $A_- = A_+ = 0$ et $V = 0$. Cela nous donne uniquement la solution triviale : $T = 0$.

2. Si $\alpha = 0$, V est une fonction affine. Celle-ci devant s'annuler en deux points, c'est la fonction nulle. On conclut comme dans le cas précédent.
3. Si $\alpha < 0$, $\alpha = -\omega^2$ où $\omega > 0$. V est combinaison linéaire des deux fonctions $x \mapsto e^{+i\omega \cdot x}$ et $x \mapsto e^{-i\omega \cdot x}$, *i.e.* il existe A_{\pm} deux constantes telles que

$$\forall x \in [0, \ell], V(x) = A_+ e^{+i\omega \cdot x} + A_- e^{-i\omega \cdot x}$$

La condition de bord $V(0) = V(\ell) = 0$ se traduit par le système linéaire

$$A_+ + A_- = 0 \text{ et } A_+ e^{+i\omega \cdot \ell} + A_- e^{-i\omega \cdot \ell} = 0$$

i.e.

$$A_+ + A_- = 0 \text{ et } A_+ \cdot \sin(\omega \ell) = 0$$

En éliminant le cas $A_+ = 0$, on obtient donc, si l'on veut obtenir une solution non triviale que $\omega \ell$ est un multiple entier de π , *i.e.*

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \omega = \frac{k\pi}{\ell}$$

On a alors

$$\forall x \in [0, \ell], V(x) = A \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{\ell} \cdot x\right)$$

Pour U , on a $\alpha = -\omega^2 = \left(\frac{k \cdot \pi}{\ell}\right)^2$ et donc

$$\forall t \geq 0, U(t) = e^{-\left(\frac{k \cdot \pi}{\ell}\right)^2 \cdot t}$$

et pour récapituler, si T est une solution ayant la forme indiquée, on a

$$\forall t \geq 0, \forall x \in [0, \ell], T(t, x) = A \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{\ell} \cdot x\right) e^{-\left(\frac{k \cdot \pi}{\ell}\right)^2 \cdot t}$$

Voilà pour l'analyse du problème. Il reste à faire la synthèse. On a obtenu, modulo vérification que
 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction T définie par la formule

$$\forall t \geq 0, \forall x \in [0, \ell], T(t, x) = A \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{\ell} \cdot x\right) e^{-\left(\frac{k \pi}{\ell}\right)^2 t}$$

est solution de l'équation de la chaleur, vérifiant les conditions aux limites

1. $\forall t > 0, T(t, 0) = T(t, \ell) = 0,$
2. $\forall x \in [0, \ell], T(0, x) = A \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{\ell} \cdot x\right)$

Par linéarité (*a.k.a* le principe de superposition des solutions), on obtient le résultat suivant. Supposons que la température initiale T_0 soit de la forme

$$T_0(x) = \sum_{k \in K} A_k \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{\ell} \cdot x\right)$$

où K est une ensemble fini d'entiers naturels.

La fonction T définie par

$$\forall t \geq 0, \forall x \in [0, \ell], T(t, x) = \sum_{k \in K} A_k \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{\ell} \cdot x\right) e^{-\left(\frac{k \pi}{\ell}\right)^2 t}$$

est solution de l'équation de la chaleur, vérifiant les conditions aux limites

1. $\forall t > 0, T(t, 0) = T(t, \ell) = 0,$
2. $\forall x \in [0, \ell], T(0, x) = T_0(x)$

Les figures 28 illustrent des solutions.

Utiliser le script `chaleur.py`.

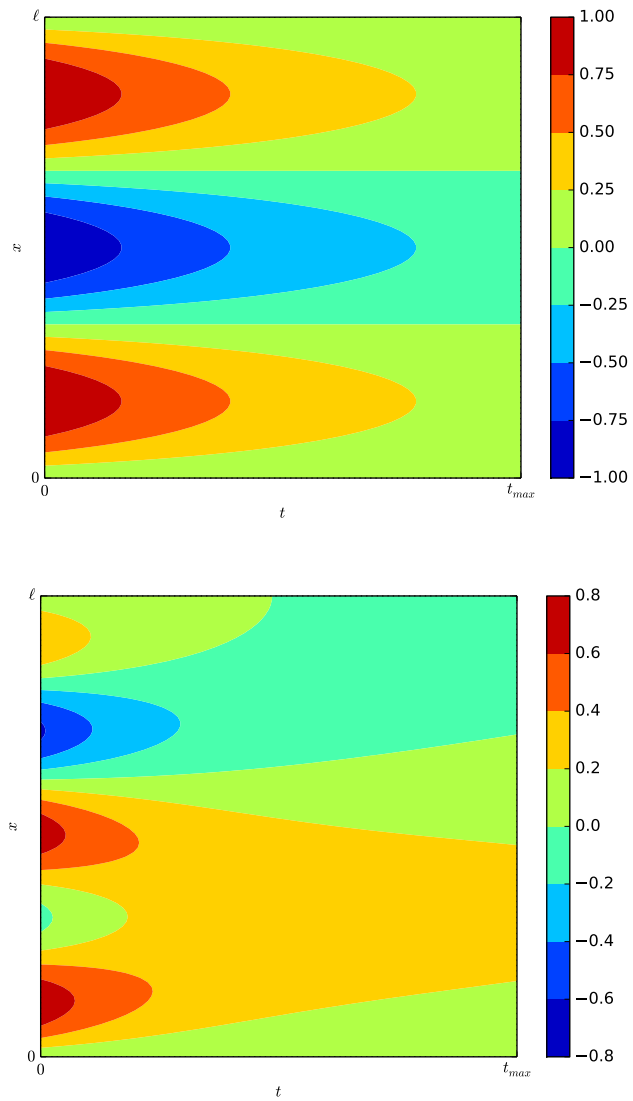


FIGURE 28 – Solutions de l'équation de la chaleur pour $T_0(x) = \sin \frac{3\pi}{\ell}x$ et $T_0(x) = 0.2 \sin \frac{\pi}{\ell}x + 0.3 \sin \frac{2\pi}{\ell}x + 0.5 \sin \frac{5\pi}{\ell}x$