Corrections choisies 05

Algèbre linéaire.

Correction Ex.–48 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\{0,\dots,n-1\}}$ et on considère la base de FOURIER, $\mathscr{F} = (e_k)_{k\in\{0,\dots,n-1\}}$ où e_k est le vecteur dont la coordonnée d'indice ℓ est $e^{\frac{ik\ell 2\pi}{n}}$. (ici i est le nombre complexe bien connu, pas un indice entier !)

1. Sous réserve que $\mathscr{F}$ soit une base, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^{\{0,\dots,n-1\}}$ à la base $\mathscr{F}$ est

$$F = (e^{\frac{ik\ell 2\pi}{n}})_{0\leq \ell,k\leq n-1}$$

Cette matrice est symétrique (non réelle ! !). La conjuguée de sa transposée (en fait la transposition est inutile) est

$${}^t\overline{F} = (e^{-\frac{ik\ell 2\pi}{n}})_{0\leq k,\ell\leq n-1}$$

Soit $0 \leq k,k' \leq n-1$ et $\delta_{k,k'}$ l'élément en position (k',k) dns la matrice ${}^t\overline{F}.F$.

Par la formule génerale du produit matriciel, on a

$$\delta_{k,k'} = \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{-\frac{ik\ell 2\pi}{n}}.e^{+\frac{ik'\ell 2\pi}{n}} = \sum_{\ell=0}^{n-1}\left(e^{\frac{i(k'-k)\ell 2\pi}{n}}\right)^{\ell}$$

On reconnait là la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique et on a donc

$$\delta_{k,k'} = \begin{cases} n & \text{si } e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}} = 1 \\ \frac{1-\left(e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}}} & \text{si } e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}} \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} n & \text{si } k = k' \\ 0 & \text{si } k \neq k' \end{cases}$$

Noter que $\left(e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}}\right)^n = 1$. Il faut expliquer pourquoi la condition $e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}} \neq 1$ équivaut à $k \neq k'$ lorsque $0 \leq k,k' \leq n-1$.

On note d'abord que $-(n-1) \leq k'-k \leq n-1$. La condition $e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}} = 1$ équivaut au fait qu'il existe un entier relatif a tel que $\frac{(k'-k)2\pi}{n} = a.2\pi$, simplifié, cela signifie que

$$k'-k = a.n$$

Maintenant fait que $-(n-1) \leq a.n \leq n-1$ montre que $-1 < a < +1$. Le seul entier reltif vérifiant cela est $a = 0$ et donc $k = k'$.

On a donc

$${}^t\overline{F}.F = n.I_n$$

et donc F est inversible, d'inverse $F^{-1} = \frac{1}{n}.{}^t\overline{F}$. Cela montre au passage que la famille $\mathscr{F}$ est une base et que F est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vers $\mathscr{F}$.

2. On se donne un vecteur $a \in \mathbb{C}^{\{0,\dots,n-1\}}$ et on considère une matrice A carrée d'ordre n, indicée par $\{0,\dots,n-1\}\times\{0,\dots,n-1\}$ dont le coefficient à la place (k,ℓ) est $a_{k-\ell}$ lorsque $k \geq \ell$ et $a_{n+k-\ell}$ lorsque $k < \ell$.

2.a. Donnons des exemples pour $n = 3$ et $n = 4$.

— Pour $n = 3$ et $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, on a

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

— Pour $n = 4$ et $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, on a

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

On voit que la première colonne est formée du vecteur a et que pour passer d'une colonne à la suivante, on "fait tourner" les coefficients en les décalant vers le bas et en faisant remonter le dernier en première position. D'où, probablement, le nom de "matrice cyclique".

2.b. On considère l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à la base canonique est A. Calculons, pour chaque vecteur e_k le produit $A.e_k =: f_k$. Le coefficient d'indice ℓ de f_k est

$$(f_k)_\ell = \sum_{j=0}^{n-1} A_{\ell,j}(e_k)_j = \sum_{j=0}^{n-1} A_{\ell,j} e^{\frac{ijk2\pi}{n}} = \sum_{j=0}^{\ell-1} A_{\ell,j} e^{\frac{ijk2\pi}{n}} + \sum_{j=\ell+1}^{n-1} A_{\ell,j} e^{\frac{ijk2\pi}{n}} + A_{\ell,\ell} e^{\frac{ik\ell 2\pi}{n}}$$

On a donc, en utilisant la formule pour $A_{\ell,j}$ (attn, les noms des indices sont changés par rapport au texte),

$$(f_k)_\ell = \sum_{j=0}^{\ell-1} a_{\ell-j} e^{\frac{ijk2\pi}{n}} + \sum_{j=\ell+1}^{n-1} a_{n+\ell-j} e^{\frac{ijk2\pi}{n}} + a_0.e^{\frac{ik\ell 2\pi}{n}}$$

Dans le première somme, effectuons le changement d'indice $j' = \ell - j$ (on a donc j' varie de 1 à ℓ) et dans la deuxième $j' = n+\ell-j$ (on donc j' varie de $n-1$ à $\ell+1$) pour obtenir

$$(f_k)_\ell = \sum_{j'=1}^{\ell} a_{j'} e^{\frac{i(\ell-j')k2\pi}{n}} + \sum_{j'=\ell+1}^{n-1} a_{j'} e^{\frac{i(n+\ell-j')k2\pi}{n}} + a_0.e^{\frac{ik\ell 2\pi}{n}}$$

comme on remarque que $e^{\frac{i(n+\ell-j')k2\pi}{n}} = e^{\frac{i(\ell-j')k2\pi}{n}}$, on a alors (on change tous les j' en j), puis en factorisant $e^{\frac{i\ell k2\pi}{n}}$,

$$(f_k)_\ell = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{\frac{i(\ell-j)k2\pi}{n}} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{\frac{-ijk2\pi}{n}}\right).e^{\frac{i\ell k2\pi}{n}}$$

En posant $\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{\frac{-ijk2\pi}{n}}$ (noter l'absence de ℓ dans cette expression), on a donc

$$A.e_k = f_k = \lambda_k.e_k$$

La matrice cherchée est donc

$$D = diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$$

et l'endomorphisme en question est diagonlisable.

2.c. On a

$$F^{-1}.A.F = D$$

i.e.

$$\frac{1}{n}.{}^t\overline{F}.A.F = D$$

Correction Ex.–49 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, muni d'une base $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$.

1. La matrice d'une forme linéaire relativement aux bases $\mathscr{E}$ de E et (1) de $\mathbb{K}$ est une matrice ligne. Vu la spécification, la forme linéaire e_k^* a pour matrice (relativement à ces bases)

$${}^tE_k = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots 0 \end{pmatrix}$$

où le seul 1 est à la colonne k.

2. E^*, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E est isomorphe à l'espace $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ des matrices à coeff. dans $\mathbb{K}$ comportant 1 ligne et n colonnes. A une application linéaire $\ell : E \to \mathbb{K}$ on associe sa matrice $L = {}^{(1)}[\ell]_{\mathscr{E}}$ relativement aux bases $\mathscr{E}$ de E et (1) de $\mathbb{K}$.

L'espace E^* est donc de dimension n, qui est la dimension de E.

Comme $({}^tE_1, \ldots, {}^tE_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ (cours), par isomorphie, $\mathscr{E}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ forme une base de E^*.

Les coordonnées d'une forme linéaire ℓ dans cette base $\mathscr{E}^*$ sont

$${}^{\mathscr{E}^*}[\ell] = \begin{pmatrix} \ell(e_1) \\ \vdots \\ \ell(e_n) \end{pmatrix}$$

En effet, par définition

$${}^{(1)}[\ell]_{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} \ell(e_1) & \ldots & \ell(e_n) \end{pmatrix}$$

et donc

$${}^{(1)}[\ell]_{\mathscr{E}} = \sum_{k=1}^{n} \ell(e_k).{}^tE_k = \sum_{k=1}^{n} \ell(e_k).{}^{(1)}[e_k^*]_{\mathscr{E}} = {}^{(1)}\left[\sum_{k=1}^{n} \ell(e_k).e_k^*\right]_{\mathscr{E}}$$

ce qui est bien

$$\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell(e_k).e_k^* \text{ et } {}^{\mathscr{E}^*}[\ell] = \begin{pmatrix} \ell(e_1) \\ \vdots \\ \ell(e_n) \end{pmatrix}$$

3. Soit $\phi : E \to E$ un endomorphisme de E de matrice M dans la base $\mathscr{E}$. On considère

$$\phi^* : E^* \to E^*, \ell \mapsto (x \in E \mapsto \ell(\phi(x)))$$

La matrice de ϕ^* relativement à la base $\mathscr{E}^*$ est une matrice $n \times n$. Pour cette matrice N de ϕ^*, on applique la définition. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$, N_k la colonne k de N comporte les coordonnées de $\phi^*(e_k^*)$ sur la base $\mathscr{E}^*$.

On a

$$\phi^*(e_k^*) \quad = \quad (x \in E \mapsto e_k^*(\phi(x)))$$

et la colonne de coordonnées de cette forme linéaire dans la base $\mathscr{E}^*$ est

$$N_k = \begin{pmatrix} [\phi^*(e_k^*)](e_1) \\ \vdots \\ [\phi^*(e_k^*)](e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_k^*(\phi(e_1)) \\ \vdots \\ e_k^*(\phi(e_n)) \end{pmatrix}$$

Or pour $x \in E$, $e_k^*(\phi(x))$ est la coordonnée d'indice k dans la base $\mathscr{E}$ du vecteur $\phi(x)$ et donc pour $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, $e_k^*(\phi(e_\ell))$ est la coordonnée d'indice k de l'image de $\phi(e_\ell)$. Par définition de la matrice M de ϕ relativement à la base $\mathscr{E}$,

$$e_k(\phi(e_\ell)) = M_{k,\ell}$$

On vient donc de montrer que $N_{\ell,k} = M_{k,\ell}$ et donc que

$$N = {}^tM$$