---

# Notes de cours 05

Algèbre linéaire.

---

## Table des matières

# 1 Trois problèmes, une structure

## 1.1 Des systèmes linéaires

**Dans** $\mathbb{R}^3$ Soit à résoudre le système (une équation !) linéaire d'inconnue $x = (x_0, x_1, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$(S)\left\{\begin{array}{cccccc} -x_0 & +3x_1 & -x_2 & & = & 0 \end{array}\right.$$

En introduisant deux paramètres, on tombe sur l'ensemble des solutions $S$ de $(S)$ (on choisit, à dessein pédagogique, de prendre comme inconnues secondaires $x_0$ et $x_1$),

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \exists \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{ccccccc} x_0 & & & = & \lambda & \\ & x_1 & & = & & \mu \\ & & x_2 & = & -\lambda & +3\mu \end{array}\right. \right\}$$

*i.e.* , en posant $u = (1, 0, -1)$, $v = (0, 1, 3)$, $x$ vérifie $(S)$ si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda.u + \mu.v$$

On a finalement l'égalité

$$S = \{\lambda.u + \mu.v, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Remarquons que l'on dispose d'autres solutions en donnant des valeurs au couple $(\lambda, \mu)$, par exemple, en posant $q_+ = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, $q_- = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, de sorte que pour $q = q_+$ et $q = q_-$, on a

$$-1 + 3q - q^2 = 0$$

alors les vecteurs

$$u_+ = (1, q_+, q_+^2) = 1.u + q_+.v, \; u_- = (1, q_-, q_-^2) = 1.u + q_-.v$$

sont solutions de $(S)$.

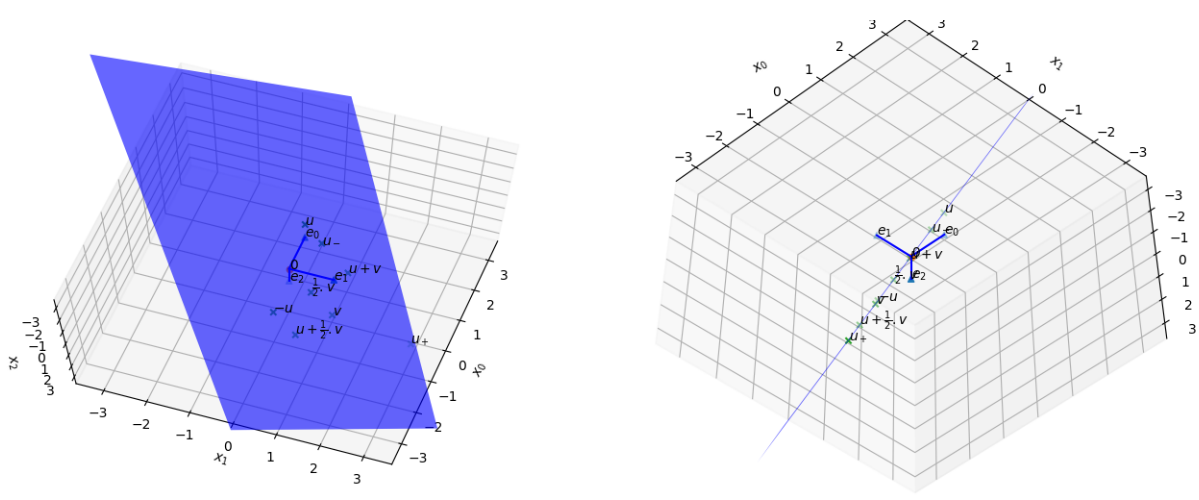

FIGURE 1 – Deux représentations graphiques des solutions du système

**Dans** $\mathbb{R}^5$ Soit à résoudre le système linéaire d'inconnue $x = (x_0, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^5$

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrrrcl} -x_0 & +3x_1 & -x_2 & & & = & 0 \\ & -x_1 & +3x_2 & -x_3 & & = & 0 \\ & & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

On utilise en général pour cela la méthode du *pivot de* GAUSS et, après avoir posé cette méthode (ici, le système est échelonné), on tombe sur l'ensemble des solutions $S$ de $(S)$, (on utilise, comme dans l'exemple précédent les inconnues $x_0$ et $x_1$ comme inconnues secondaires)

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, \exists \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{ccccccrr} x_0 & & & & & = & \lambda & \\ & x_1 & & & & = & & \mu \\ & & x_2 & & & = & -\lambda & +3\mu \\ & & & x_3 & & = & -3\lambda & +8\mu \\ & & & & x_4 & = & -8\lambda & +21\mu \end{array}\right. \right\}$$

*i.e.* , en posant[1] $u = (1,0,-1,-3,-8)$, $v = (0,1,3,8,21)$, $x$ vérifie $(S)$ si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda.u + \mu.v$$

On a finalement

$$S = \{\lambda.u + \mu.v, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Comme dans l'exemple précédent, en posant $q_+ = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$, $q_- = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$, de sorte que pour $q = q_+$ et $q = q_-$, on a

$$-1 + 3q - q^2 = 0$$

alors les vecteurs

$$u_+ = (1, q_+, q_+^2, q_+^3, q_+^4) = 1.u + q_+.v, u_- = (1, q_-, q_-^2, q_+^3, q_+^4) = 1.u + q_-.v$$

sont solutions de $(S)$.

1. Je note indifféremment les vecteurs de $\mathbb{R}^5$ sous forme de 5-uplet $(..,..,..)$ ou de matrice colonne à 5 lignes. Cette dernière présentation est compatible avec le codage des vecteurs de `numpy`

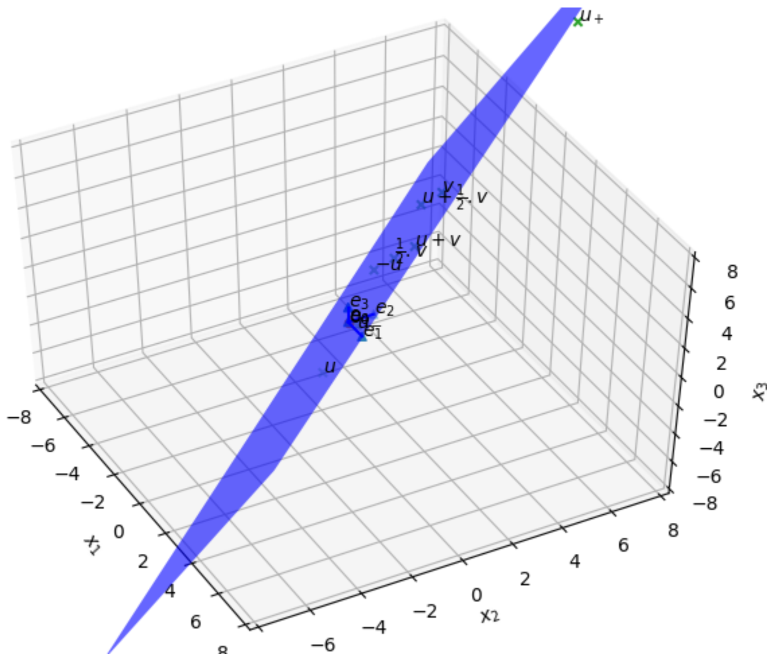


FIGURE 2 – Une représentation graphique des solutions du système, projections sur les axes $x_1$, $x_2$ et $x_3$

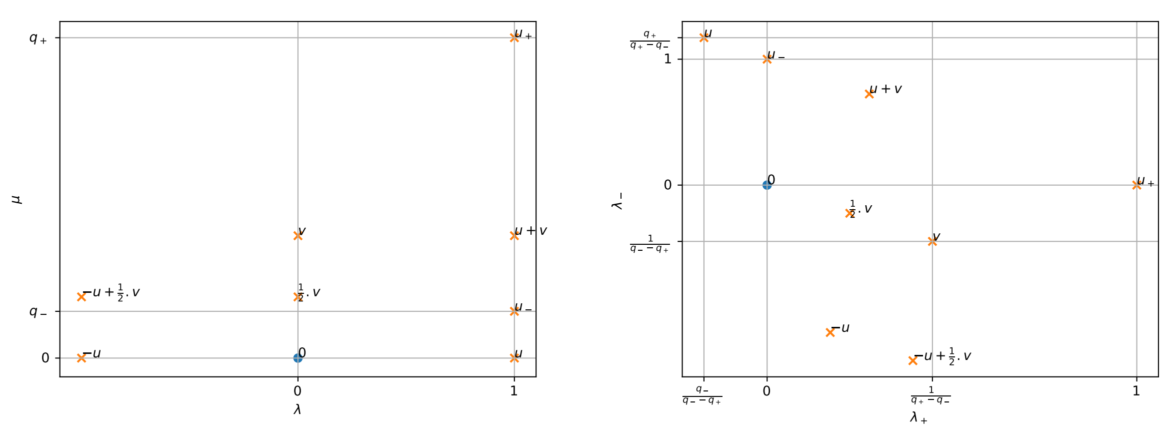


FIGURE 3 – Deux représentations graphiques en se plaçant uniquement dans le plan des solutions. On a $u_+ = 1.u + q_+.v$, $u_- = 1.u + q_-.v$, $u = \frac{1}{q_+ - q_-}(-q_-.u_+ + q_+.u_-)$, $v = \frac{1}{q_+ - q_-}(u_+ - u_-)$

## 1.2 Une suite récurrente

Intéressons nous maintenant au problème de déterminer l'ensemble $R$ des suites récurrentes (d'ordre 2) réelles $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la récurrence linéaire,

$$\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+2}=3x_{n+1}-x_n \tag{R}$$

La méthode classique consiste à rechercher les suites *géométriques* vérifiant cette récurrence. Une telle suite géométrique a une raison $q$ devant satisfaire $q^2=3q-1$, l'*équation caractéristique* de la récurrence i.e $q=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$. Posons, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{+,n}=q_+^n$, $u_{-,n}=q_-^n$. On a $u_+,u_-\in R$.

On peut appliquer le principe de superposition des solutions  : Comme $u_+$ et $u_-$ sont deux suites vérifiant $(R)$, en prenant $\lambda_+$, $\lambda_-$ deux réels et en posant $x=\lambda_+.u_++\lambda_-.u_-$, opération aux sens des suites, alors $x$ vérifie $(R)$.)

Donc

$$\{\lambda_+.u_++\lambda_-.u_-,\,(\lambda_+,\lambda_-)\in\mathbb{R}^2\}\subset R$$

La conclusion de la méthode classique est que si $x$ est une suite satisfaisant cette récurrence $(R)$, il existe alors $\lambda_+$, $\lambda_-$ des réels tels que

$$x=\lambda_+.u_++\lambda_-.u_- \tag{C}$$

C'est à dire

$$\{\lambda_+.u_++\lambda_-.u_-,\,(\lambda_+,\lambda_-)\in\mathbb{R}^2\}=R$$

Ici, on va à contre-courant du principe de superposition en affirmant que *toute* suite $x$ vérifiant $(R)$ s'écrit sous la forme $(C)$. Il faut un argument, *i.e.* utiliser une propriété particulière dont jouissent $R$, $u^+$ et $u^-$, qui permette de faire ce saut.

Les suites $u,v\in R$ vérifiant les conditions initiales $u_0=1$, $u_1=0$, $v_0=0$, $v_1=1$ *i.e.*

$$u=(1,0,-1,-3,-8,\dots)\text{ et }v=(0,1,3,8,21,\dots)$$

vérifient $u=\frac{1}{q_+-q_-}(-q_-.u_++q_+.u_-)$ et $v=\frac{1}{q_+-q_-}(u_+-u_-)$. On a aussi $u_+=1.u+q_+.v$, $u_-=1.u+q_-.v$.

Les représentations graphiques de la figure 3 sont toujours pertinentes pour indiquer les positions de ces suites les unes par rapport aux autres.

## 1.3 Une équation différentielle

Un raisonnement similaire à celui fait sur les suites donne que si $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, est solution de l'équation différentielle (linéaire, d'ordre 2)

$$\forall t\in\mathbb{R}, f''(t)-3f'(t)+f(t)=0, \tag{ED}$$

alors, en définissant $f_+$ et $f_-$ par

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f_+(t)=e^{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})t}\text{ et }f_-(t)=e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})t},$$

il existe deux constantes réelles $\lambda_+$ et $\lambda_-$ telles que

$$f=\lambda_+f_++\lambda_-f_- \tag{C}$$

au sens des fonctions, i.e,

$$\forall t \in \mathbb{R},\, f(t) = \lambda_+ f_+(t) + \lambda_- f_-(t)$$

Une fois de plus, le principe de superposition des solutions est réalisé, il est donc clair qu'une fonction s'écrivant sous la forme $(C)$ est solution car $f_+$ et $f_-$ sont solution de $(ED)$.

Autrement dit, en notant $ED$ l'ensemble des fonctions vérifiant $(ED)$, le principe de superposition donne que, partant de $f_+, f_- \in ED$, on obtient

$$\{\lambda_+.f_+ + \lambda_-.f_-,\, (\lambda_+, \lambda_-) \in \mathbb{R}^2\} \subset ED$$

La méthode donne qu'en fait on a l'*égalité*

$$ED = \{\lambda_+.f_+ + \lambda_-.f_-,\, (\lambda_+, \lambda_-) \in \mathbb{R}^2\}$$

Là encore, une propriété particulière et non triviale de l'équation $(ED)$ et du couple $(f_-, f_+)$ fait que ce couple suffit à décrire *toutes* les solutions de $(ED)$ en les écrivant sous la forme $(C)$.

Les fonction $f, g \in ED$ vérifiant les conditions initiales $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ vérifient $f = \frac{1}{q_+ - q_-}(-q_-.f_+ + q_+.f_-)$ et $g = \frac{1}{q_+ - q_-}(f_+ - f_-)$. On a aussi $f_+ = 1.f + q_+.g$, $f_- = 1.f + q_-.g$.

Les représentations graphiques de la figure 3, après substitutions $u_+ \leftarrow f_+$, $u_- \leftarrow f_-$, $f \leftarrow u$, $g \leftarrow v$ sont toujours pertinentes pour indiquer les positions de ces fonctions les unes par rapport aux autres.

## 1.4 Espaces vectoriels

Ce que ce cours entend développer, c'est la structure commune à ces trois problèmes, *i.e.* la logique commune représentée géométriquement par la figure 3. Il s'agit de développer les bases du langage commun à ces phénomènes de superposition de solutions d'équations linéaires et de mettre en exergue les propriétés communes de ces problèmes.

Le point de départ est un ensemble $E$, non vide, (dans les exemples précédents, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réellesou l'ensemble $\mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ de fonctions à valeurs réelles) que l'on munit de deux opérations

1. $+$, une opération *interne* [2] : $+ : E \times E \to E, (u, v) \mapsto u + v$.
2. ., une opération *externe* [3] : $. : \mathbb{R} \times E \to E, (\lambda, u) \mapsto \lambda.u$

Ces deux opérations permettent, étant donnés deux éléments $x$ et $y$ de $E$ et deux *scalaires* [4] $\lambda$ et $\mu$, de former un élément de $E$, $z = \lambda.x + \mu.y$, *combinaison linéaire* de $x$ et $y$ avec les coefficients $\lambda$ et $\mu$.

Plus généralement, étant donnés $x_1, \dots, x_n$, $n$ éléments de $E$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des *scalaires*, *i.e.* des nombres réels, on peut former [5] un élément de $E$,

$$z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k,$$

l'élément $z$ de $E$ est *combinaison linéaire* des $x_i$ affectés des coefficients scalaires $\lambda_i$. On s'intéresse ensuite aux objets de $E$ possèdant une certaine propriété $(P)$. Le point saillant est que si $x, y \in E$ vérifient $(P)$ et si $\lambda, \mu$ sont deux réels alors $\lambda.x + \mu.y$ vérifie $(P)$ [6].

Dans chacun des exemples donnés, on peut rappeler comment sont définies les opérations.

---

2. interne car les deux arguments de cette fonction sont du même « type » $E$, opération car partant d'éléments du type $E$, la fonction retourne un élément du même type.
3. interne car les deux arguments de cette fonction sont de « types » *a priori* différents $E$ et $\mathbb{R}$. Le cas $E = \mathbb{R}$ n'est cependant pas exclu
4. Les nombres réels (et plus tard complexes) dans ce contexte sont souvent appelés des scalaires, la provenance de ce terme est géométrique, évoquant la notion de changement d'échelle, de taille
5. en utilisant les règles que l'on posera dans l'axiomatique
6. On dit que la propriété $(P)$ est stable par combinaisons linéaires.

1. Dans le cas de $\mathbb{R}^5$, si $x=(x_1,\dots,x_5)$, $y=(y_1,\dots,y_5)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on définit

$$x \underbrace{+}_{\text{au sens de } \mathbb{R}^5} y := (x_1 \underbrace{+}_{+\text{au sens des réels}} y_1,\dots,x_5+y_5) \text{ et } \lambda.x := (\lambda \underbrace{.}_{.\text{au sens des réels}} x_1,\dots,\lambda.x_5)$$

Ce qui a pour conséquence que la combinaison linéaire de $x$ et $y$ avec les coefficients $\lambda$ et $\mu$ vaut :

$$\lambda.x+\mu.y=(\lambda.x_1+\mu.y_1,\dots,\lambda.x_5+\mu.y_5)$$

On remarque que la propriété $(P)$ d'un élément $x\in\mathbb{R}^5$ : « $x$ satisfait $(S)$ » est stable par combinaisons linéaires.

2. Dans le cas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on définit

$$u \underbrace{+}_{\text{au sens des suites}} v := \left(u_n \underbrace{+}_{+\text{au sens des réels}} v_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \lambda.u := \left(\lambda \underbrace{.}_{.\text{au sens des réels}} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Ce qui a pour conséquence que la combinaison linéaire de $u$ et $v$ avec les coefficients $\lambda$ et $\mu$ vaut :

$$\lambda.u+\mu.v=(\lambda.u_n+\mu.v_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\lambda.u_0+\mu.v_0,\dots,\dots)$$

On remarque que la propriété $(P)$ d'un élément $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ : « $u$ satisfait la récurrence $(R)$ » est stable par combinaisons linéaires.

3. Dans le cas de $\mathscr{C}^2(I;\mathbb{R})$, si $f:=(t\in I\mapsto f(t)\in\mathbb{R})$, $g=(t\in I\mapsto g(t)\in\mathbb{R}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on définit

$$f \underbrace{+}_{\text{au sens des fonctions}} g := (t\in I\mapsto f(t)+g(t)\in\mathbb{R}) \text{ et } \lambda.f := (t\in I\mapsto \lambda.f(t)\in\mathbb{R})$$

Ce qui a pour conséquence que la combinaison linéaire de $f$ et $g$ avec les coefficients $\lambda$ et $\mu$ vaut :

$$\forall t\in I,\ (\lambda.f+\mu.g)(t)=\lambda.f(t)+\mu.g(t)$$

On remarque que la propriété $(P)$ d'un élément $f\in\mathscr{C}^2(I;\mathbb{R})$ : « $f$ satisfait l'équation différentielle $(ED)$ » est stable par combinaisons linéaires.

Ce qu'il faut retenir c'est que l'on connait des opérations $+$ et . agissant sur les nombres réels. Ces opérations « primitives » servent à définir de « nouvelles » opérations, notées de la même manière, mais agissant qui sur les 5-uplets, qui sur les suites, qui sur les fonctions éléments de $\mathscr{C}^2(I;\mathbb{R})$. Dans chaque cas, la somme de deux objets d'un type [7] donné donne un objet du même type et la multiplication d'un réel (on dit aussi *scalaire* dans ce contexte) par un objet d'un type donné donne aussi un objet du même type.

**Il est crucial dans ce domaine des mathématiques (l'algèbre) plus encore que dans les autres de distinguer $f(x)$, valeur de la fonction $f$ au point $x$ (donné ou quantifié auparavant) et $x\mapsto f(x)$, qui *est* [8] la fonction $f$. On a**

$$f=(x\mapsto f(x))$$

***$f$ n'est pas* $f(x)$, ce sont deux objets de types différents.**

**De même $u_n$ n'est pas la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Le nombre réel $u_n$ est la valeur de la suite $u$ à l'entier $n$ (mal spécifié par ailleurs). $u_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux objets de types différents.**

7. On est prié de prendre les mots « objets » et « type » au sens informatique.
8. on peut sous-entendre le domaine de départ et le domaine d'arrivée de $f$ pour alléger

Le langage Python peut manipuler directement des vecteurs ou des fonctions en tant qu'objets.

Listing 1 – python/AL-fonctions.py

```
"""
AL-fonctions.py : ce script pour démontrer comment faire directement de l'AL
                  sur les fonctions de variable réelle
"""
def somme_evfct(f,g) :
    """
    somme_evfct(f,g) : retourne la fonction somme des deux fonctions f et g
    """
    def s(x) :
        return f(x)+g(x)
    return s
def mult_evfct(lambada,f):
    """
    mult_evfct(lambada,g) : retourne la fonction produit
                            du scalaire lambada par la fonction f
    rq: lambda est un mot réservé du langage, on ne peut pas l'utiliser
    """
    def m(x) :
        return lambada*f(x)
    return m
def CL_evfct(coeff_fct) :
    """
    CV_evfct(coeff_fct) :
    retourne la fonction combinaison lineaire de la liste coeff_fct
        cette liste est une liste de couples [scalaire,fonction]
    """
    #si la liste est vide on retourne la fonction nulle
    def zero(x) :
        return 0.0
    result=zero
    #Pour une syntaxe plus lisible, on peut boucler directement sur une liste
    for lambada,f in coeff_fct :
        result = somme_evfct(result,mult_evfct(lambada,f))
    return result

#essais graphiques
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
liste=[[1.0,np.sin],[2.0,np.cos]]
f=CL_evfct(liste) # on construit la fonction CL de la liste précédente
x=np.linspace(0,2*np.pi,100)
plt.plot(x,f(x),label=r'$y=f(x)$')
plt.plot(x,np.sin(x),label=r'$y=\sin(x)$')
plt.plot(x,2*np.cos(x),label=r'$y=2\cos(x)$')
plt.legend()
plt.show()
```

On peut voir dans ce script, des fonctions Python implémentant

1. La fonction `somme_evfct(f,g)` retournant la fonction somme de deux fonctions réelles de variable réelle $f$ et $g$,
2. La fonction `mult_evfct(lambada,f)` donnant la fonction produit d'une fonction réelle de variable réelle $f$ par un scalaire réel $\lambda$.
3. La fonction `CL_evfct(liste)` donnant la fonction résultant de la combinaison linéaire de la liste de couples (scalaire,fonction) décrite par `liste`.

**Définition 1.** *$E$ –plus précisément $(E,+,.)$, ce qui se lit « $E$ muni des opérations*[9] *$+$ et . »– est un* $\mathbb{R}$-espace vectoriel *si les axiomes suivants sont vérifiés.*

### Les axiomes de $\mathbb{R}$-espace vectoriel

AXIOMATIQUE

1. Commutativité somme : $\forall x,y \in E, x+y = y+x$
2. Associativité somme[10] : $\forall x,y,z \in E$, $(x+y)+z = x+(y+z)$.
3. 0 Neutre somme : $\exists 0 \in E, \forall x \in E, x+0 = 0+x = x$
4. Existence d'opposé[11] : $\forall x \in E, \exists x' \in E, x+x' = x'+x = 0$
5. Associativité produit[12] : $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \forall x \in E$, $(\lambda.\mu).x = \lambda.(\mu.x)$.
6. $1 \in \mathbb{R}$ Neutre produit : $\forall x \in E$, $1.x = x$
7. Distributivité I[13] : $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \forall x \in E$, $(\lambda+\mu).x = (\lambda.x)+(\mu.x)$
8. Distributivité II : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x,y \in E$, $\lambda.(x+y) = (\lambda.x)+(\lambda.y)$

### Quelques règles de calcul

1. Si $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on dit que $\mathbb{R}$ est le *corps* des *scalaires* de $E$. Les éléments de $E$ sont appelés des *vecteurs*.
2. L'élément 0 apparaissant dans la propriété *Neutre somme* est unique avec cette propriété. On le nomme le *vecteur nul*. Il ne faut pas le confondre avec le 0 réel. On le note parfois $0_E$.
3. Pour chaque $x \in E$, $x'$ vérifiant la propriété *Existence d'opposé* est unique avec cette propriété. On le note $-x$, l'*opposé* de $x$.
4. $0 \in \mathbb{R}$ et $0 \in E$ On a $\forall x \in E, 0.x = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.0 = 0$.
5. Signes $-$ baladeurs : $(-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$
6. Simplification produit nul : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$, $\lambda.x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\lambda = 0$.
7. Simplification égalités I : Si $\lambda.x = \lambda.y$ et $\lambda \neq 0$ alors $x = y$
8. Simplification égalités II : Si $\lambda.x = \mu.x$ et $x \neq 0$ alors $\lambda = \mu$

9. $+$ interne, . externe
10. Cette propriété permet de considérer, sans parenthésage $x+y+z$ et plus généralement $x_1+x_2+\cdots+x_n$.
11. pour chaque $x$, il y a en fait un unique $x'$ tel que $x'+x = x+x' = 0$, il s'appelle l'**opposé** de $x$, noté $-x$. Soustraire $x$, c'est faire la somme avec $-x$
12. Cette propriété permet de considérer, sans parenthésage $\lambda.\mu.x$. Noter les différentes significations du signe .
13. Ces propriétés sont à la base des techniques de développement, factorisation

**Exemples de référence de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels**

1. $\mathbb{R}^n$ avec somme et multiplication par un scalaire vu en première année
2. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels comportant $n$ lignes, $p$ colonnes.
3. $\mathbb{R}^I$ [14] l'ensemble des applications $f : I \to \mathbb{R}$ où les opérations sont définies par

$$\forall t \in I, (f+g)(t) = f(t) + g(t), (\lambda.f)(t) = \lambda.(f(t))$$

   Cet exemple couvre les deux exemples précédents avec resp. $I = \{1,\dots,n\}$ et $I = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\}$, l'espace des suites réelles avec $I = \mathbb{N}$, l'espace des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, sur un ensemble $\Omega$ quelconque ...
4. $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée $X$.

**Les axiomes de $\mathbb{C}$-espace vectoriel**

Nous aurions pu traiter les exemples introductifs, en cherchant, dans le premier problème, les vecteurs $x \in \mathbb{C}^5$ vérifiant le système linéaire, dans le problème des suites récurrentes, les suites à valeurs complexes vérifiant $(R)$ et dans l'équation différentielle, les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vérifiant $(ED)$. Cela mène, pour chaque problème, à l'introduction de *scalaires* $\lambda, \mu, \lambda_+, \lambda_-$ complexes.

Pour un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on recopie la définition de $\mathbb{R}$-espace vectoriel en remplaçant chaque occurence de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Dans le contexte des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, on dit que $\mathbb{C}$ est le *corps* des *scalaires*. Les éléments de l'espace vectoriel en considération sont appelés des *vecteurs*.

Si on dit sèchement dans un enoncé que $E$ est un espace vectoriel, le corps des scalaires est sous-entendu et il est à éclaircir [15] en priorité.

**Exemples de référence de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels**

1. $\mathbb{C}^n$ avec somme et multiplication par un scalaire définis de façon similaire à $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à coefficients complexes comportant $n$ lignes, $p$ colonnes.
3. $\mathbb{C}^I$, l'ensemble des applications $f : I \to \mathbb{C}$ où les opérations sont définies par

$$\forall t \in I, (f+g)(t) = f(t) + g(t), (\lambda.f)(t) = \lambda.(f(t))$$

   Cet exemple comporte les exemples précédents, l'espace des suites complexes, l'espace des fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle, ...
4. $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes en l'indéterminée $X$.

**Cas limite**

1. $\{0\}$ est un $\mathbb{R}$-e.v., un $\mathbb{C}$-e.v.
2. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
3. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il est, en tant que $\mathbb{R}$-espace, *isomorphe* à $\mathbb{R}^2$.
4. Plus généralement, tout [16] $\mathbb{C}$-e.v. est un $\mathbb{R}$-e.v. en restreignant la multiplication par les scalaires à $\mathbb{R}$.

Pour éviter la duplication des définitions et théorèmes, on note $\mathbb{K}$ l'un des deux *corps* de *scalaires* $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Chaque théorème ou définition a donc deux lectures, celle concernant les $\mathbb{R}$-ev. et celle concernant les $\mathbb{C}$-ev.

14. où $I$ est un ensemble non vide
15. Le contexte indique s'il s'agit de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$.
16. On n'insistera pas sur cette subtilité.

# 2 Sous-espaces d'un espace vectoriel

**Définition 2.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v., $F \subset E$ une partie* non vide *de $E$. On dit que $F$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de $E$ si*

1. *(Stabilité par somme)* $\forall x, y \in F, x + y \in F$
2. *(Stabilité par produit externe)* $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda . x \in F$

**Définition 3** (Equivalente)**.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v., $F \subset E$ une partie* non vide *de $E$. On dit que $F$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de $E$ s'il est* stable par combinaisons linéaires *i.e. si*

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda . x + \mu . y \in F$$

**Un s.e.v est un e.v.**

Autrement dit, $F$ est un s.e.v de $E$ si et seulement si les restrictions des opérations $+$ et . se restreignent en des opérations sur $F$ : $+ : F \times F \to F, . : \mathbb{K} \times F \to F$.

On définit ainsi des opérations sur $F$ *héritées* des opérations sur $E$.

**Proposition 4.** *Si $F$ est un $\mathbb{K}$-s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v. $E$ alors $(F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev.*

Le vecteur nul dans $F$ est celui de $E$.

*D'un point de vue pratique, quand on vous demande de prouver que tel ensemble $F$ muni de certaines opérations $+$ et . est un $\mathbb{K}$-e.v., il s'agit d'identifier un $\mathbb{K}$-e.v. $E$ de la liste officielle et de montrer que $F$ en est un s.e.v.*

**Exemples**

1. Si $I$ est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}^0(I)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^I$,
2. $\mathbb{R}[X] \simeq \mathscr{P}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ polynomiale}\}, \mathscr{R}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ frac. rat. déf. sur } I\}$ sont des s.e.v de $\mathbb{R}^I$
3. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^\infty(I)$, $\mathscr{C}^{k+1}(I)$ sont des $\mathbb{R}$-sev de $\mathscr{C}^k(I)$.
$$\mathscr{P}(I) \subset_{\text{sev}} \mathscr{R}(I) \subset_{\text{sev}} \mathscr{C}^\infty(I) \subset_{\text{sev}} \cdots \subset_{\text{sev}} \mathscr{C}^{k+1}(I) \subset_{\text{sev}} \mathscr{C}^k(I) \subset_{\text{sev}} \cdots \subset_{\text{sev}} \mathscr{C}^0(I) \subset_{\text{sev}} \mathbb{R}^I$$
4. Etant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, l'ensemble $\mathscr{L}$ des variables aléatoires réelles est un s.e.v de $\mathbb{R}^\Omega$. l'ensemble $\mathscr{L}^1$ des v.a. intégrables est un s.e.v de $\mathscr{L}$, l'ensemble $\mathscr{L}^2$ des v.a. de carré intégrable est un s.e.v de $\mathscr{L}^1$ et finalement l'ensemble $\mathscr{L}_{fini}$ des v.a. réelles prenant un nombre fini de valeurs est un s.e.v de $\mathscr{L}^2$.
$$\mathscr{L}_{fini} \subset_{\text{sev}} \mathscr{L}^2 \subset_{\text{sev}} \mathscr{L}^1 \subset_{\text{sev}} \mathscr{L} \subset_{\text{sev}} \mathbb{R}^\Omega$$
5. Une droite $D \subset \mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$,
6. Un plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

**Retour sur les exemples initiaux**

1. L'ensemble $S$ des solutions du système linéaire homogène $(S)$ est un sev de $\mathbb{R}^5$
2. L'ensemble $R$ des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire homogène $(R)$ est un sev de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.
3. L'ensemble $ED$ des fonctions vérifiant l'EDO linéaire homogène $(ED)$ est un sev de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

**Intersection de s.e.v.**

**Proposition 5.** 1. *Si $F$, $G$ sont deux sev de $E$ alors $F \cap G$ est un sev de $E$.*

2. *Si $F_1, \ldots, F_n$ sont $n$ sev de $E$ alors $F_1 \cap \cdots \cap F_n = \bigcap_{i=1}^n F_i$ est un sev de $E$.*

Exemples :

1. Espace des solutions d'un système linéaire homogène.
2. Suites récurrentes vérifiant des conditions additionnelles.
3. Solutions d'EDO vérifiant des conditions additionnelles.

Remarque : l'exercice 5 (pas si facile) montre que $F \cup G$ est un sev de $E$ ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$. Hormis ce cas (trivial), $F \cup G$ n'est pas un sev de $E$.

**Exercices** **Exercice 1.—** Déterminer lesquels des ensembles $F$ suivants sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$. Dans le cas où $F$ est un s.e.v. de $E$ préciser s'il s'agit de $\{0\}$, d'une droite vectorielle, d'un plan vectoriel et/ou de $E$ tout entier.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x + 4z - y = 0\}$,
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, xy + 4z = 0\}$,
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x + 4z = 0 \text{ ou } x + y + z = 0\}$,
5. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x + 4z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$,
6. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 2y + 1\}$,
7. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$,
8. $E = \mathbb{R}^2$, $F_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 0\}$, $F_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$, $F_m \cap F_p$ ? $F_m \cup F_p$ ?
9. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{\lambda(1,2) + (0,1), \lambda \in \mathbb{R}\}$,
10. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{\lambda(1,2) + \mu(3,4), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

**Exercice 2.—** Déterminer si les ensembles $F$ suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$.

1. $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X], deg(P) \leq n\}$,
2. $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X], deg(P) \geq n\}$,
3. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 1\}$,
4. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P' + P'', P \in \mathbb{R}[X]\}$,
5. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$,
6. Soit $T > 0, E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ périodique de période $T\}$,
7. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(0) = f(1)\}$,
8. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f$ monotone$\}$
9. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de $E$, $F = \{(w_n)_n, \exists \lambda, \nu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda u_n + \nu v_n\}$.
10. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F$ le sous-ensemble des suites convergentes.

**Exercice 3.—** Déterminer si les ensembles $F$ suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$.

1. $E=\mathbb{C}^2$, $F=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\ ;\ x+3y=1\}$,
2. $E=\mathbb{C}^2$, $F=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\ ;\ x+iy=0\}$,
3. $E=\mathbb{C}^2$, $F=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\ ;\ xy=1\}$,
4. $E=\mathbb{C}^3$, $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\ ;\ x^2+y^2+z^2=0\}$,
5. $E=\mathbb{C}[X]$, $F=\{P\in\mathbb{C}[X], P(0)=i\}$,
6. $E=\mathbb{C}[X]$, $F=\{P+P'+2P'', P\in\mathbb{C}[X]\}$,
7. $E=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $F=\{(w_n)_n, \exists\lambda,\ \nu\in\mathbb{C}, \forall n\in\mathbb{N}, w_n=\lambda e^{in\frac{\pi}{3}}+\nu n.2^n\}$.
8. $E=\mathbb{C}^{[0,2\pi]}$, $F=\{f\in E, f\in\mathscr{C}^2([0,2\pi]), f''+f=0 \text{ et } f(0)=f(2\pi)\}$.

**Exercice 4.—** On considère l'ensemble $A$ des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}+4$ pour tout $n>0$.

**1.** Trouver un réel $k$ tel que l'ensemble des suites $(a_n-k)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $a\in A$ forme un sous-espace vectoriel $V$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

**2.** Trouver deux suites géométriques dans $V$, de raisons $r_1$ et $r_2$ différentes.

**3.** Vérifier qu'une suite $b$ de la forme $b_n=\lambda.r_1^n+\mu.r_2^n+k$ est dans $A$.

**4.** En déduire la valeur de $a_n$ si $a$ est l'élément de $A$ satisfaisant $a_0=0, a_1=1$.

**Exercice 5.—** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces de $E$.
**1.** Montrer que

$$(F\cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E)\Rightarrow(F\subset G \text{ ou } G\subset F).$$

Indication:Montrer la contraposée en fabriquant deux vecteurs de $F\cup G$ dont la somme n'est pas dans $F\cup G$. Illustrer graphiquement.
**2.** Le même résultat est-il vrai si l'on suppose que $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

**Exercice 6.—** Soit $E$ un espace vectoriel, $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer l'équivalence

$$(\forall(x,y)\in F\times G, \forall(x',y')\in F\times G, x+y=x'+y'\Rightarrow x=x' \text{ et } y=y')\Leftrightarrow F\cap G=\{0\}$$

On traitera séparémment les deux implications.

## 2.1 Combinaisons linéaires

**Définition 6.** *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $(u_i)_{i\in I}$ une famille* finie *de vecteurs dans E indexée par I, $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires. La* combinaison linéaire *de la famille $(u_i)_{i\in I}$ avec les coefficients $(\lambda_i)_{i\in I}$ est le vecteur de E défini par*

$$\sum_{i\in I}\lambda_i.u_i$$

*Réciproquement, on dit qu'un vecteur $v\in E$ est combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{i\in I}$ s'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que*

$$v=\sum_{i\in I}\lambda_i.u_i$$

## 2.2 Stabilité par combinaisons linéaires

**Proposition 7** (Une CL de CL est une CL). *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E, $(v_j)_{j\in J}$ une famille finie de vecteurs de E, telle que chaque $v_j$ est combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{i\in I}$.*

*Une combinaison linéaire de la famille $(v_j)_{j\in J}$ est une combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{i\in I}$.*

Exemples.

*Démonstration.* L'hypothèse implique que pour chaque $j$, il existe une famille $(\lambda_{ij})_{i\in I}$ de scalaires telle que

$$v_j = \sum_{i\in I} \lambda_{ij} u_i$$

Soit $w = \sum_{j\in J} \mu_j.v_j$. On a alors, en appliquant les axiomes d'e.v.

$$w = \sum_{j\in J} \mu_j \left( \sum_{i\in I} \lambda_{ij} u_i \right) = \sum_{i\in I} \left( \sum_{j\in J} \lambda_{ij} \mu_j \right) u_i$$

$\square$

**Exercice 7.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $F$, $G$ deux sous-espaces de $E$. Soit

$$H = \{x+y, x \in F, y \in G\} = \{z \in E, \exists (x,y) \in F \times G, z = x+y\}$$

**1.** Montrer que $H$ est un sev de $E$ et que $F \cup G \subset H$.
**2.** Montrer que si $K$ est un sev de $E$ contenant $F \cup G$ alors $H \subset K$.
**3.** Donner un exemple simple ($E$, $F$, $G$ non triviaux) tel que $H \neq E$. Illustration graphique ?

## 2.3 Sous-espace engendré par une famille de vecteurs

**Proposition-Définition 8.** *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E. Le* sous-espace vectoriel de $E$ engendré par cette famille*, noté*

$$Vect\langle u_i, i \in I \rangle \text{ ou } Vect\langle \mathscr{U} \rangle,$$

*est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(u_i)_{i\in I}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, i.e.*

$$\begin{aligned} Vect\langle u_i, i \in I \rangle = Vect\langle \mathscr{U} \rangle &= \{\sum_{i\in I} \lambda_i.u_i, (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I\} \\ &= \{z \in E, \exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I, z = \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i\} \end{aligned}$$

Exemples.

**Définition 9.** *Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{U}$ est* génératrice de $E$ *si*

$$E = Vect\langle u_i, i \in I \rangle$$

Remarques :

1. Une *tautologie* : La famille finie $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice (ou *engendre*) l'espace vectoriel Vect$\langle u_i, i \in I \rangle$.
2. Cas limite : « la famille vide engendre l'espace nul. ». C'est la convention sur les sommes vides.

**Exercices** **Exercice 8.—** Peut-on déterminer des réels $x,y$ pour que le vecteur $v=(-2,x,y,3)$ appartienne au s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $(e_1,e_2)$ où $e_1=(1,-1,1,2)$ et $e_2=(-1,2,3,1)$ ?

**Exercice 9.—** Soient $e_1=(0,1,-2,1), e_2=(1,0,2,-1), e_3=(3,2,2,-1)$ et $e_4=(0,0,1,0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\mathrm{Vect}\langle e_1,e_2,e_3\rangle = \mathrm{Vect}\langle (1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\rangle$.
2. $(1,1,0,0)\in \mathrm{Vect}\langle e_1,e_2\rangle \cap \mathrm{Vect}\langle e_2,e_3,e_4\rangle$.

**Exercice 10.—** Soient $e_1,e_2,e_3,e_4$ des éléments quelconques d'un espace vectoriel $E$. On pose

$$f_1=e_1+e_2\ ,\ f_2=e_2+e_3\ ,\ f_3=e_3+e_4\ ,\ f_4=e_4-e_1\ .$$

Peut-on exprimer $e_1$ en fonction de $f_1,f_2,f_3,f_4$ ? Même question avec $e_2$, puis avec $e_3$ et enfin avec $e_4$. A-t-on

$$\mathrm{Vect}\langle f_1,f_2,f_3,f_4\rangle = \mathrm{Vect}\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle\ ?$$

**Exercice 11.—** Dans l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère les quatre polynômes

$$P_0(X)=1\ ,\ P_1(X)=X-1\ ,\ P_2(X)=(X-1)^2\ ,\ P_3(X)=(X-1)^3\ .$$

Soit $F$ un élément de $\mathbb{R}_3[X]$. Montrer que $F$ peut se mettre sous la forme

$$F=\lambda_0P_0+\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3.$$

Quelles sont les valeurs de $\lambda_0,\dots,\lambda_3$ ? Quelle formule retrouve-t-on ?
Que peut-on dire de $\mathrm{Vect}\langle P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$ ?

**Exercice 12.—**
**1.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, considérons les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ a_n(x)=(\cos x)^n \text{ et } b_n(x)=\cos(n.x).$$

Montrer que pour tout $n$,

$$\mathrm{Vect}\langle a_0,\dots,a_n\rangle = \mathrm{Vect}\langle b_0,\dots,b_n\rangle\,.$$

**2.** On considère maintenant $a_n,b_n$ comme des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, i.e. des éléments du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. La fonction $x\mapsto e^{i100x}$ appartient-elle à $\mathrm{Vect}\langle a_n,\, n\in\{0,\dots,200\}\rangle$ ?

**3.** On pose, pour $n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R},\ s_n(x)=\sin(n.x)$ et l'on considère le $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, $V_{200}=\mathrm{Vect}\langle b_n,s_n,\, n\in\{0,\dots,200\}$
La fonction $x\mapsto e^{i100x}$ appartient-elle à $V_{200}$ ?

**Exercice 13.—** Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation $(ED)$ suivante est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et en donner une famille génératrice.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)-2y'(x)+2y(x)=0 \tag{ED}$$

**Exercice 14.—** Montrer que l'ensemble de suites à valeurs réelles vérifiant la récurrence $(R)$ suivante est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et en donner une famille génératrice.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \tag{R}$$

# 3 Applications linéaires

## 3.1 Définition-exemples

**Définition 10.** *Soient $E$, $F$ deux $\mathbb{K}$-ev, $f : E \to F$ une application. On dit que $f$ est une application ($\mathbb{K}$)-linéaire si elle* respecte *les combinaisons linéaires, i.e.*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$$

1. L'ensemble des applications linéaires $f : E \to F$ est noté $\mathscr{L}(E,F)$.
2. Une application linéaire $f : E \to F$ « préserve » les opérations d'espace vectoriel, i.e les combinaisons linéaires. Plus précisémment
$$f(\sum_{i\in I} \lambda_i.u_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i.f(u_i)$$
3. Un synonyme d'application linéaire est *morphisme* d'espaces vectoriels, l'étymologie de ce mot traduit l'idée de préservation de la forme des expressions.
4. Quand $E = F$, on parle d'*endomorphisme*. L'ensemble des endomorphismes d'un espace $E$ est noté $\mathscr{L}(E)$.
5. Quand $F = \mathbb{K}$, on parle de *formes linéaires*, on note parfois l'ensemble des formes linéaires $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.

**Des exemples : formes linéaires**

1. Evaluation d'une fonction en un point.
2. Evaluation d'un polynôme en un point.
3. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ avec un vecteur fixé. (On y consacrera un chapitre entier)
4. Intégrale d'une fonction.
5. Espérance d'une variable aléatoire intégrable.

**Des exemples : endomorphismes**

1. Application identité $i_E$, multiplication par un scalaire fixé, $\lambda.i_E$,
2. Transformations de l'espace $\mathbb{R}^n$. Matrices carrées. $X \mapsto A.X$
3. Multiplication par une fonction fixée. Varier la régularité.
4. Changement de variable pour les fonctions de variable réelle.

**Des exemples divers**

1. L'application nulle $x \in E \mapsto 0_F \in F$ est linéaire.
2. Transformation linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $X \mapsto A.X$ ou $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
3. Dérivation, primitivation.
4. Transformée intégrale.
5. Si $(u_i)_{i\in I}$ famille (finie) de vecteurs de $E$, on peut considérer

$$(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i \in E$$

.

## 3.2 Sous-espaces associés à une application linéaire

**Le noyau**

**Proposition-Définition 11.** *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le sous-ensemble de $E$*

$$Ker\, f := \{x \in E,\, f(x) = 0_F\}$$

*est un s.e.v de $E$ appelé le* noyau *de $f$.*

Remarque : Noyau, en anglais, c'est « kernel »

**Exemples élémentaires**

1. Un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle et réciproquement.
2. Pour l'opération de dérivation sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, le noyau, c'est l'ensemble des fonctions constantes.
3. Pour un système linéaire, le noyau de l'application linéaire associée, c'est l'ensemble des solutions du système homogène. Notation $\operatorname{Ker} A$ où $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
4. L'ensemble des suites vérifiant une certaine relation de récurrence est le noyau d'une certaine a.l. laquelle (cf. exemples introductifs) ?
5. L'ensemble des fonctions vérifiant une certaine équation différentielle linéaire est le noyau d'une certaine a.l.. laquelle ?

*Démonstration.*
1. Comme $f$ est linéaire, $f(0_E) = 0_F$ et donc $0_E \in \operatorname{Ker} f$.
2. Soient $x, y \in \operatorname{Ker} f$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, comme $f$ est linéaire,

$$f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y) = \lambda.0_F + \mu.0_F = 0_F$$

et donc $\lambda.x + \mu.y \in \operatorname{Ker} f$

3. $\operatorname{Ker} f$ est donc un s.e.v de $E$.

□

### L'image

**Proposition-Définition 12.** *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le sous-ensemble de $F$*

$$\mathrm{Im}\, f := \{y \in F, \exists x \in E, f(x) = y\}$$

*est un s.e.v de $F$ appelé l'*image *de $f$.*

*Démonstration.* 1. $0_F = f(0_E) \in \mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Im}\, f \subset F$,

2. Si $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}\, f$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et, par linéarité de $f$,
$$\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2 = f(\underbrace{\lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2}_{\in E}) \in \mathrm{Im}\, f.$$

3. $\mathrm{Im}\, f$ est donc un s.e.v de $F$.

□

### Exemples élémentaires

1. si $u$ et $v$ sont deux vecteurs d'un $\mathbb{R}$-e.v. $E$, l'image de $f : \mathbb{R}^2 \to E$, $(\lambda, \mu) \mapsto f(\lambda, \mu) = \lambda.u + \mu.v$, c'est $\mathrm{Vect}\langle u, v\rangle$. Ceci se généralise à une famille finie $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de $E$. $f : \mathbb{R}^I \to E$, $f((\lambda_i)_{i\in I}) := \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i$.
2. Si $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ est une forme linéaire, $\mathrm{Im}\, f = \{0\}$ ou $\mathbb{K}$.
3. Pour un système linéaire, l'image de l'application linéaire associée, c'est l'ensemble des seconds membres pour lesquels le système admet au moins une solution. Notation $\mathrm{Im}\, A$ où $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
4. Pour $D$, l'opération de dérivation sur $\mathscr{D}^1(\mathbb{R})$, l'image, c'est l'ensemble des fonctions admettant une primitive sur $\mathbb{R}$. On sait que $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}\, D$
5. Pour $D$, l'opération de dérivation sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, l'image, c'est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant une primitive. C'est donc $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

### Injectivité, surjectivité

**Proposition 13.** *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

1. *$f$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.*
2. *$f$ est surjective (sur $F$) si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.*
3. *$f$ est un isomorphisme entre $E$ et $F$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, f = F$.*

*Démonstration.* Seul le premier point est réellement à démontrer, le deuxième est par définition de la surjectivité, le dernier par caractérisation de la bijectivité comme injection+surjection.

— Si $f$ est injective, comme $f(0_E) = 0_F$, $0_F$ admet $0_E$ comme unique antécédent et $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.

— Réciproquement (c'est la nouveauté). Soient $x$, $y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. On a alors, par *linéarité* de $f$,
$$f(x-y) = f(x) - f(y) = 0_F$$
donc $x - y \in \mathrm{Ker}\, f$ et donc $x - y = 0_E$, i.e. $x = y$.

□

## 3.3 Résolution d'équations linéaires

**Proposition 14.** *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit $y \in F$ et considérons l'équation $(E_y) : f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$, alors*

1. *Si $y \notin Im\, f$, $(E_y)$ n'a pas de solution.*
2. *Si $y \in Im\, f$, et $x_y$ est une solution particulière de $(E_y)$ alors l'ensemble des solutions de $(E_y)$ est*

$$S_y = \{x_y + x, x \in Ker\, f\} =: x_y + Ker\, f$$

Exemples : matrices et système linéaire. Une EDO linéaire avec second membre.

## 3.4 Exercices

**Exercice 15.—**Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires. Pour chaque application linéaire trouvée, déterminer son noyau et son image en en donnant une famille génératrice.
**1.** $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
**2.** $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.
**3.** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (y,x)$.
**4.** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 3x + 5y$.
**5.** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (-x,y)$.
**6.** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy$.
**7.** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$.
**8.** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto$ la solution du système d'équations en $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ : $\left\{ \begin{array}{rcl} 3u - v & = & x, \\ 6u + 2v & = & y. \end{array} \right.$
**9.** $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (xy, x, y)$.
**10.** $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y)$.
**11.** $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + z/3)$.

**Exercice 16.—**Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit le $\mathbb{K}$-ev $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ composée des applications $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $u : E \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ définie par

$$\forall f \in E, \quad u(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f''(x) + f'(x) + f(x) \end{array}$$

**1.** Montrer que $u$ est linéaire.
**2.** Montrer que par restriction de l'image elle définit un endomorphisme de $E$.
**3.** Déterminer son noyau en vous basant sur vos connaissances concernant les EDO linéaires du second ordre.
**4.** Mêmes questions mais avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

**Exercice 17.—** Soit le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u : E \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par

$$\forall f \in E, \quad u(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - \cos(x).f(x) \end{array}$$

**1.** Montrer que $u$ est linéaire.
**2.** Montrer que par restriction de l'image elle définit un endomorphisme de $E$.
**3.** Déterminer son noyau.

**4.** Montrer, en vous basant sur vos connaissances concernant les EDO linéaires du premier ordre, qu'elle est surjective.

**Exercice 18.—**Dans chacun des cas suivants, on définit une application $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$. Déterminer si elle est linéaire ou pas et, en cas de linéarité, déterminer si elle est injective ou non.

1. $u(P) = P'(X) - P(2X)$
2. $u(P) = P(0) + P(1)$
3. $u(P) = P(X)P'(X)$
4. $u(P) = P(X^2)$

**Exercice 19.—** Dans chacun des cas suivants, on définit une application $u : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Déterminer si elle est linéaire ou pas et, en cas de linéarité, déterminer si elle est injective ou non.

1. $u(f) = f'$
2. $u(f) = x \mapsto \int_0^x (x-t)^2 f(t)\, dt$
3. $u(f) = f.f''$
4. $u(f) = x \mapsto f(x^3)$

**Fil rouge : Problème d'interpolation de** LAGRANGE

On sait (d'expérience !) que l'indice de réfraction $n$[17] de certains matériaux dépend de la longueur d'onde $\lambda$ de l'onde incidente suivant une loi[18] de la forme

$$n = p_0 + p_1 . \frac{1}{\lambda^2} + p_2 . \frac{1}{\lambda^4}$$

où les coefficients réels $p_0, p_1, p_2$ sont caractéristiques du matériau. On a effectué des mesures, à l'aide d'un goniomètre, pour un certain type de verre, regroupées dans le tableau :

| $\lambda\,(nm)$ | 404,7 | 434,7 | 546,1 |
|---|---|---|---|
| $n$ | 1,540 | 1,536 | 1,526 |

Peut-on, à partir de ces mesures, déterminer les coefficients $p_0$, $p_1$, $p_2$ ? On peut voir cette question comme un problème d'*interpolation* :

On dispose de trois nombres réels distincts $z_0$, $z_1$ et $z_2$ (les carrés des inverses des longueurs d'onde), des trois valeurs de $n$ correspondantes, $n_0$, $n_1$ et $n_2$ et il s'agit de trouver un polynôme $P$ de degré $\leq 2$ tel que

$$\forall i = 0, 1, 2,\ P(z_i) = n_i$$

En écrivant les choses telles qu'elles viennent, on voit que ce problème se réduit à résoudre le système linéaire d'inconnue $(p_0, p_1, p_2)$,

$$\left\{\begin{array}{llllll} p_0 & +p_1 . z_0 & +p_2 . z_0^2 & = & n_0 \\ p_0 & +p_1 . z_1 & +p_2 . z_1^2 & = & n_1 \\ p_0 & +p_1 . z_2 & +p_2 . z_2^2 & = & n_2 \end{array}\right.$$

On laisse le lecteur remplacer les paramètres $z_i$, $n_i$ par leurs valeurs obtenues à partir du tableau et fourrer le système linéaire dans un système de calcul afin d'obtenir, via la résolution par l'algorithme de GAUSS, les valeurs exactes de $p_0$, $p_1$ et $p_2$.

17. Il s'agit du rapport entre célérité de la lumière dans le vide et vitesse de phase de l'onde lumineuse, grandeur sans dimension

18. dite loi de CAUCHY, *c.f.* `https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Cauchy_(optique)`, cette loi est liée à la séparation de la lumière blanche par un prisme

**Fil rouge : Polynômes d'interpolation de** LAGRANGE Plus généralement, soit $d \in \mathbb{N}^*$, $z_0, z_1, \ldots, z_d$ $d+1$ nombres complexes distincts. Considérons l'application $\Lambda : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}^{d+1}$ définie par

$$\Lambda(P) = (P(z_0), \ldots, P(z_d))$$

C'est une application linéaire. Cette application intervient naturellement dans le problème de l'interpolation polynomiale :

Etant données $d+1$ valeurs $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_d)$, existe-t-il un polynome à coefficients complexes $P$ tel que $\forall i \in \{0, \ldots, d\}, P(z_i) = \alpha_i$ *i.e.* tel que $\Lambda(P) = \alpha$ ?

On voit que, en fixant le degré a priori du polynôme, ce problème équivaut à résoudre un certain système linéaire. La question est de comprendre ce qu'on peut attendre de la résolution de ce système *d'une manière générale* : Combien y a-t-il de tels polynômes ? Comment différent-ils ?

**Fil rouge : Le noyau de $\Lambda$.** Illustrons l'interaction entre algèbre linéaire et la théorie des polynômes sur cet exemple. On a, en posant $L(X) = \prod_{i=0}^{d}(X - z_i)$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\Lambda &= \{P \in \mathbb{C}[X], \forall i \in \{0, \ldots, d\}, P(z_i) = 0\} \\ &= \{P \in \mathbb{C}[X], \exists Q \in \mathbb{C}[X], P = Q.L\} \end{aligned}$$

En conséquence, la restriction de $\Lambda$ à $\mathbb{C}_d[X]$ est injective $\operatorname{Ker}\Lambda \cap \mathbb{C}_d[X] = \{0\}$ et, pour $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\operatorname{Ker}\Lambda \cap \mathbb{C}_{d+\ell}[X] = \operatorname{Vect}\left\langle L, X.L, \ldots, X^{\ell}.L \right\rangle$$

## 3.5 Opérations : CL/ composition, réciproque

**Proposition 15.** *Si $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ alors l'application $\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2$ définie par*

$$\forall x \in E, (\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2)(x) = \lambda_1.(f_1(x)) + \lambda_2.(f_2(x))$$

*est une application linéaire $E \to F$.*

1. On remarque que $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-ev. On n'insiste pas sur ce point.
2. Exemple : Combinaison linéaire de deux évaluations.

**Exercice 20.—**Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $f_B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ les applications linéaires linéaires canoniquement associées à ces matrices, *i.e.*

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, f_A(X) = A.X \text{ et } \forall X \in \mathbb{C}^n, f_B(X) = B.X$$

On considère l'application linéaire $f = 2.f_A - 3.f_B$. Est-elle associée canoniquement à une certaine matrice ?

**Composition**

**Proposition 16.** *Si $E$, $F$, $G$ sont trois $\mathbb{K}$-e.v., $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$*

**Proposition 17.** *Si $E$, $F$, $G$ sont trois $\mathbb{K}$-e.v., $f, f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $g, g_1, g_2 \in \mathscr{L}(F,G)$ alors*

$$g \circ (\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2) = \lambda_1.(g \circ f_1) + \lambda_2.(g \circ f_2)$$

*et*

$$(\lambda_1.g_1 + \lambda_2.g_2) \circ f = \lambda_1.(g_1 \circ f) + \lambda_2.(g_2 \circ f)$$

Remarquer que la deuxième règle n'utilise pas le caractère linéaire des $f$ et $g$'s.

**Exercice 21.—** Soit $m,n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $f_B : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^n$ les applications linéaires linéaires canoniquement associées à ces matrices, *i.e.*

$$\forall X \in \mathbb{C}^n,\ f_A(X) = A.X \text{ et } \forall Y \in \mathbb{C}^p,\ f_B(Y) = B.Y$$

**1.** Quelle est, si $m$, $n$ et $p$ sont distincts la seule composition possible entre $f_A$ et $f_B$ ?
**2.** Cette composée est-elle associée canoniquement à une certaine matrice ? laquelle ?

**Composition des endomorphismes**

**Proposition 18.** *Si $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v., $f,g \in \mathscr{L}(E)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E)$*

On peut, dans le cas des endomorphismes, composer un endomorphisme avec lui-même. On note, pour $f \in \mathscr{L}(E)$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ occurences de } f}$. Par convention $f^0 = i_E$, l'application *identité* de $E$.

**Exercice de composition** **Exercice 22.—** Pour chacun des espaces $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ ou $E = \mathbb{C}[X]$, on définit les deux endomorphismes $D : u \in E \mapsto D(u) = u' \in E$, et $M : u \in E \mapsto (x \mapsto x.u(x)) \in E$.
**1.** Calculer $D \circ M$, $M \circ D$ et $D \circ M - M \circ D$.
**2.** Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $M$ définit-il, par restriction, un endormorphisme de $\mathbb{C}_d[X]$ ?
**3.** Montrer que $M \circ D$ et $D \circ M$ définissent des endormorphismes de $\mathbb{C}_d[X]$.

**Exercice : polynômes d'endomorphismes**

**Définition 19.** *Si $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v., $f \in \mathscr{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $P = p_0 + p_1.X + \cdots + p_d.X^d$, on note*

$$P(f) = p_0.i_E + p_1.f + \cdots + p_d.f^d$$

**Exercice 23.—**
**1.** Montrer les identités suivantes, pour $P,Q \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathscr{L}(E)$,
**1.a.** $(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$,
**1.b.** $(P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$,
**1.c.** $(P \circ Q)(f) = P(Q(f))$.
**2.** Montrer les identités suivantes pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
**2.a.** $(i_E + f)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k$,
**2.b.** $(i_E - f) \circ (i_E + f + \cdots + f^{n-1}) = i_E - f^n$
**3.** On considère $D : u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mapsto u' \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, $P = X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Calculer $[P(D)](\cos)$.

**Réciproque**

**Proposition 20.** *Si $E$, $F$ sont deux $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est* bijective *alors sa réciproque, $f^{-1} : F \to E$ est* linéaire *: $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$. Dans ce cas, on a*

$$f^{-1} \circ f = i_E \text{ et } f \circ f^{-1} = i_F$$

*où $i_E$ et $i_F$ sont les endomorphismes* identité *de $E$ et $F$.*

**Vocabulaire**

1. si $f : E \to F$ est linéaire et bijective, on dit que c'est un *isomorphisme*.
2. si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-ev et s'il existe $f : E \to F$ un isomorphisme, on dit que $E$ et $F$ sont *isomorphes* en tant que $\mathbb{K}$-ev.
3. si $f : E \to E$ est un endomorphisme, bijectif alors on dit aussi que c'est un *automorphisme* de $E$. Dans ce cas, $f^{-1}$ est aussi un automorphisme de $E$.

*Démonstration.* Soient $y_1, y_2 \in F$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x = f^{-1}(\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2)$ est l'*unique* solution de l'équation d'inconnue $x \in E$,

$$f(x) = \lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2$$

Si $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, on a alors, par linéarité de $f$,

$$f(\lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2) = \lambda_1.f(x_1) + \lambda_2.f(x_2) = \lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2$$

et l'unicité donne la conclusion tant recherchée...

$$x = \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2$$

*i.e.*

$$f^{-1}(\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2) = \lambda_1.f^{-1}(y_1) + \lambda_2.f^{-1}(y_2)$$

□

**Exercice 24.—** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à cette matrice.A quelle condition sur $A$, $f_A$ est-elle un isomorphisme [19]. Si cette condition est remplie, $f_A^{-1}$ est-elle associée canoniquement à une certaine matrice ?

**Exercice 25.—** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions réelles, $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E,\, f(0) = 0\}$. Justifier rapidement que $F$ est un s.e.v de $E$ et montrer que $D : F \to E$ définie par

$$\forall f \in F, D(f) = f'$$

est un isomorphisme. Donner l'expression de l'isomorphisme réciproque.

**Exercice 26.—** Soit $g$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\, g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

**1.** Montrer que si $P$ est un polynôme, à coefficients réels, alors l'intégrale

$$I(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)g(x)\, dx$$

est absolument convergente

**2.** On considère l'application $T : \mathbb{R}[X] \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donnée par la formule

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R},\, [T(P)](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)g(x-t)\, dt$$

**3.** Vérifier que $T$ est correctement définie.

19. automorphisme, en fait vu qu'espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes

**4.** Montrer que $T$ est linéaire.
**5.** Montrer que, par restriction, pour $n \in \mathbb{N}$, $T$ définit un endomorphisme noté $T_n$ de $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg P \leq n\}$.

Indication:On pourra changer de variable dans l'intégrale en posant $s = x - t$

**6.** On note $D_n$ l'opération de dérivation vue comme endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $D_n \circ T_n = T_n \circ D_n$.
**7.** Montrer par récurrence sur $n$ que $T_n$ est injective.

**Exercice 27.—**Soit $E$ un espace vectoriel, $f$ un endomorphisme de $E$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et $f^0 = i_E$ l'application identité de $E$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} f^n \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$ et $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$.

**Exercice 28.—** Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels, $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ et $g$ une application linéaire de $F$ dans $G$.
**1.** Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
**2.** Montrer que $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

# 4 Bases et dimension

### Familles libres et liées

**Définition 21.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev. On dit que $u, v \in E$ sont* colinéaires *si*

— *Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $u = \lambda.v$*

— *ou il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $v = \lambda.u$*

Remarque : cette définition est symétrique. Elle est posée de la sorte pour que le vecteur nul soit colinéaire à tout vecteur $u \in E$. (En effet $0_E = 0.u$). Si $u$ n'est pas nul, $u$ et $v$ sont colinéaires ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda.u$, i.e ssi $v \in \mathrm{Vect}\langle u \rangle$.

Si $u$ et $v$ sont colinéaires et si $v$ et $w$ sont colinéaires alors $u$ et $w$ sont colinéaires.

Exemples. Le déterminant nul, critère de colinéarité dans $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{C}^2$.

**Exercice 29.—**Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.
**1.** Montrer que $v_1$ et $v_2$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $v_1$ et $v_3$, puis avec $v_2$ et $v_3$.
**2.** Trouver une relation entre $v_1, v_2, v_3$, c'est-à-dire une égalité de la forme $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$.

**Définition 22.** *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de $E$. On dit que cette famille est libre si*

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I, \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i = 0 \Rightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$$

*La famille est dite* liée *si elle n'est pas libre. Dans ce cas, il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ finie de scalaires* non tous nuls *telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i.u_i = 0$. Une telle relation s'appelle une* relation de dépendance linéaire *entre les $u_i$.*

### Remarques

1. La famille vide est libre...c'est de la pure logique
2. Une famille contenant le vecteur nul est liée.
3. hormis ce cas limite, une autre façon de montrer que $(u_i)_{i\in I}$ est libre est de vérifier que la seule solution de l'équation
$$\sum_{i\in I} \lambda_i.u_i = 0$$
d'inconnue $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ est $0 \in \mathbb{K}^I$.
4. Ceci permet de se ramener à la résolution d'un certain système linéaire à inconnue dans $\mathbb{K}^I$.

### Exemples

1. Un vecteur $u$ non nul forme une famille libre à un élément.
2. $(u, v)$ est une famille libre ssi $u$ et $v$ ne sont pas colinéaires.
3. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^3$, la famille $u_1 = ...$, $u_2 = ...$, $u_3 = ...$ forme une famille libre.
4. Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$, la famille $u_1 = ...$, $u_2 = ...$, $u_3 = ...$ forme une famille liée. Une relation de dépendance linéaire entre ces trois vecteurs est $...u_1 + ...u_2 + ...u_3 = 0$.
5. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}[X]$ une famille finie de polynômes de degré distincts est une famille libre. (**proposition à retenir, utilisable directement**)

6. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}[X]$, la famille $(1, X, \ldots, X^d)$ est libre.
7. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, la famille de fonctions sin, cos, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est une famille liée.
8. Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille de fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto \cos 2x$ et $x \mapsto \cos^2 x$ est liée.
9. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, la famille de fonctions $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ où $e_k : x \mapsto e^{ikx}$ est libre.
10. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la famille $(u^+, u^-)$ de suites définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^+ = q_+^n,\ u_n^- = q_-^n,$$
où $q_\pm$ sont deux nombres complexes *distincts* est libre.
11. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, la famille $(f_+, f_-)$ de fonctions définies par
$$\forall t \in \mathbb{R}, f_+(t) = e^{q_+.t},\ f_-(t) = e^{q_-.t},$$
où $q_\pm$ sont deux nombres complexes *distincts* est libre.

**Exemples : cont'd**

1. Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^n$, la famille de vecteurs $\mathscr{C} = (e_i, i \in \{1, \ldots, n\})$ définis par la $i$-ème coordonnée de $e_i$ vaut 1, les autres valent 0. est une famille libre.
2. Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, la famille de matrices $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ définies par
   — L'élément de $E_{ij}$ à la ligne $i$, colonne $j$ vaut 1
   — Les autres éléments valent 0

   est libre.

**Exercice 30.-⋆⋆-**
**1.** Montrer que la famille $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ où
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
est libre dans $\mathbb{C}^4$.
**2.** A quelle condition sur le nombre complexe $m$ la famille $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ où
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$
est elle libre dans $\mathbb{C}^4$ ?

**Exercice 31.-⋆⋆-**
**1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on définit $e_k \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $e_k : x \mapsto e^{k.x}$. Montrer que $\{e_k, 0 \leq k \leq n\}$ est une famille libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
**2.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction prenant une infinité de valeurs. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ démontrer que la famille $(f^0, f^1, \ldots, f^n)$ est libre dans $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.
Indication:Que dire des coefficients d'un polynôme s'annulant sur une infinité de points ?

**Exercice 32.-⋆⋆-**
**1.** Dans $\mathbb{C}[X]$, on considère $\mathscr{P} = (P_0, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes tels que $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$ , $\deg(P_k) = k$. Montrer que cette famille est libre.
**2.** Dans $\mathbb{C}[X]$. Soient $a \neq b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on définit $P_k(X) = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$ . Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre.

### Sur-familles/Sous-familles

**Proposition 23.** *1. Si $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ est libre alors toute famille extraite de $\mathscr{U}$ est libre.*

*2. Si $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ est liée alors toute sur-famille de $\mathscr{U}$ est liée.*

Exemples.

### Liberté et applications linéaires

**Proposition 24.** *Soit $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E. On a équivalence entre*

1. *$\mathscr{U}$ est libre.*
2. *L'application linéaire $\mathbb{K}^I \to E$, $(\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i$ est injective.*

*Démonstration.* Il s'agit d'une réécriture de la définition de famille libre. □

**Exercice 33.—** Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. Montrer l'équivalence entre

1. $\phi$ est injective.
2. Pour toute famille libre $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de $E$, la famille $(\phi(u_i))_{i\in I}$ est libre dans $F$.

### Extraction de familles libres

**Proposition 25** (Lemme crucial pour l'extraction)**.** *Si $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ est une famille libre de vecteurs de E, alors pour tout vecteur $v \in E$, on a équivalence entre*

1. *$((u_i)_{i\in I}, v)$ est liée,*
2. *$v \in \mathrm{Vect}\langle u_i, i \in I\rangle$.*

**Proposition 26.** *Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille finie de vecteurs de E, il existe alors une sous-famille $(u_i)_{i\in J}$,* libre*, telle que*

$$\mathrm{Vect}\langle u_i, i \in I\rangle = \mathrm{Vect}\langle u_i, i \in J\rangle .$$

*Démonstration.* Pour la proposition 25 :

— Si $((u_i)_{i\in I}, v)$ est liée alors il existe des scalaires $\lambda_i, i \in I$, $\mu$, *non tous nuls* tels que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i.u_i + \mu.v = 0$$

Si $\mu = 0$, alors les scalaires $\lambda_i, i \in I$, *non tous nuls*, vérifient $\sum_{i\in I} \lambda_i.u_i = 0$, ce qui est impossible car $\mathscr{U}$ est libre. Il s'ensuit que $\mu \neq 0$ et que

$$v = -\sum_{i\in I} \frac{\lambda_i}{\mu}.u_i \in \mathrm{Vect}\langle \mathscr{U}\rangle$$

— Si $v \in \mathrm{Vect}\langle \mathscr{U} \rangle$ alors il existe des scalaires $\lambda_i, i \in I$ tels que

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i \text{ i.e. } \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i - v = 0$$

Comme la famille de coefficients $((\lambda_i)_{i\in I}, -1)$ n'est pas nulle, $((u_i)_{i\in I}, v)$ est liée.

Pour la proposition 26 :

On considère toutes les parties $J$ de $I$ et on en prend une maximale pour la propriété « $(u_i)_{i\in J}$ est libre ». La proposition 25 assure que tout vecteur $u_i$ pour $i \in I$ [20] est dans $\mathrm{Vect}\langle u_i, i \in J\rangle$. Cette famille engendre donc $\mathrm{Vect}\langle u_i, i \in I\rangle$, *i.e.*

$$\mathrm{Vect}\langle u_i, i \in I\rangle = \mathrm{Vect}\langle u_i, i \in J\rangle .$$

□

## 4.1 Bases

**Définition 27.** *Soit $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de l'espace $E$. On dit que $\mathscr{U}$ est une* base *de $E$ si $\mathscr{U}$ est libre et génératrice de $E$.*

**Définition 28.** *On dit que $E$ est un espace de* dimension finie *s'il existe une famille génératrice finie de $E$*

**Théorème 29.** *Un espace est de dimension finie si et seulement si il admet une base.*

### Exemples

1. Bases canoniques $\mathscr{C}_n$, $\mathscr{M}_d$.
2. D'autres bases dans $\mathbb{R}^n$, dans $\mathbb{C}^n$.
3. D'autres bases dans $\mathbb{C}_d[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$,...

### Toutes les bases ont même cardinal

**Théorème 30.** *Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ sont deux bases d'un e.v. $E$ alors $I$ et $J$ ont même nombre d'éléments.*

*Démonstration.* Toute la preuve de ce théorème tient en la remarque suivante dont on se sert couramment

**Lemme 31.** *Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de Vect$\left\langle v_j,\, j \in J\right\rangle$ et $\#I > \#J$ alors $(u_i)_{i\in I}$ est liée.*

Explication du lemme, preuve du théorème. □

### Dimension/Exemples

**Définition 32.** *Soit $E$ un espace de dimension finie. La dimension de $E$ est le cardinal de l'une quelconque de ses bases. On note ce nombre* $\dim E$ *ou* $\dim_{\mathbb{K}} E$ *lorsque l'on veut préciser les scalaires.*

Exemples :

1. $\{0\}$ est de dimension 0 (convention.). $\mathbb{R}^n$ est de dimension $n$.
2. $\mathbb{C}^n$ est de dimension $n$ en tant que $\mathbb{C}$-ev, de dimension $2n$ en tant que $\mathbb{R}$-ev. (Ne pas insister)
3. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_d[X] = d+1$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_d[X] = d+1$,
4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = m.n$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C}) = m.n$
5. On reprend nos exemples de départ.

20. distinguer les cas $i \in J$ et $i \notin J$

**Utilisation élémentaire de la dimension**

**Proposition 33.** *Soit $E$ un e.v. de dimension $n$, $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $E$.*

1. *Si $\#I > n$, $\mathscr{U}$ est liée.*
2. *Si $\#I < n$, $\mathscr{U}$ est n'est pas génératrice de $E$.*
3. *Si $\#I = n$ et $\mathscr{U}$ est libre alors $\mathscr{U}$ est une base de $E$.*
4. *Si $\#I = n$ et $\mathscr{U}$ est génératrice de $E$ alors $\mathscr{U}$ est une base de $E$.*

Exemples d'application.

**Exercice 34.—** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
**1.** Soit $f_a : P \mapsto P(a)$ avec $a \in \mathbb{K}$ fixé. Montrer que $f_a \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K})$.
**2.** Soit $A = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \text{ tel que} P(3) = 0\}$. Montrer que $A$ ssev de $\mathbb{K}_n[X]$. En donner une base et la dimension.
**3.** En donner au moins 2 autres bases.

**Fil rouge : Polynômes d'interpolation de** LAGRANGE

**Proposition 34.** *Soit $z_0, z_1, \dots, z_d$, $d+1$ nombres complexes distincts. On considère les polynômes $L_i(X) = \frac{1}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)} \prod_{j\neq i}(X - z_j)$. alors*

1. *$(L_0, \dots, L_d)$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$.*
2. *Etant donnés $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ $d+1$ nombres complexes, le polynome $P := \sum_{i=0}^{d} \alpha_i L_i$ vérifie*
$$\forall i \in \{0, \dots, d\}\, P(z_i) = \alpha_i$$
3. *Autrement dit, l'application $\Lambda$ définie en page 21 est surjective. Sa restriction à $\mathbb{C}_d[X]$ l'est aussi.*

**Croissance de la dimension**

**Proposition 35.** *Si $E$ est de dimension finie et $F$ est un sev de $E$ alors $F$ est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$.

*Si* $\dim F = \dim E$, *on a $E = F$.*

*Démonstration.* Supposons $F \neq \{0\}$. Si $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ est une famille libre composée de vecteurs de $F$, alors $\#I \leq \dim E$. Prenons maintenant une telle famille $\mathscr{U}$ de cardinal maximal $p$. On a $p \leq n$. Si $v \in F$, la famille $(\mathscr{U}, v)$ ne peut être libre car de cardinal $> p$, elle est donc liée et, comme $\mathscr{U}$ est libre, $v \in \mathrm{Vect}\langle \mathscr{U} \rangle$. Ceci démontre que $F = \mathrm{Vect}\langle \mathscr{U} \rangle$ et donc que $\mathscr{U}$ est une base de $F$. $F$ est donc de dimension finie, dimension égale à $p$. Si $p = n$ alors $\mathscr{U}$ est une famille libre de $\dim E$ vecteurs, c'est donc une base de $E$ et $F = E$. □

## 4.2 Bases et applications linéaires

**Proposition 36.** *Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. $E$ un espace de dimension finie. $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de $E$. La famille $(\phi(u_i))_{i\in I}$ est génératrice de $Im\, \phi$.*

Exemples. App. Lin. déf. par matrice. Autres.

**Proposition 37.** *Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. $E$ un espace de dimension finie. On a équivalence entre*

1. *$\phi$ est un isomorphisme.*
2. *Pour une base $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ de $E$, $\phi(\mathscr{U}) = (\phi(u_i))_{i\in I}$ est une base de $F$.*
3. *Pour toute base $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ de $E$, $\phi(\mathscr{U}) = (\phi(u_i))_{i\in I}$ est une base de $F$.*

**Exemples**

1. Application $X \in \mathbb{K}^n \mapsto A.X \in \mathbb{K}^p$ où $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
2. Polynômes de LAGRANGE. L'application $\Lambda$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}_d[X] \to \mathbb{C}^{d+1}$.

**Proposition 38** (Dimension, l'invariant d'isomorphie)**.** *1.* $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ *ssi* $E$ *et* $\mathbb{K}^n$ *sont isomorphes.*

2. *Si* $m \neq n$, $\mathbb{K}^n$ *et* $\mathbb{K}^m$ *ne sont pas isomorphes.*
3. *Si* $E$, $F$ *sont de dimension finie,* $\dim_{\mathbb{K}} E \neq \dim_{\mathbb{K}} F$, $E$ *et* $F$ *ne sont pas isomorphes.*

Exemples.

**Proposition 39.** *Soit* $E$ *de dimension finie,* $\phi : E \to F$ *une application linéaire.*

1. *Si* $\phi$ *est surjective,* $\dim F \leq \dim E$.
2. *Si* $\phi$ *est injective, soit* $F$ *n'est pas de dimension finie, soit* $\dim E \leq \dim F$.

## 4.3 Application coordonnées

**Proposition 40.** *Si* $\mathscr{E} = (e_i)_{i\in I}$ *est une base de* $E$*, l'application* $\mathbb{K}^I \to E$, $(\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i.e_i$ *est un isomorphisme. Sa réciproque est l'*application coordonnées dans la base $\mathscr{E}$.

Autrement dit, pour tout vecteur $x \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ tels que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i.e_i$.

| Notation : on notera ${}^{\mathscr{E}}[x]$ ou $\mathrm{Mat}(x,\mathscr{E})$ le vecteur des coordonnées de $x \in E$ dans la base $\mathscr{E}$. |
|---|

Attention : la première, ma préférée, est une notation non standard, inspirée de notations américaines, *c.f.* remarques 47, p.33 et 52, p.35, l'autre est celle utilisée dans des livres qui se recopient les uns les autres sans trop réfléchir à la pertinence d'une notation.

Exemples.

1. Coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_d[X]$.
2. Coordonnées dans une base de $\mathbb{K}^n$ : méthode de calcul.
3. Formule de TAYLOR : Dans $E = \mathbb{C}_d[X]$, si $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathscr{U}_\alpha = (1, X-\alpha, \ldots, (X-\alpha)^d) = ((X-\alpha)^\ell)_{\ell\in\{0,\ldots,d\}}$ alors pour tout $P \in \mathbb{C}_d[X]$, ${}^{\mathscr{U}_\alpha}[P] = \left(\frac{P^{(\ell)}(\alpha}{\ell!}\right)_{\ell\in\{0,\ldots,d\}}$.
4. Polynômes de LAGRANGE. Soit $\mathscr{L} = (L_i)_{i\in\{0,\ldots,d\}}$ la base de $\mathbb{C}_d[X]$ des polynômes de LAGRANGE associée à une famille $(z_0,\ldots,z_d)$ de $d+1$ nombres complexes distincts. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_d[X]$, ${}^{\mathscr{L}}[P] = (P(z_i))_{i\in\{0,\ldots,d\}}$.

### Rang d'une famille de vecteurs

**Définition 41.** *Soit* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-e.v.* $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *une famille de* $n$ *vecteurs de* $E$*. On appelle* rang *de cette famille, noté* $rg(u_1,\ldots,u_n)$ *la dimension de l'espace vectoriel Vect*$\langle u_1,\ldots,u_n\rangle$.

**Exercice : calcul pratique du rang** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $d$ muni d'une base $\mathscr{E} = (e_1,\ldots,e_d)$. Si $(u_1,\ldots,u_n)$ est une famille de vecteurs de $E$, le rang de cette famille est égal à au rang de la famille de vecteurs $({}^{\mathscr{E}}[u_1],\ldots,{}^{\mathscr{E}}[u_n])$ dans $\mathbb{K}^d$. Celui-ci peut se calculer à l'aide d'un pivot de GAUSS. Pourquoi ?

**Rang d'une application linéaire**

**Définition 42.** *Soit $E,F$ deux $\mathbb{K}$-e.v. $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle* rang *de cette application, noté $rg(\phi)$ la dimension de l'espace vectoriel Im $\phi$ si celui-ci est de dimension finie.*

Exemples : rang d'a.l et rang de matrice. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ définie par $\phi(X) = A.X$ où $A =$ ...,... Donner le rang de $\phi$.

**Exercice : calcul pratique du rang** Dans le contexte de la proposition précédente, si $(e_1,\ldots,e_d)$ est une famille génératrice de $E$, le rang de $\phi$ est le rang de la famille $(\phi(e_1),\ldots,\phi(e_d))$ de vecteurs de $F$. Pourquoi ? Traiter l'exemple suivant :

# 5 Applications linéaires en dimension finie

## 5.1 Inversibilité automatique

**Théorème 43.** *Soit $E$ et $F$ deux ev de* même *dimension finie, $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$. On a équivalence entre*

1. *$\phi$ est un isomorphisme*
2. *$\phi$ est injective.*
3. *$\phi$ est surjective.*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée $n \times n$. On a équivalence entre

1. $A$ est inversible,
2. il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B.A = I_n$,
3. il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A.B = I_n$,
4. $\mathrm{rg} A = n$
5. Les colonnes de $A$ forment une base de $\mathbb{K}^n$,
6. Les lignes de $A$ forment une base de $\mathbb{K}^n$.

Pour les trois premiers points, il s'agit d'une reformulation du théorème précédent appliqué au cas de $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, x \mapsto A.x$.

## 5.2 Matrices d'applications linéaires

### Définir une a.l. par les images de vecteurs d'une base

**Théorème 44.** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E} = (e_j)_{j\in J}$ une base. $F$ un espace vectoriel et $(f_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs de $F$. Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $\forall j \in I, f(e_j) = f_j$.*

*Démonstration.* Par analyse-synthèse. Supposons qu'une telle application existe et soit $x \in E$, ${}^{\mathscr{E}}[x] = (\lambda_i)_{i\in I}$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{E}$. On a nécéssairement, par linéarité de $f$,

$$f(x) = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i.e_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i.f_i.$$

Ce qui montre l'unicité sous réserve d'existence.

Définissons alors l'application $f$ par cette formule, on vérifie aisément que $f$ ainsi définie répond à la question, ce qui montre l'existence. $\square$

### Matrice d'application linéaire

**Proposition 45.** *Soit $E$, $F$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathscr{E} = (e_j)_{j\in J}$ une base de $E$, $\mathscr{F} = (f_i)_{i\in I}$ une base de $F$.*

1. *Etant donnée $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$, il existe une unique famille de scalaires $\Phi = (\phi_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ telle que*

$$\forall j \in J, \phi(e_j) = \sum_{i\in I} \phi_{ij}.f_i$$

2. *Réciproquement, étant donnée une famille de scalaires $\Phi = (\phi_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$, il existe une unique $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$ vérifiant la relation ci-dessus.*

Supposons $I = \{1,\dots,n\}$, $J = \{1,\dots,p\}$, avec $n = \dim F$, $p = \dim E$, on vient d'établir une bijection entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, qui, à chaque $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$ associe sa matrice $\Phi \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *relativement aux bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.*

$$\boxed{\text{On notera } {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} \text{ ou } \mathrm{Mat}(\phi,\mathscr{E},\mathscr{F}) \text{ cette matrice.}}$$

**Théorème 46.** *Cette matrice est caractérisée par la relation fondamentale*

$$\forall x \in E, {}^{\mathscr{F}}[\phi(x)] = {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}.{}^{\mathscr{E}}[x].$$

**Remarque 47.** *Si on utilise la notation « habituelle » trouvée dans quelques livres français avec Mat, cette relation s'écrit*

$$Mat(\phi(x),\mathscr{F}) = Mat(\phi,\mathscr{E},\mathscr{F}).Mat(x,\mathscr{E})$$

*On perd l'aspect graphique à la* CHASLES *de la relation et on se trompe systématiquement lors de l'écriture des relations. Ce n'est pas une bonne notation de ce fait.*

*Démonstration.* Appelons $\Phi = {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$, $n = \dim F$, $p = \dim E$. $\Phi \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\Phi = (\phi_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$. Si $x$ a pour coordonnées ${}^{\mathscr{E}}[x] = (x_1,\dots,x_p)$ relativement à la base $\mathscr{E}$ cela signifie que $x = \sum_{j=1}^{p} x_j.e_j$ et donc, par linéarité de $\phi$, $\phi(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j.\phi(e_j)$. En substituant $\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ij}.f_i$, on obtient, après inversion des symboles $\sum$ que

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\phi_{ij}\right).f_i$$

En d'autres termes, pour $i \in 1,\dots,n$, la $i$-ième coordonnée de $\phi(x)$ dans la base $\mathscr{F}$ est $\sum_{j=1}^{p} x_j\phi_{ij}$. Il s'agit **aussi** de la $i$-ième composante du vecteur $\Phi.{}^{\mathscr{E}}[x]$ et donc

$${}^{\mathscr{F}}[\phi(x)] = \Phi.{}^{\mathscr{E}}[x]$$

□

**Construction pratique**

On retiendra la recette pratique de construction de la matrice $\Phi$ d'une application linéaire $\phi : E \to \mathbb{F}$ relativement aux bases $\mathscr{E} = (e_1,\dots,e_n)$ de $E$ et $\mathscr{F}$ de $F$

$$\Phi = {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} = \left({}^{\mathscr{F}}[\phi(e_1)]\,|\dots|\,{}^{\mathscr{F}}[\phi(e_n)]\right)$$

Autrement dit, on calcule les colonnes de coordonnées sur la base $\mathscr{F}$ de chacun des vecteurs $\phi(e_i)$. $\Phi$ est obtenue en plaçant ces colonnes côte à côte.

**Exercice 35.-$\star$-** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par : $f(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+4z)$.
**1.** Trouver la matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.
**2.** Trouver la matrice de $f$ dans les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$ :

$$\{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\} \text{ et } \{v_1 = (1,3), v_2 = (1,4)\}.$$

**Exercice 36.-$\star$-** Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

**1.** Calculer l'image par $f$ des vecteurs $f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire la matrice $B$ de l'application $f$ dans la base $\{f_1, f_2\}$.
**2.** Si un vecteur a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base canonique et $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ dans la base $\{f_1, f_2\}$. Quelle est la matrice de changement de base $P$ qui permet de calculer $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à partir de $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ? calculer $P^{-1}$.
**3.** Montrer que $A = PBP^{-1}$, puis $A^n = PB^nP^{-1}$.
**4.** Calculer $B^n$, et en déduire $A^n$.
**5.** On définit les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$u_0 = 1$, $v_0 = 2$, et les relations de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3v_n$, $v_{n+1} = u_n - 2v_n$.
Calculer $u_n$ et $v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 37.—**
**1.** Montrer que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1,1,-1), u_2 = (-1,1,1), u_3 = (1,-2,1).$$

**2.** Déterminer la matrice de passage $P$ de la base canonique $(e_1,e_2,e_3)$ à la base $(u_1,u_2,u_3)$.
**3.** Soit $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$ . Exprimer $(y_1,y_2,y_3)$ en fonction de $(x_1,x_2,x_3)$.
**4.** Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (2y, 5x+3z, -4x-2y-4z)$.
Ecrire la matrice associée de $f$ dans la base $(u_1,u_2,u_3)$ .

### Le théorème du rang

**Proposition 48.** *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathscr{E} = (e_j)_{j\in J}$ une base de E, $\mathscr{F} = (f_i)_{i\in I}$ une base de F, $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\Phi = {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$ alors, via les applications coordonnées,*
- *$Ker\,\phi$ et $Ker\,\Phi$ sont isomorphes.*
- *$Im\,\phi$ et $Im\,\Phi$ sont isomorphes.*

*En particulier le rang de l'application $\phi$ et le rang de la matrice $\Phi$ sont égaux.*

**Théorème 49** (Théorème du rang)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F un espace vectoriel, $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$, on a*

$$\dim E = rg(\phi) + \dim Ker\,\phi$$

Provenance directe de l'algorithme de GAUSS. Exemples d'application.

### Matrices et Addition/multiplication par un scalaire

**Théorème 50.** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, munis respectivement des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$. Si $\phi, \psi \in \mathscr{L}(E,F)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a*

$${}^{\mathscr{F}}[\lambda.\phi + \mu.\psi]_{\mathscr{E}} = \lambda.{}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} + \mu.{}^{\mathscr{F}}[\psi]_{\mathscr{E}}$$

*Les opérations à droite de cette égalité étant les opérations + et . du $\mathbb{K}$-ev des matrices* $\dim E \times \dim F$ *à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

**Matrices et Composition**

**Théorème 51.** *Soient $E$, $F$, $G$ trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, munis respectivement des bases $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$. Si $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$, $\gamma \in \mathscr{L}(F,G)$, $\gamma \circ \phi \in \mathscr{L}(E,G)$ et*

$$^{\mathscr{G}}[\gamma \circ \phi]_{\mathscr{E}} = {}^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$$

*La multiplication à droite de cette égalité étant une multiplication entre matrices de dimensions compatibles.*

**Remarque 52.** *Si on utilise la notation « habituelle » trouvée dans quelques livres français avec Mat, cette relation s'écrit*

$$Mat(\gamma \circ \phi, \mathscr{E}, \mathscr{G}) = Mat(\gamma, \mathscr{F}, \mathscr{G}).Mat(\phi, \mathscr{E}, \mathscr{F})$$

*On perd là encore l'aspect graphique à la* CHASLES *de la relation et on se trompe systématiquement lors de l'écriture des relations. L'écriture des formules de changement de base en propositions 54, 55 et 56 devient un pur enfer.*

*Démonstration.* On se ramène à la relation du théorème 46 en travaillant colonne par colonne. Donnons ce qui se passe pour la première colonne, les autres colonnes fonctionnant sur le même principe.

— La première colonne de $^{\mathscr{G}}[\gamma \circ \phi]_{\mathscr{E}}$ est constituée des coordonnées dans la base $\mathscr{G}$ (placées en colonne) du vecteur $\gamma(\phi(e_1))$ où $e_1$ est le premier vecteur de la base $\mathscr{E}$ de $E$ ; Il s'agit donc de $^{\mathscr{G}}[\gamma(\phi(e_1))]$. Par la relation du théorème 46, on a

$$^{\mathscr{G}}[\gamma(\phi(e_1))] = {}^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi(e_1)]$$

— En appliquant une deuxième fois la relation du théorème 46, on a

$$^{\mathscr{G}}[\gamma(\phi(e_1))] = {}^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} . {}^{\mathscr{E}}[e_1] = {}^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

— Notre grande expérience du calcul matriciel indique que $^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est la première colonne de la matrice $^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$.

— On vient donc d'obtenir que la première colonne de $^{\mathscr{G}}[\gamma \circ \phi]_{\mathscr{E}}$ est la première colonne de $^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$.

□

En exemple fondamental, examinons le cas des matrices inversibles/applications linéaires bijectives.

1. On a vu que si $\mathscr{E}$ est une base de $E$, de dimension $n$ alors, en notant $i_E$ l'application identité de $E$, $^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}} = I_n$ ;
2. Si $\phi : E \to F$ est une application linéaire bijective, un *isomorphisme* de $E$ sur $F$, alors
   (a) $E$ et $F$ sont de même dimension, disons $n$ ; Notons $\mathscr{E}$, resp. $\mathscr{F}$ une base de $E$, resp. de $F$ ;

(b) $\phi \circ \phi^{-1}(: F \to F) = i_F$ et donc

$$I_n = {}^{\mathscr{F}}\left[\phi \circ \phi^{-1}\right]_{\mathscr{F}} = {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} . {}^{\mathscr{E}}\left[\phi^{-1}\right]_{\mathscr{F}}$$

(c) $\phi^{-1} \circ \phi(: E \to E) = i_E$ et donc

$$I_n = {}^{\mathscr{E}}\left[\phi^{-1} \circ \phi\right]_{\mathscr{E}} = {}^{\mathscr{E}}\left[\phi^{-1}\right]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$$

(d) et donc ${}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$ est une matrice inversible et $({}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}})^{-1} = {}^{\mathscr{E}}\left[\phi^{-1}\right]_{\mathscr{F}}$.

3. Réciproquement, si $\phi : E \to F$ est une application linéaire et si ${}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$ est une matrice inversible alors $\phi$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$.

**Matrices d'endomorphismes**

Dans le cas où $E = F$, on peut bien sûr prendre $\mathscr{E} = \mathscr{F}$, dans ce cas, si $\phi$ est un endomorphisme de $E$, on appelle ${}^{\mathscr{E}}[\phi]_{\mathscr{E}}$ la matrice de $\phi$ *relativement à la base* $\mathscr{E}$

En exemple fondamental, examinons le cas de l'endomorphisme identité :

1. On a vu que si $\mathscr{E}$ est une base de $E$, de dimension $n$ alors ${}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}} = I_n$ ;
2. Si $\phi : E \to E$ est un endomorphisme bijectif, un *automorphisme* de $E$, alors

$$I_n = {}^{\mathscr{E}}\left[\phi \circ \phi^{-1}\right]_{\mathscr{E}} = {}^{\mathscr{E}}[\phi]_{\mathscr{E}} . {}^{\mathscr{E}}\left[\phi^{-1}\right]_{\mathscr{E}}$$

et donc ${}^{\mathscr{E}}[\phi]_{\mathscr{E}}$ est une matrice inversible et $({}^{\mathscr{E}}[\phi]_{\mathscr{E}})^{-1} = {}^{\mathscr{E}}\left[\phi^{-1}\right]_{\mathscr{E}}$.

3. Réciproquement, si $\phi : E \to E$ est un endomorphisme et si ${}^{\mathscr{E}}[\phi]_{\mathscr{E}}$ est une matrice inversible alors $\phi$ est un automorphisme de $E$.

**Exercice 38.-⋆-** On considère les fonctions suivantes, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par les formules
$p(x) = e^x \cos(x)$, $q(x) = e^x \sin(x)$, $r(x) = e^{-x} \cos(x)$ et $s(x) = e^{-x} \sin(x)$.
**1.** Montrer que ces quatre fonctions forment une famille libre dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par $E$ le sous-espace vectoriel engendré par ces quatre fonctions.
**2.** On désigne par $D : \mathscr{C}^\infty \to \mathscr{C}^\infty$ l'application $f \mapsto f'$. Montrer que $D$, restreinte au sous-espace $E$, est une application linéaire de $E$ dans lui-même, i.e un endomorphisme.
**3.** Écrire la matrice $M$ de la restriction de $D$ à $E$, dans la base $(p,q,r,s)$.
**4.** Calculer l'inverse de $M$, et en déduire une primitive de $f(x) = e^x(2\cos(x) + \sin(x)) + e^{-x}(\cos(x) - \sin(x))$.

**Exercice 39.—** On définit une l'application $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) = X.P'(X) - P(X)$$

**1.** Montrer que $u$ est linéaire.
**2.** $u$ est-elle injective ?
**3.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$ ; Montrer que, par restriction, $u$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.
**4.** Donner sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$.

**Exercice 40.-⋆-** On considère $E = \mathbb{R}_d[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{M}_d$.

Pour chacune des formules suivantes, vérifier qu'elle définit bien un endomorphisme de $E$ et donner sa matrice relativement à $\mathscr{M}_d$.

**1.** $D(P) = P'$
**2.a.** $S_+(P) = P(X+1)$
**2.b.** $S_-(P) = P(X-1)$
**2.c.** $S_+ \circ S_-$.
**2.d.** Quelles relations « miraculeuses » sur les coefficients binomiaux vient-on d'obtenir ?
**3.** $f(P) = X(P(X+1) - P(X-1))$.

**Exercice 41.—** Soit le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $u : E \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$\forall f \in E, \quad \begin{array}{rccl} u(f): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f''(x) + f'(x) + f(x) \end{array}$$

**1.** Montrer que $u$ est linéaire.
**2.** Montrer que par restriction de l'image elle définit un endomorphisme de $E$.
**3.** Déterminer son noyau $F$, en donner une base $\mathscr{F}$ et la dimension.
**4.** Montrer que l'application $D : E \to E$, définie par $\forall f \in E, D(f) = f'$ se restreint en un endomorphisme de $F$ et en donner la matrice relativement à la base $\mathscr{F}$.

**Exercice 42.—** Soit $E = \mathbb{R}^N$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles et $\phi : E \to E$ définie par

$$\forall u, v \in E, \, v = \phi(u) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \, v_n = u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)$$

**1.** Montrer que $\phi$ est linéaire.
**2.** Déterminer son noyau $F$, en donner une base $\mathscr{F}$ et la dimension.
**3.** Montrer que l'application $D : E \to E$, définie par $\forall u \in E, D(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ se restreint en un endomorphisme de $F$ et en donner la matrice relativement à la base $\mathscr{F}$.

**Exercice 43.—**
Soit $f$ un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = f \circ f = 0$ .
**1.** Démontrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ . En déduire $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.
**2.** Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice associée à $f$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
**3.** Généraliser ce résultat pour $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $f \circ f = 0$.

**Exercice 44.—** Montrer que pour $\phi \in \mathscr{L}(E)$, $n \in \mathbb{N}^*$, ${}^{\mathscr{E}}[\phi^n]_{\mathscr{E}} = {}^{\mathscr{E}}[\phi]^n_{\mathscr{E}}$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, donner une relation naturelle entre ${}^{\mathscr{E}}[P(\phi)]_{\mathscr{E}}$ et $P({}^{\mathscr{E}}[\phi]_{\mathscr{E}})$.

**Matrice de passage**

Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de $E$. On considère la matrice $P$ dont les colonnes sont constituées des coordonnées de chaque vecteur de $\mathscr{E}'$ dans la base $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, on a donc

$$P = \left( {}^{\mathscr{E}}[e'_1] \,|\, \ldots \,|\, {}^{\mathscr{E}}[e'_n] \right)$$

1. $P$ est la matrice, relativement à la base $\mathscr{E}$ de l'endomorphisme qui, pour tout $i$, envoie $e_i$ sur $e'_i$. C'est la *matrice de passage* de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$.
2. $P$ est la matrice, relativement à la base $\mathscr{E}'$ au départ et $\mathscr{E}$ à l'arrivée de l'identité de $E$.

$$P = {}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}'}$$

**Propriétés des matrices de passage**

**Proposition 53.** *La matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$ est inversible, son inverse est la matrice de passage de $\mathscr{E}'$ à $\mathscr{E}$.*

Exemples.

*Démonstration.* Notons $P$ la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$, $P'$ la matrice de passage de $\mathscr{E}'$ à $\mathscr{E}$.

$$I_n = {}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}} = {}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}'}.{}^{\mathscr{E}'}[i_E]_{\mathscr{E}} = P.P'$$

En échangeant les rôles de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$, on a aussi $I_n = P'.P$. □

**Formules de changement de base : vecteurs**

**Proposition 54.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$ de dimension finie $n$, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases (indicées de $1$ à $n$) de $E$, $P$ la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$. Pour tout $x \in E$, notons $X$, resp. $X'$ le vecteur de ses coordonnées dans la base $\mathscr{E}$, resp. $\mathscr{E}'$. On a*

$$X = P.X'$$

*Démonstration.* $X = {}^{\mathscr{E}}[x] = {}^{\mathscr{E}}[i_E(x)] = {}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}'}.{}^{\mathscr{E}'}[x] = P.X'$ □

**Formules de changement de base : matrices**

**Proposition 55.** *Soient $E$, $F$ deux espaces de dimension finie, $\phi : E \to F$ une application linéaire, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ deux bases de $E$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ deux bases de $F$, $\Phi$, resp. $\Phi'$ les matrices de $\phi$ relativement à $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, resp. $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{F}'$, $P$ la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$, $Q$ la matrice de passage de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{F}'$. On a alors*

$$\Phi' = Q^{-1}.\Phi.P$$

*Démonstration.* $\Phi' = {}^{\mathscr{F}'}[\phi]_{\mathscr{E}'} = {}^{\mathscr{F}'}[i_F \circ \phi \circ i_E]_{\mathscr{E}'} = {}^{\mathscr{F}'}[i_F]_{\mathscr{F}}.{}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}.{}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}'} = Q^{-1}.\Phi.P$ □

**Formules de changement de base : endomorphismes**

**Proposition-Définition 56.** *Soient $E$ de dimension finie, $\phi : E \to E$ un endomorphisme, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ deux bases de $E$, $\Phi$, resp. $\Phi'$ les matrices de $\phi$ relativement à $\mathscr{E}$, resp. $\mathscr{E}'$, $P$ la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$. On a alors*

$$\Phi' = P^{-1}.\Phi.P$$

*Deux matrices $\Phi$ et $\Phi'$ liées par une telle relation sont dites* semblables. *Deux matrices semblables représentent la même application linéaire relativement à des bases éventuellement distinctes*

La philosophie du changement de base est, partant d'une matrice $A$ *a priori* sans trop de structure visible, de trouver une/des base/s *adaptée/s* à $A$ telle/s que $A' = Q^{-1}.A.P$ possède une structure simple.

A contrario, une application linéaire intéressante, géométriquement parlant, a souvent une structure très simple dans une base non standard mais adaptée à la situation. On peut alors construire sa matrice dans une base standard.

Voir les cours à venir sur la réduction/diagonalisation des endomorphismes.

**Exercice 45.—** Soit, dans $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{C}$, la base canonique et les vecteurs

$$f_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

**1.** Démontrer que $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les matrices de passages entre ces deux bases.
**2.** On considère l'endomorphisme $\phi$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{F}$ est

$$\Phi = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

**2.a.** Donner la matrice $\Phi'$ de $\phi$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
**2.b.** Quel est le rang de $\phi$ ?
**2.c.** Donner un système d'équations cartésiennes de $\operatorname{Ker}\phi$

**Exercice 46.—** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\0 & -3 & -2\\0 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

**1.** Montrer que la famille $\mathscr{C} = (1, X - 2X^2, 1 - 2X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
**2.** Déterminer la matrice de $f$ relativement à la base $\mathscr{C}$ par la formule de changement de base.

**Exercice 47.—**
**1.** Soit, pour $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, e_k(t) = e^{ik.t}$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{E}_n := (e_{-n}, .., e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Dimension de $\operatorname{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$.
**2.** Montrer que l'application $D^2$ définie comme endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par

$$\forall f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), D^2(f) = f''$$

se restreint en un endomorphisme de $\operatorname{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$ et donner sa matrice relativement à cette base.
**3.** On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, resp. pour $k \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $c_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, resp. $s_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, c_k(t) = \cos(k.t), \text{ resp.} \forall t \in \mathbb{R}, s_k(t) = \sin(k.t), \text{ resp.}$$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{C}_n = (c_k, k \in \{0, \dots, n\}), \mathscr{S}_n = (s_k, k \in \{1, \dots, n\}), \mathscr{C}\mathscr{S}_n = \mathscr{C}_n \# \mathscr{S}_n$$

**3.a.** Montrer que $\mathscr{C}\mathscr{S}_n$ est une base de $\operatorname{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$.
**3.b.** On prend $n = 3$. Donner $P$ la matrice de passage de $\mathscr{C}\mathscr{S}_n$ vers $\mathscr{E}_n$ et son inverse.
**3.c.** On prend $n = 3$. Donner la matrice de $D^2$ relativement à la base $\mathscr{C}\mathscr{S}_n$.

**Exercice 48.—** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\{0,\dots,n-1\}}$ et on considère la base de FOURIER, $\mathscr{F} = (e_k)_{k \in \{0,\dots,n-1\}}$ où $e_k$ est le vecteur dont la coordonnée d'indice $\ell$ est $e^{\frac{ik\ell 2\pi}{n}}$. (ici $i$ est le nombre complexe bien connu, pas un indice entier !)

**1.** Donner $F$, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^{\{0,\ldots,n-1\}}$ à la base $\mathscr{F}$, et, après avoir calculé ${}^t\overline{F}.F$, son inverse.
**2.** On se donne un vecteur $a \in \mathbb{C}^{\{0,\ldots,n-1\}}$ et on considère une matrice $A$ carrée d'ordre $n$, indicée par $\{0,\ldots,n-1\} \times \{0,\ldots,n-1\}$ dont le coefficient à la place $(k,\ell)$ est $a_{k-\ell}$ lorsque $k \geq \ell$ et $a_{n+k-\ell}$ lorsque $k < \ell$.
**2.a.** Représenter schématiquement une telle matrice $A$. On appelle une telle matrice une matrice cyclique, pourquoi ?
**2.b.** On considère l'endomorphisme de $E$ dont la matrice par rapport à la base canonique est $A$. Calculer directement sa matrice dans la base $\mathscr{F}$.
**2.c.** Quelle relation matricielle donne le calcul effectué dans la question précédente ?

**Exercice 49.—**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, muni d'une base $\mathscr{E} = (e_1,\ldots,e_n)$.
**1.** Soit $k \in \{1,\ldots,n\}$. Montrer qu'il existe une forme linéaire, i.e une application linéaire $e_k^* : E \to \mathbb{K}$ telle que $e_k^*(e_\ell) = 0$ si $\ell \neq k$ et $e_k^*(e_k) = 1$. On pourra se contenter d'exhiber sa matrice relativement aux bases $\mathscr{E}$ de $E$ et $(1)$ de $\mathbb{K}$.
**2.** Montrer que la famille $\mathscr{E}^* = (e_1^*,\ldots,e_n^*)$ forme une base de $E^*$, l'espace vectoriel des formes linéaires sur $E$. (on pourra montrer que cet espace a même dimension que $E$ en exhibant un isomorphisme avec un espace de matrices adéquat).
**3.** Soit $\phi : E \to E$ un endomorphisme de $E$ de matrice $M$ dans la base $\mathscr{E}$. On considère

$$\phi^* : E^* \to E^*, \ell \mapsto (x \in E \mapsto \ell(\phi(x)))$$

Quelle est la matrice de $\phi^*$ relativement à la base $\mathscr{E}^*$ ?

**Fil rouge : interpolation de** LAGRANGE Revenons à l'exemple de l'interpolation de LAGRANGE associée aux points $(z_0,\dots,z_{d+1})$ et donc l'application $\Lambda : \mathbb{C}_d[X] \to \mathbb{C}^{d+1}$, $P \mapsto (P(z_0),\dots,P(z_1))$. La matrice de cette application relativement à $\mathscr{M}_d$, la base canonique de $\mathbb{C}_d[X]$ et $\mathscr{C}_{d+1}$, la base canonique de $\mathbb{C}^{d+1}$ est

$$V := {}^{\mathscr{C}_d}\left[\Lambda\right]_{\mathscr{M}_d} = \begin{pmatrix} 1 & z_0 & \dots & z_0^d \\ 1 & z_1 & \dots & z_1^d \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & z_d & \dots & z_d^d \end{pmatrix}$$

Cette matrice s'appelle la matrice de VANDERMONDE associée aux points $(z_0,\dots,z_d)$. Dans le cas où les points sont distincts, ce que nous avons prouvé, via, le caractère isomorphique de l'application $\Lambda$ est que cette matrice est inversible.

On vient donc de prouver, sans douleur, que, dans $\mathbb{C}^{d+1}$, les $d+1$ vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ z_i \\ \vdots \\ z_i^d \end{pmatrix}$ forment une famille libre.

Quelle est l'inverse de $V$ ? Ici, un pivot de GAUSS peut s'avérer hasardeux et l'interprétation polynômiale va nous aider. On a vu que

$$\Lambda^{-1}(\alpha_0,\dots,\alpha_d) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i . L_i$$

où les $L_i$ sont les polynômes de LAGRANGE associés aux points $(z_0,\dots,z_d)$.

On a donc $V^{-1} = {}^{\mathscr{M}_d}\left[\Lambda^{-1}\right]_{\mathscr{C}_d}$. La colonne $j$ de $V^{-1}$ est donc constituée des coefficients du polynôme $L_j$, coordonnées de ce polynôme dans la base des monômes $\mathscr{M}_d$.

D'un autre point de vue, considérons la matrice de passage de la base $\mathscr{L}$ des polynômes de LAGRANGE à la base canonique $\mathscr{M}_d$ de $\mathbb{C}_d[X]$. Cette matrice de passage est $V$, elle est donc inversible et $V^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathscr{M}_d$ à la base $\mathscr{L}$. On retrouve la même formule pour $V^{-1}$.

Traitons le cas $d = 2$. On a

$$L_0(X) = \frac{(X-z_1)(X-z_2)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)} = \frac{1}{D_0}(X^2-(z_1+z_2)X+z_1.z_2), L_1(X) = ...,$$

et donc $V^{-1} =$

$$\frac{1}{D}\begin{pmatrix} (z_2-z_1).z_1.z_2 & (z_0-z_2).z_2.z_0 & (z_1-z_0).z_0.z_1 \\ -(z_2-z_1).(z_1+z_2) & -(z_0-z_2).(z_2+z_0) & -(z_1-z_0).(z_0+z_1) \\ (z_2-z_1) & (z_0-z_2) & (z_1-z_0) \end{pmatrix}$$

avec $D = (z_0-z_1)(z_1-z_2)(z_2-z_0)$

On termine par deux séries de graphiques illustrant le problème de l'interpolation.

Chacune des deux séries de figures est composée de la façon suivante

1. On prend $N = 15$ points $(x_i)_{i=0,..,N-1}$ du segment $[-1,-1]$, on prend pour valeurs $(y_i)_{i=0,..,N-1} = (f(x_i))_{i=0,..,N-1}$ où $f(x) = \frac{1}{1+10(x-\frac{1}{2})^2}$ et on construit le polynôme $P$ de degré au plus $N-1$ dont le graphe passe par les couples $(x_i,y_i)$.
2. On trace le graphe de ce polynôme et celui de la fonction $f$
3. On trace le graphe de $f'$, celui de $P'$ ainsi que le graphe du polynôme $Q$ interpolation de $f'$ aux points $x_i$

Utiliser le script `exemple-fil-rouge.py`.

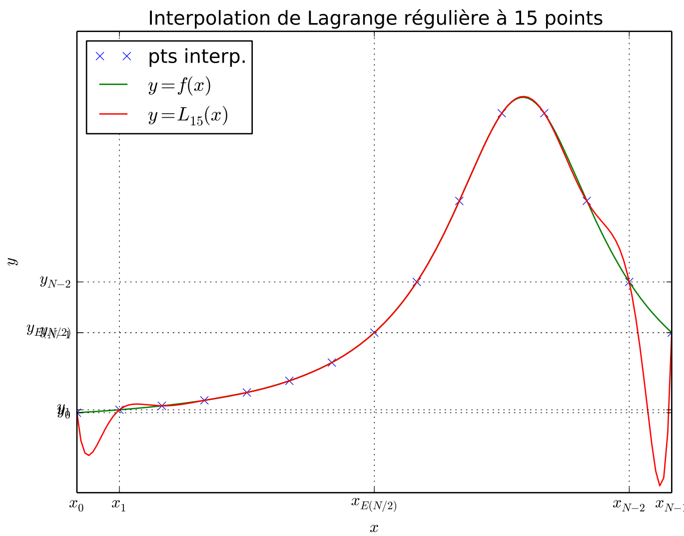


FIGURE 4 – $N = 15$ points uniformément répartis sur $[-1, 1]$. $f$ et interpolé $P$

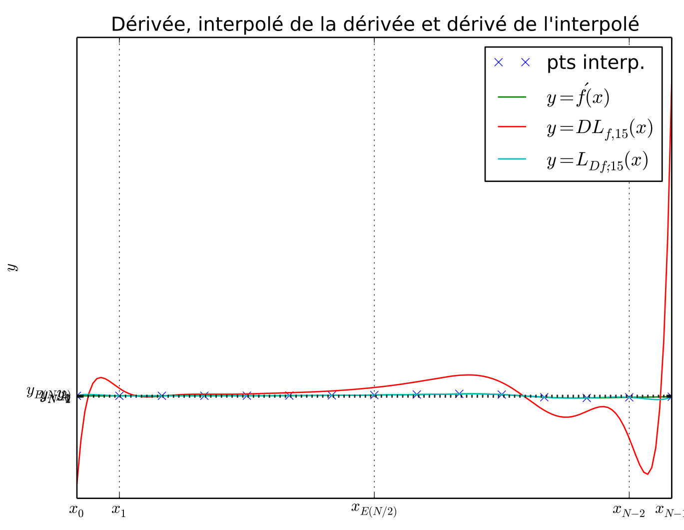


FIGURE 5 – $N = 15$ points uniformément répartis sur $[-1, 1]$. $f'$, $P'$ et interpolé $Q$ de $f'$

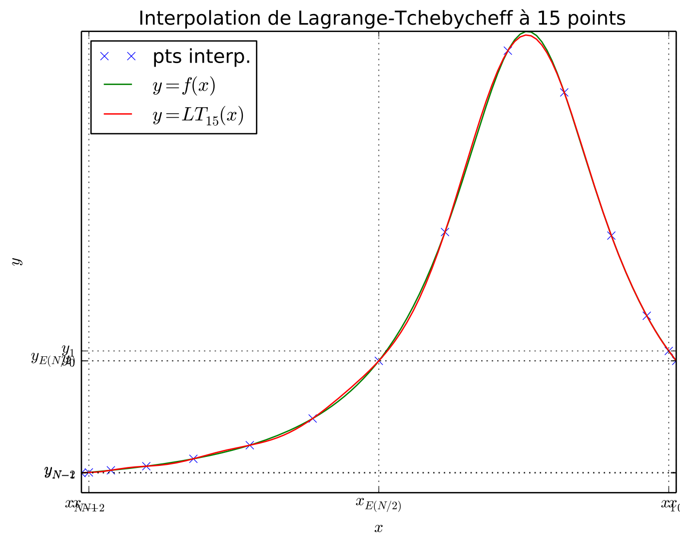


FIGURE 6 – $N = 15$ points répartis à la TCHEBYCHEFF sur $[-1, 1]$. $f$ et interpolé $P$

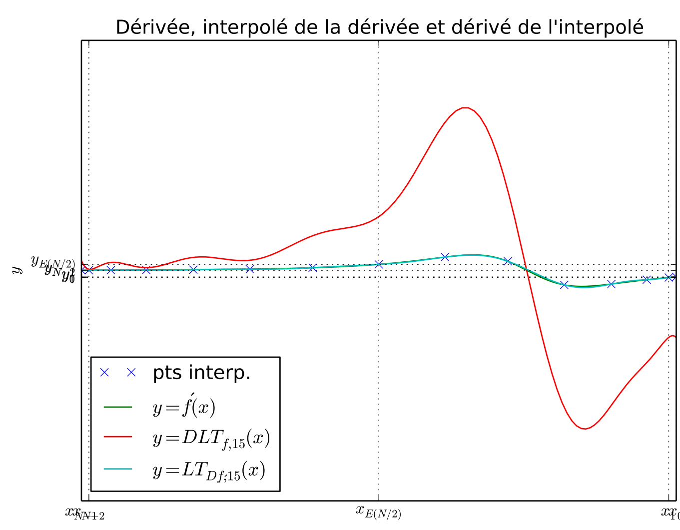


FIGURE 7 – $N = 15$ points répartis à la TCHEBYCHEFF sur $[-1, 1]$. $f'$, $P'$ et interpolé $Q$ de $f'$