Corrections choisies 06

Diagonalisation

Correction Ex.–1

1. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et l'endomorphisme $D \in \mathscr{L}(E)$ de dérivation, *i.e.* défini par

$$\forall f \in E, D(f) = f'$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, non nul(le). Le vecteur f est vecteur propre de D associé à la valeur propre λ si et seulement si

$$D(f) = \lambda.f$$

i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \lambda.f(t)$$

Cette équation différentielle se résout en

$$\exists C \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = C.e^{\lambda.t}$$

On en déduit que Tout nombre complexe λ est valeur propre de D, l'espace propre associé est, en posant $e_\lambda : \mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(\lambda.t) = e^{\lambda.t} \in \mathbb{C}$,

$$E_\lambda(D) = \text{Ker}\,(D - \lambda.i_E) = \text{Vect}\,\langle e_\lambda \rangle$$

Chaque espace propre est de dimension 1.

2. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et l'endomorphisme $D \in \mathscr{L}(E)$ de dérivation.

1. (Question non posée) Concernant valeurs propres et vecteurs propres de D, le même raisonnement que précédemment (on se limite à rechercher les valeurs propres *réelles*, *i.e.* on suppose $\lambda \in \mathbb{R}$) donne que
   Tout nombre réel λ est valeur propre de D, l'espace propre associé est, en posant $e_\lambda : \mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(\lambda.t) = e^{\lambda.t} \in \mathbb{R}$,
   $$E_\lambda(D) = \text{Ker}\,(D - \lambda.i_E) = \text{Vect}\,\langle e_\lambda \rangle$$
   Chaque espace propre est de dimension 1.
2. Concernant valeurs propres et vecteurs propres de $D \circ D$, on reprend le raisonnement :
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, non nul(le). Le vecteur f est vecteur propre de $D^2 = D \circ D$ associé à la valeur propre λ si et seulement si
   $$D^2(f) = \lambda.f$$
   i.e.
   $$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = \lambda.f(t)$$
   Cette équation différentielle se résout, suivant les cas en
   (a) $(\lambda > 0)$, $\alpha = \sqrt{\lambda}$
   $$\exists C_+, C_- \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = C_+.e^{+\alpha.t} + C_-.e^{-\alpha.t}.$$
   Dans ce cas, l'espace propre associé est, en posant $e_\mu : \mathbb{R} \ni t \mapsto = e^{\mu.t} \in \mathbb{R}$,
   $$E_\lambda(D^2) = \text{Ker}\,(D^2 - \lambda.i_E) = \text{Vect}\left\langle e_{+\sqrt{\lambda}}, e_{-\sqrt{\lambda}} \right\rangle$$
   Cet espace propre est de dimension 2.
   (b) $(\lambda = 0)$,
   $$\exists C_0, C_1 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = C_0 + C_1.t.$$
   Dans ce cas, l'espace propre associé est, en posant $p_k : \mathbb{R} \ni t \mapsto t^k \in \mathbb{R}$,
   $$E_\lambda(D^2) = \text{Ker}\,(D^2 - \lambda.i_E) = \text{Vect}\,\langle p_0, p_1 \rangle$$
   Cet espace propre est de dimension 2.
   (c) $(\lambda < 0)$, $\alpha = \sqrt{-\lambda}$
   $$\exists C, S \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = C.\cos(\alpha.t) + S.\sin(\alpha.t).$$
   Dans ce cas, l'espace propre associé est, en posant $c_\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto \cos(\alpha.t)$, $s_\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto \sin(\alpha.t)$,
   $$E_\lambda(D^2) = \text{Ker}\,(D^2 - \lambda.i_E) = \text{Vect}\left\langle c_{\sqrt{-\lambda}}, s_{\sqrt{-\lambda}} \right\rangle$$
   Cet espace propre est de dimension 2.
   On en déduit que Tout nombre réel λ est valeur propre de D^2, les espaces propres sont tous de dimension 2.

3. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et l'endomorphisme $D \in \mathscr{L}(E)$ de décalage à droite, *i.e.* défini par

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, D(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, non nul(le). Le vecteur u est vecteur propre de D associé à la valeur propre λ si et seulement si

$$D(u) = \lambda.u$$

i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda.u_n$$

Cette récurrence se résout en

$$\exists C \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = C.\lambda^n$$

On en déduit que Tout nombre complexe λ est valeur propre de D, l'espace propre associé est, en posant $g_\lambda = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite géométrique de raison λ,

$$E_\lambda(D) = \mathrm{Ker}\,(D - \lambda.i_E) = \mathrm{Vect}\,\langle g_\lambda \rangle$$

Chaque espace propre est de dimension 1.

Correction Ex.–4

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur de propre de M si et seulement si le rang de $M - \lambda.I_n$ est strictement plus peit que n. Hors les rangs d'une matrice et de sa transposée sont égaux et ${}^t(M - \lambda.I_n) = {}^tM - \lambda.I_n$. On a donc équivalence entre
   (a) $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur de propre de M ;
   (b) $\mathrm{rg}(M - \lambda.I_n) = \mathrm{rg}({}^tM - \lambda.I_n) < n$;
   (c) $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur de propre de ${}^tM$;

   De cette équivalence, on déduit l'égalité des spectres de M et ${}^tM$.
2. La question de la diagonalisibilité est plus simple : si M est diagonalisbla alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que

   $$M = P.D.P^{-1}$$

   En passant cette identité à la transposée, il vient en utilisant les règles sur transposition et produit, tranposition et inverse et enfin sur le fait qu'une matrice diagonale est symétrique que

   $${}^tM = {}^tP^{-1}.D.{}^tP$$

   La matrice ${}^tM$ est donc semblable à une matrice diagonale et ${}^tM$ est diagonalisable

Correction Ex.–5 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A si et seulement si le noyau de $A - \lambda.I_2$ est non nul ssi (cas 2×2) le déterminant de cette matrice est nul.

Comme

$$\det(A - \lambda.I_2) = (4 - \lambda).(1 - \lambda) + 2 = 6 - 5\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 2).(\lambda - 3)$$

les valeurs propres de A sont les racines de ce trinôme, *i.e.*

$$\mathrm{Spec}A = \{2, 3\}$$

— Espace propre associé à 2. On résout $A.X = 2.X$, ce qui est équivalent, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, à la seule équation $2x - y = 0$.

L'espace propre associé à la v.p.2 est donc, en posant $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Ker}\,(A - 2.I_2) = \mathrm{Vect}\,\langle u_1 \rangle$$

— Espace propre associé à 3. On résout $A.X = 3.X$, ce qui est équivalent, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, à la seule équation $x - y = 0$.

L'espace propre associé à la v.p.3 est donc, en posant $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Ker}\,(A - 3.I_2) = \mathrm{Vect}\,\langle u_2 \rangle$$

2. Comme la matrice A est d'ordre 2 (de taille 2×2 !) est a 2 v.p., elle est diagonalisable [1].

Plus précisément, la famille (u_1,u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, car comporte 2 vecteurs et est libre (regarder le déterminant de cette famille). Il existe donc une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A et A est diagonalisable.

3. En prenant pour P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathscr{U}=(u_1,u_2)$ de $\mathbb{R}^2$, *i.e.*

$$P=(u_1|u_2)=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix},$$

on obtient une matrice inversible telle que

$$A.P=P.D=P.\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$$

i.e.

$$P^{-1}.A.P=D=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}.$$

La matrice P est de déterminant -1 et donc

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$$

4. Par récurrence [2], on a

$$\forall n\in\mathbb{N}, A^n=P.D^n.P^{-1}=P.\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}.P^{-1}$$

On peut donc, avant de mener le calcul, voir que les entrées de A^n sont des CL des suites géométriques (2^n) et (3^n). On peut poser le calcul de ce triple produit matriciel pour obtenir les formules exactes, on peut aussi, c'est une *suggestion de présentation*, comme on dit dans les livres de cuisine, décomposer le calcul comme suit : posons

$$D_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\text{ et }D_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

De sorte que

$$\forall n\in\mathbb{N}, D^n=2^n.D_1+3^n.D_2\text{ et }A^n=2^n.P.D_1.P^{-1}+3^n.P.D_2.P^{-1}=2^n.A_1+3^n.A_2$$

On peut calculer les deux triples produits (indépendants de n) à la machine (ou ici poser le calcul à la main) pour obtenir :

$$A_1=\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix}\text{ et }A_2=\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}$$

et finalement

$$\forall n\in\mathbb{N}, A^n=\begin{pmatrix}-2^n+2.3^n&2^n-3^n\\-2.2^n+2.3^n&2.2^n-3^n\end{pmatrix}$$

Une petite vérification ne peut pas faire de mal, le membre de droite de cette formule vaut

$$(n=0)I_2,\ (n=1)\begin{pmatrix}4&-1\\2&1\end{pmatrix}=A$$

Le code Python pour faire ces calculs (en console) est

Listing 1 – python/codecalcul.py

```
import numpy as np
P = np.array([[1,1],[2,1]])
P1 = np.linalg.inv(P)
D1 = np.diag([1,0])
D2 = np.diag([0,1])
A1  = np.dot(np.dot(P,D1),P1)
A2  = np.dot(np.dot(P,D2),P1)
A=np.array([[4,-1],[2,1]])
2*A1+3*A2-A
A1+A2
```

L'inérêt de cette présenation réside dans le fait de pouvoir faire faire les calculs à la machine afin d'obtenir la forme générale, en fonction de n, de la matrice A^n. Le tout est de trouver le moyen de calculer les coefficients des combinaisons linéaires.

1. Au stade du cours où est posé cet exercice, on ne dispose pas encore de cet argument rapide
2. à faire *absolument* au moins une bonne fois dans une épreuve d'écrit portant sur ce sujet

Correction Ex.–6 Soit
$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}$$
Tout d'abord, on peut remarquer que A est diagonalisable car elle est symétrique réelle. Au delà de cet argument qualitatif, on engage la recherche de valeurs propres.

Soit $\lambda\in\mathbb{C}$, par le pivot de GAUSS, les matrices suivantes ont toutes même rang

$$A-\lambda.I_3 \quad \overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix}1&1-\lambda&2\\3-\lambda&1&0\\0&2&3-\lambda\end{pmatrix}$$
$$\overset{L_2\leftarrow L_2-(3-\lambda)L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&1-\lambda&2\\0&1-(3-\lambda)(1-\lambda)&-2.(3-\lambda)\\0&2&3-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1-\lambda&2\\0&-2+4\lambda-\lambda^2&-2.(3-\lambda)\\0&2&3-\lambda\end{pmatrix}$$
$$\overset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&1-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\\0&-2+4\lambda-\lambda^2&-2.(3-\lambda)\end{pmatrix}$$
$$\overset{L_3\leftarrow 2.L_3-(-2+4\lambda-\lambda^2)L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&1-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\\0&0&(-4-(-2+4\lambda-\lambda^2)).(3-\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\\0&0&(-2-4\lambda+\lambda^2).(3-\lambda)\end{pmatrix}$$

La matrice $A-\lambda.I_3$ est de rang ≤ 2 (non inversible) si et seulement si $-2(-1+4\lambda-\lambda^2).(3-\lambda)=0$ ssi
$$\lambda\in\{3,2+\sqrt{6},2-\sqrt{6}\}$$
Le spectre (réel) de A est donc $\{3,2+\sqrt{6},2-\sqrt{6}\}$, il comporte 3 éléments (distincts !) et comme A est d'ordre 3 (de taille 3×3), A est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$).

Correction Ex.–7 Faisons d'abord le travail de recherche de valeurs propres sur A. $\lambda\in\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ si on veut diagonaliser sur $\mathbb{C}$) est valeur propre de A si et seulement si l'équation $A.X=\lambda.X$ d'inconnue $X\in\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{C}^3$) admet au moins une solution non nulle, *i.e.* ssi la matrice $A-\lambda.I_3$ est de rang <3.

Soit $\lambda\in\mathbb{C}$, les matrices suivantes, par l'algorithme du pivot de GAUSS ont même rang

$$A-\lambda.I_3=\begin{pmatrix}2-\lambda&-2&1\\2&-3-\lambda&2\\-1&2&-\lambda\end{pmatrix} \quad \overset{L_1\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix}-1&2&-\lambda\\2&-3-\lambda&2\\2-\lambda&-2&1\end{pmatrix}$$
$$\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1\\ L_3\leftarrow L_3+(2-\lambda)L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}-1&2&-\lambda\\0&1-\lambda&2(1-\lambda)\\0&-2+2(2-\lambda)&1-\lambda(2-\lambda)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&2&-\lambda\\0&1-\lambda&2(1-\lambda)\\0&2(1-\lambda)&(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice est 1 plus le rang de la matrice 2×2 $\begin{pmatrix}1-\lambda&2(1-\lambda)\\2(1-\lambda)&(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$ Le rang de $A-\lambda.I_3$ est <3 ssi le rang de cette matrice est <2, *i.e.* ssi son déterminant est nul. Son déterminant vaut
$$\Delta(\lambda)=(1-\lambda)(\lambda-1)^2-4(1-\lambda)^2=-(3+\lambda).(\lambda-1)^2$$
Ce déterminant est nul si et seulement si $\lambda=-3$ ou $\lambda=1$. -3 et 1 sont donc les valeurs propres de A et $\{-3,1\}$ est le spectre de A.

Cherchons l'epace propre associé à chacune des valeurs propres trouvées.

— Pour $\lambda=-3$. Résolvons l'équation $A.X=-3.X$ d'inconnue $X\in\mathbb{R}^3$. Ce système homogène a pour matrice $A=A-(-3).I_3$ et on peut reprendre les opérations de pivot de GAUSS là où nous les avions laissées. L'équation $A.X=-3.X$ est équivalente au système homogène de matrice
$$\begin{pmatrix}-1&2&-\lambda\\0&1-\lambda&2(1-\lambda)\\0&2(1-\lambda)&(\lambda-1)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&3\\0&4&8\\0&8&16\end{pmatrix}$$
et donc l'équation $A.X=-3.X$ est équivalente au système (les deux dernières équations issues de la matrice sont proportionnelles)
$$\begin{cases}-x_1+2x_2+3x_3&=&0\\ x_2+2x_3&=&0\end{cases}$$

i.e. ssi (on prend x_3 comme variable secondaire) il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_1 = -\alpha, x_2 = -2\alpha, x_3 = \alpha$$

On donc $E_{-3} = \operatorname{Ker} A + 3I_3 = \operatorname{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Le vecteur

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est vecteur propre de A associé à la valeur propre -3

—

— Pour $\lambda = 1$. Résolvons l'équation $A.X = X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$. Ce système homogène a pour matrice $A = A - I_3$ et on peut reprendre les opérations de pivot de GAUSS là où nous les avions laissées. L'équation $A.X = X$ est équivalente au système homogène de matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2(1-\lambda) \\ 0 & 2(1-\lambda) & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc l'équation $A.X = X$ est équivalente au système (on oublie les lignes nulles)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

i.e. ssi (on prend x_2 et x_3 comme variables secondaires) il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_1 = 2\alpha - \beta, x_2 = \alpha, x_3 = \beta$$

On donc $E_1 = \operatorname{Ker} A - I_3 = \operatorname{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. La famille de vecteurs (u_2, u_3) est une base de E_1, qui est de dimension 2 avec

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $\dim E_{-3} + \dim E_1 = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et donc A est diagonalisable. En posant

$$P = (u_1|u_2|u_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a P inversible (c'est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres de A, $\mathscr{U} = (u_1, u_2, u_3)$ et

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = P.D^n.P^{-1} = P. \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .P^{-1}$$

En calculant P^{-1} et en effectuant le produit décrit ci-dessus, on trouve la formule exacte pour A^n e fonction de n.

On peut faire le même type de travail concernant la matrice $B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Les matrices suivantes ont même rang que la matrice $B - \lambda.I_3$

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda & 10 & 10 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 8-\lambda & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (8-\lambda)L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & +\lambda \\ 0 & 10 & 10 + \lambda(8-\lambda) \end{pmatrix}$$

En échangeant les deux dernières lignes on pourrait faire une étape de pivot de GAUSS supplémentaire, on préfère faire comme avant.

Le déterminant de la matrice 2×2, en bas à droite est

$$\Delta(\lambda) = -\lambda.((10+\lambda(8-\lambda)+10) = \lambda.(\lambda^2-8\lambda-20) = \lambda(\lambda-10)(\lambda+2)$$

$B-\lambda.I_3$ est de rang <3 si et seulement si $\Delta(\lambda)=0$ et donc les valeurs propres de B sont 0, -2 et 10.

Les trois valeurs propres sont distinctes et donc, avant même de calculer les espaces propres, nous savons que B est diagonalisable et que ses espaces propres sont de dimension 1.

On laisse les calculs restants au lecteur.

Correction Ex.–10 Soit a,b,c des nombres réels tous strictement positifs. On pose

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si la matrice M l'est et dorénavant, nous ne parlerons que de cette matrice.

Evidemment, un béotien dirait : « Mais cette matrice est déjà diagonale ! », évidement, le connaisseur sait que seule la diagonale *principale* de la matrice compte !

Un nombre $\lambda\in\mathbb{C}$ est v.p.de M si et seulement si la matrice $M-\lambda.I_4$ n'est pas inversible.

Par l'algorithme de GAUSS, les matrices suivantes ont même rang (ce qui permettra de déterminer à quelle condition sur λ la matrice $M-\lambda.I_4$ n'est pas inversible)

$$\begin{aligned} M-\lambda.I_4 \quad & \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_4} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & b & 0 \\ 0 & c & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{L_4\leftarrow L_4+\lambda.L_1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & b & 0 \\ 0 & c & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-\lambda^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On voit donc que, du fait du 1 en haut à gauche, le rang de $A-\lambda.I_4$ est 1 + celui de la matrice 3×3 :

$$B_\lambda := \begin{pmatrix} -\lambda & b & 0 \\ c & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Du fait de la structure de cette matrice, $A-\lambda.I_4$ est de rang <4 si et seulement si B n'est pas inversible, *i.e.* $a-\lambda^2=0$ ou $\det(\begin{pmatrix} -\lambda & b \\ c & -\lambda \end{pmatrix})=0$. *in fine* , λ est v.p.de M si et seulement si $a-\lambda^2=0$ ou $bc-\lambda^2=0$. Le spectre de M ets donc

$$\mathrm{Spec}(M) = \{+\sqrt{a}, -\sqrt{a}, +\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}\}$$

Les nombres a, b et c étant tous >0, ce spectre comporte 4 éléments distincts si $a\neq bc$ auquel cas la matrice M (d'ordre 4) est diagonalisable. Le cas $a=bc$ est singulier en ceci que le spectre de M est réduit à deux éléments

$$\mathrm{Spec}(M) = \{+\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$$

Pour conclure à la diagonalisibilité de M dans ce cas, déterminons les dimensions des espaces propres. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $M.X=\sqrt{a}.X$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} a.t & = & \sqrt{a}.x \\ b.z & = & \sqrt{a}.y \\ c.y & = & \sqrt{a}.z \\ x & = & \sqrt{a}.t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c.b.z & = & \sqrt{a}.c.y = a.z \\ c.y & = & \sqrt{a}.z \\ x & = & \sqrt{a}.t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c.y & = & \sqrt{a}.z \\ x & = & \sqrt{a}.t \end{array}\right.$$

Ce système est clairement de rang 2, la dimension de l'espace propre associé est donc de 2 (thm du rang). Le même calcul est valable pour la valeur propre $-\sqrt{a}$ et donc, au total, la somme des dimensions des espaces propres vaut 4 et la matrice M est diagonalisable.

Correction Ex.–11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = {}^tM.M$.
1. On a

$$^tS = {}^tM.{}^{tt}M = {}^tM.M = S$$

La matrice S est donc symétrique réelle, elle est diagonalisable.
2.a. Soit λ une valeur propre de S associée au vecteur propre X de S. De $\lambda.X = S.X$, il vient

$$\begin{aligned}\lambda\langle X,X\rangle &= \langle S.X,X\rangle = \left\langle {}^tM.M.X,X\right\rangle = \left\langle X,{}^tM.M.X\right\rangle \\ &= {}^tX.{}^tM.M.X = {}^tM.X.M.X \\ &= \langle M.X,M.X\rangle\end{aligned}$$

On a donc

$$\lambda.\|X\|^2 = \|M.X\|^2$$

et comme $\|X\|^2 > 0$ (car $X \neq 0$),

$$\lambda = \frac{\|M.X\|^2}{\|X\|^2} \in [0,+\infty[.$$

2.b.

1. On a $S = {}^tM.M$. Si $X \in \operatorname{Ker}(M)$ alors $M.X = 0$ et donc $S.X = {}^tM.M.X = 0$ et donc $X \in \operatorname{Ker}(S)$:

$$\operatorname{Ker} M \subset \operatorname{Ker} S$$

2. Réciproquement, si $X \in \operatorname{Ker}(S)$, $S.X = 0.X$ et donc, par le calcul précédent avec $\lambda = 0$, on obtient $\|M.X\|^2 = 0$ et donc $M.X = 0$ *i.e.* $X \in \operatorname{Ker}(M)$ et donc :

$$\operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} M$$

Finalement $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} S$.
La matrice carrée M est inversible ssi son noyau est nul ssi le noyau de S est nul ssi S est inversible.
2.c.

1. Si $Y \in \operatorname{Im}(S)$ alors il existe X tel que $Y = S.X = {}^tM.(M.X)$ et donc $Y \in\in \operatorname{Im}({}^tM)$ et

$$\operatorname{Im}(S) \subset \operatorname{Im}({}^tM)$$

2. Maintenant la dimension de l'image de S, le rang de S est, par le théorème du rang, puis par la question précédente, puis par le théorème du rang

$$\operatorname{rg}(S) = n - \dim\operatorname{Ker}(S) = n - \dim\operatorname{Ker}(M) = \operatorname{rg}(M)$$

Comme M et sa transposée ont mêmes rangs, on a alors

$$\dim\operatorname{Im}(S) = \operatorname{rg}(S) = \operatorname{rg}({}^tM) =\sim \operatorname{Im}({}^tM)$$

3. On est en présence de deux sev de même dimension l'un étant inclus dans l'autre : ils sont égaux !

3. On suppose que M vérifie ${}^tM.M = M.{}^tM$.
3.a. Par la question préécedente sur les noyaux, comme

$$S = {}^tM.M \text{ et } S = {}^{tt}M.{}^tM$$

On a $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker}{}^tM = \operatorname{Ker} S$.
3.b. Soit λ une valeur propre réelle de M.
Posons $M' = M - \lambda.I_n$. On a ${}^tM' = {}^tM - \lambda.I_n$ et

$${}^tM'.M' = {}^t(M-\lambda.I_n).(M-\lambda.I_n) = {}^tM.M - \lambda.{}^tM - \lambda.M + \lambda^2.I_n = M.{}^tM - \lambda.{}^tM - \lambda.M + \lambda^2.I_nM'.{}^tM'$$

De la question précédente, on déduit que

$$\operatorname{Ker}(M - \lambda.I_n) = \operatorname{Ker}({}^tM - \lambda.I_n)$$

et donc les sous-espaces propres de ${}^tM$ et M associés à λ sont égaux.
Soit X un vecteur propre de M (et donc de ${}^tM$) associé à λ).
On a ($M.X = \lambda.X$ puis ${}^tM.X = \lambda.X$) ;

$$S.X = {}^tM.M.X = \lambda.{}^tM.X = \lambda^2.X$$

et donc λ^2 est une valeur propre de S.

Correction Ex.–12 Soit
$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

1. On a (calcul)
$$A^2=3.A$$
et donc par une récurrence assez immédiate
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, A^n=3^n.A.$$
2. La somme des trois colonnes de A vaut 0, A n'est donc pas inversible et 0 est v.p.de A. On $A.(A-3I_3)=0$ et si $A-3I_3$ était inversible, on aurait $A=0$, ce qui est faux. 3 est donc v.p.de A et $\{0,3\}\subset\mathrm{Spec}(A)$.
3. Réciproquement si λ est valeur propre de A, il existe X non nul tel que $A.X=\lambda.X$ et donc
$$0=(A^2-3.A).X=(\lambda^2-3\lambda).X$$
et donc $\lambda=0$ ou 3. $\{0,3\}=\mathrm{Spec}(A)$.
4. (a) $X=\mathrm{Vect}\langle xyz\rangle\in E_0=\mathrm{Ker}\,A$ si et seulement si $-x+2y-z=0$ et $-x-y+2z=0$ et donc
$$E_0=\mathrm{Vect}\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$
(b) $X=\mathrm{Vect}\langle xyz\rangle\in E_3=\mathrm{Ker}\,A$ si et seulement si $x+y+z=0$ et donc
$$E_3=\mathrm{Vect}\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$
La matrice $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ diagonalise A au sens où
$$p^{-1}.A.P=\mathrm{diag}(0,3,3)$$