

# Notes de cours 06

## Diagonalisation

### Table des matières

<b>1 Introduction-Exemples</b>	<b>1</b>
1.1 Mise sous forme diagonale . . . . .	1
1.2 Puissances de matrice . . . . .	2
<b>2 Vecteurs propres, valeurs propres</b>	<b>3</b>
2.1 Définition . . . . .	3
2.2 Caractérisation . . . . .	4
2.3 Exemple . . . . .	5
2.4 Endomorphismes et matrices diagonalisables . . . . .	7
<b>3 Critères de diagonalisabilité</b>	<b>8</b>
3.1 Sous-espaces propres . . . . .	8
3.2 Une condition suffisante, une CNS . . . . .	9
3.3 Matrices symétriques réelles . . . . .	14
3.4 La technique du polynôme annulateur . . . . .	15
3.5 Traitement numérique . . . . .	17
3.6 Des exercices plus avancés . . . . .	17

## 1 Introduction-Exemples

### 1.1 Mise sous forme diagonale

Les matrices carrées diagonales, de taille fixée  $n \times n$ , ont des propriétés calculatoires très intéressantes. Les exemples les plus marquants sont ceux de la mise à la puissance ou de l'inversion. Soit

$$D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \delta_n \end{pmatrix}$$

où  $\delta_1, \dots, \delta_n$  sont des scalaires (dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )

Dans ce cas, si  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$D^k = \begin{pmatrix} \delta_1^k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2^k & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \delta_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \delta_n^k \end{pmatrix}$$

Si  $P \in \mathbb{K}[X]$ , on a

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\delta_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P(\delta_2) & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & P(\delta_{n-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P(\delta_n) \end{pmatrix}$$

Et finalement,  $D$  est inversible ssi les scalaires  $\delta_1, \dots, \delta_n$  sont tous non nuls et on a

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_1^{-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2^{-1} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \delta_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \delta_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Si  $f$  est un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ , disposer d'une matrice  $M$  (relativement à une base  $\mathcal{E}$  de  $E$ ) de  $f$  ayant cette forme *diagonale* est *désirable* car beaucoup de choses se simplifient. Par exemple, la matrice de  $f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}$  relativement à la base  $\mathcal{E}$  est  $M^p$ , qui, on l'a vu, est elle aussi diagonale.

## 1.2 Puissances de matrice

Rappelons quelques domaines où le calcul d'une puissance de matrice est essentiel.

Imaginons la situation suivante : trois individus A, B et C sont dans un système d'échange : A chaque tour de jeu, A donne à B et C un certain pourcentage de son pécule ( $p_{AB}$  et  $p_{AC}$ ) et garde le reste ( $p_{AA}$ ) pour lui. B et C font de même. Si à l'étape  $n$ , on appelle  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  les péculs respectifs de A, B et C, alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= p_{AA}a_n + p_{BA}b_n + p_{CA}c_n \\ b_{n+1} &= p_{AB}a_n + p_{BB}b_n + p_{CB}c_n \\ c_{n+1} &= p_{AC}a_n + p_{BC}b_n + p_{CC}c_n \end{aligned}$$

Ce qui s'exprime simplement sous forme matricielle

$$U_{n+1} = P.U_n$$

où on a posé

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} p_{AA} & p_{BA} & p_{CA} \\ p_{AB} & p_{BB} & p_{CB} \\ p_{AC} & p_{BC} & p_{CC} \end{pmatrix}$$

La récurrence des suites géométriques donne alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = P^n \cdot U_0$

Si maintenant, en changeant de base, via une matrice de passage *diagonalisant*  $P$ ,  $P = Q^{-1} \cdot D \cdot Q$ , on a, en posant  $V_n = Q \cdot U_n$  que

$$V_{n+1} = D \cdot V_n = D^n \cdot V_0$$

Le calcul direct de  $U_n$  en fonction de  $n$  est donc possible.

Une variante de l'exemple précédent se retrouve en théorie des probabilités : il s'agit des chaînes de MARKOV que nous avons déjà rencontrées.

Finalement, les puissances de matrices apparaissent naturellement dans l'étude des suites récurrentes et (via le schéma d'EULER) dans la résolution numérique d'équations différentielles.

Supposons  $u$  déterminée par  $u_0$ ,  $u_1$  et la relation de récurrence  $u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n$ , on a alors, en posant

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$$

que  $U_{n+1} = M \cdot U_n$  et donc  $U_n = M^n \cdot U_0$ .

## 2 Vecteurs propres, valeurs propres

### 2.1 Définition

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Si  $E$  est de dimension finie et si l'on veut qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  prenne une forme diagonale, cela signifie que si  $v$  est l'un des vecteurs de cette base alors

1.  $v$  est non nul.
2. Il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(v) = \lambda \cdot v$

**Définition 1.** Un vecteur  $v \in E$ , non nul tel que  $f(v)$  est colinéaire à  $v$  est appelé un vecteur propre ( $\overrightarrow{v.p.}$ ) de  $f$ . Le scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(v) = \lambda \cdot v$  est appelé la valeur propre ( $v.p.$ ) de  $f$  associée à  $v$ .

Cette définition est aussi valable hors du cadre de la dimension finie (nul besoin de matrices donc).

#### Exercice 1.—

1. On considère le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et l'endomorphisme  $D \in \mathcal{L}(E)$  de dérivation, *i.e.* défini par

$$\forall f \in E, D(f) = f'$$

Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de  $D$ . Pour chaque valeur propre de  $D$ , donner la dimension de  $\text{Ker}(D - \lambda \cdot i_E)$

2. On considère le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et l'endomorphisme  $D \in \mathcal{L}(E)$  de dérivation.

Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de  $D \circ D$ . Pour chaque valeur propre de  $D$ , donner la dimension de  $\text{Ker}(D - \lambda \cdot i_E)$

3. On considère le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et l'endomorphisme  $D \in \mathcal{L}(E)$  de décalage à droite, i.e. défini par

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, D(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de  $D$ . Pour chaque valeur propre de  $D$ , donner la dimension de  $\text{Ker}(D - \lambda.i_E)$

Pour la suite, nous nous limiterons aux cas de dimension finie, étroitement liés aux matrices.

**Définition 2.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Un vecteur  $v \in \mathbb{K}^n$ , non nul,  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dit que  $v$  est vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$  si

$$M.v = \lambda.v$$

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on dit que  $\lambda$  est valeur propre de  $f$  s'il existe  $v \in E$ ,  $v \neq 0$  tel que

$$f(v) = \lambda.v$$

Un tel vecteur  $v$  est appelé un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on dit que  $\lambda$  est valeur propre de  $M$  (sur  $\mathbb{K}$ ) s'il existe  $v \in \mathbb{K}^n$ ,  $v \neq 0$  tel que

$$M.v = \lambda.v$$

Un tel vecteur  $v$  est appelé un vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Définition 3.** L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme  $f$  ou d'une matrice  $M$  est appelé le spectre de  $f$  ou de  $M$ . Il est noté  $\text{Spec}(f)$  ou  $\text{Spec}(M)$ .

**Remarque 4.** Il y a, pour une matrice réelle  $M$ , une ambiguïté de définition du fait que si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On distingue dans ce cas spectre réel ( $\text{Spec}_{\mathbb{R}}(M)$ ) et spectre complexe ( $\text{Spec}_{\mathbb{C}}(M)$ ) de  $M$  :

- Un nombre réel  $\lambda$  est valeur propre réelle de  $M$  ( $\lambda \in \text{Spec}_{\mathbb{R}}(M)$ ) s'il existe  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$  tel que  $M.v = \lambda.v$ ;
- un nombre complexe  $\lambda$  est valeur propre complexe de  $M$  ( $\lambda \in \text{Spec}_{\mathbb{C}}(M)$ ) s'il existe  $v \in \mathbb{C}^n$ ,  $v \neq 0$  tel que  $M.v = \lambda.v$ .

Il doit être clair qu'une valeur propre réelle d'une matrice réelle est aussi une de ses valeurs propres complexes, i.e.  $\text{Spec}_{\mathbb{R}}(M) \subset \text{Spec}_{\mathbb{C}}(M)$ . Plus subtilement, en fait,  $\text{Spec}_{\mathbb{R}}(M) = \text{Spec}_{\mathbb{C}}(M) \cap \mathbb{R}$ .

## 2.2 Caractérisation

**Théorème 5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n \geq 1$ .  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , les assertions suivantes sont équivalentes

1.  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ ,
2.  $\dim \text{Ker}(f - \lambda.i_E) \geq 1$ ,
3.  $\text{rg}(f - \lambda.i_E) \leq n - 1$ ,
4.  $f - \lambda.i_E$  n'est pas bijective.

**Théorème 6.** Soit  $n \geq 1$ .  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , les assertions suivantes sont équivalentes

1.  $\lambda$  est valeur propre de  $M$ ,
2.  $\dim \text{Ker}(M - \lambda.I_n) \geq 1$ ,
3.  $\text{rg}(M - \lambda.I_n) \leq n - 1$ ,
4.  $M - \lambda.I_n$  n'est pas inversible.

**Exercice 2.**—Donner les valeurs propres de la matrice  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ne contenant que des 1.

**Exercice 3.**—Trouver les valeurs propres de la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .  $\dim(\text{Ker}(M - \lambda.I_3))$  ?.

### 2.3 Exemple

Considérons la matrice  $M$  intervenant dans le problème de la récurrence à deux termes, ( $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ )

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$$

et  $f$  l'endomorphisme  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  défini par  $f(x) = M.x$ .

$f$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^2$  dont la matrice relativement à la base canonique de  $\mathbb{C}^2$  est  $M$ .  $x = (x_1, x_2)$  est vecteur propre de  $f$  (ou de  $M$ ) si et seulement si

1.  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$
2. Il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $M.x = \lambda.x$  i.e

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda.x_1 \\ b.x_1 + a.x_2 &= \lambda.x_2 \end{aligned}$$

Pour que ce système admette une solution non nulle, il faut et il suffit que

$$b + a\lambda - \lambda^2 = 0$$

On retombe ainsi sur l'équation caractéristique de la récurrence.

Dans le cas présent, il y a au plus deux valeurs propres, les racines de ce trinôme.

#### Le cas de deux racines distinctes

Supposons que  $\lambda_+ \neq \lambda_-$  sont les deux racines de l'équation

$$b + a\lambda - \lambda^2 = 0$$

En prenant  $x_1 = 1$  dans chaque cas, on trouve alors deux vecteurs propres  $v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix}$  et  $v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix}$  associés respectivement à  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$ .

$\mathcal{V} = (v_+, v_-)$  est une base de  $\mathbb{C}^2$ . La matrice de  $f$  dans cette base est la matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$ . Si  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{V}$ , i.e la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $v_+$  et  $v_-$ , on a

$$D = P^{-1}.M.P \text{ et } M = P.D.P^{-1}$$

Il vient alors que pour tout entier  $n$ ,

$$U_n = P.D^n.P^{-1}.U_0$$

ce qui permet de retrouver le résultat bien connu que  $u_n = \alpha_+.\lambda_+^n + \alpha_-.\lambda_-^n$  pour certaines constantes  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$ .

### Le cas d'une racine double

Revenons à notre équation caractéristique  $b + a\lambda - \lambda^2 = 0$  et supposons que celle-ci admette une racine double  $\lambda$ , qui est donc la seule valeur propre possible de la matrice  $M$ . On a

$$b = -\frac{a^2}{4}, \lambda = \frac{a}{2}$$

Nous avons donc à notre disposition une famille de vecteurs propres, *tous colinéaires*,  $x = \lambda \cdot v$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , où  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ . Ce sont les *seuls* vecteurs propres de  $f$ . Il est donc impossible de trouver une base de vecteurs propres.

Dans ce cas, et nous ne poursuivrons pas dans cette voie en toute généralité, en posant  $v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a alors  $A \cdot v' = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = v + \lambda \cdot v'$  et donc, dans la base  $\mathcal{V} = (v, v')$ ,  $f$  a pour matrice

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On a, par la formule de NEWTON, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$M'^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n \cdot \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Après changement de base, cela explique qu'une suite vérifiant cette récurrence soient combinaison linéaire de  $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(n\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## 2.4 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Le moment de la synthèse est venu. L'exemple précédent montre que ce qui est désirable n'est pas toujours possible, cela mérite donc bien une définition.

**Définition 7.** 1. Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. On dit que  $f$  est diagonalisable s'il existe une base  $\mathcal{E}$  de  $E$  telle que la matrice de  $f$  relativement à cette base est diagonale<sup>1</sup>.

2. Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite diagonalisable (sur  $\mathbb{K}$ ) s'il existe une matrice inversible  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que<sup>2</sup>

$$D = P^{-1}.M.P$$

**Remarque 8.** 1.  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  ssi l'endomorphisme  $f_M$  de  $\mathbb{K}^n$ , défini par  $f_M(x) = M.x$  l'est.

2. Si  $f$  est diagonalisable, sa matrice dans une base qqconque de  $E$  l'est.

3. Si  $M$  et  $M'$  sont semblables, elles sont toutes deux diagonalisables ou ne le sont pas.

4. Une matrice réelle peut-être diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  sans l'être sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 4.**—(Résultat à retenir !) Montrer que les valeurs propres d'une matrice  $M$  sont aussi celles de sa transposée. Montrer que si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable alors sa transposée l'est aussi.

**Exercice 5.**—\*\*\*- Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ .

2.  $A$  est-elle diagonalisable ?

3. Si oui, construire  $P$  la matrice de passage telle que  $P^{-1}.A.P$  est diagonale et déterminer  $P^{-1}$ .

4. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $A^n$ .

**Exercice 6.**—\*\*\*- Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $A$  est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

**Exercice 7.**—

Diagonaliser les endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f$  et  $g$ , dont les matrices relativement à la base canonique sont  $A$  et  $B$ . (C'est-à-dire donner une base formée de vecteurs propres et les valeurs propres correspondantes).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer  $A^n$  et  $B^n$ .

**Exercice 8.**—\*\*\*- Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.  $\mathcal{E}$  est une base de diagonalisation de  $f$ .

2.  $P$  diagonalise  $M$ .

1. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$  et  $B$ . Montrer qu'elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage  $P$  que l'on précisera.

2. En déduire les valeurs propres de la matrice  $M(a,b) = \begin{pmatrix} b & -b & a \\ -b & b & -a \\ a & -a & 2b-a \end{pmatrix}$  où  $a, b$  sont deux réels quelconques.

### Y-a-t-il beaucoup de matrices diagonalisables ?

La situation sur  $\mathbb{R}$  est très différente de la situation sur  $\mathbb{C}$ .

1. Sur  $\mathbb{R}$ , il est très facile de construire beaucoup de matrices non diagonalisables sur  $\mathbb{R}$ , de toutes tailles : on peut reprendre l'exemple de la matrice de la suite récurrente avec  $a, b$  réels : si le trinôme n'a pas de racines réelles, la matrice n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Sur  $\mathbb{C}$ , c'est plus difficile (pour les matrices  $2 \times 2$ , il y a peu de chance qu'un trinôme n'ait qu'une racine double), mais possible comme l'exemple  $2 \times 2$  lié à la suite récurrente d'ordre 2 l'a montré.

### Le changement de base du côté pratique.

On peut voir le produit matriciel agissant par colonnes. Si  $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P = (P_1 | \dots | P_n)$  où  $P_1, \dots, P_n$  sont les colonnes de  $P$ . Alors  $Q.P = (Q.P_1 | \dots | Q.P_n)$ .

Appliquons une première fois cette remarque au cas où les vecteurs  $P_1, \dots, P_n$  forment une base de  $\mathbb{K}^n$ . Ceci équivaut à dire que la matrice  $P$  est inversible. La matrice  $P$  est la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{C}_n$  de  $\mathbb{K}^n$  à la base  $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n)$ .

On a  $P^{-1}.P = I_n$  et donc, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $P^{-1}.P_k = E_k$  où  $E_k$  est le  $k$ -ième vecteur de la base canonique.

Supposons maintenant que la matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  soit diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  : soit  $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n)$  une base de vecteur propres, chaque  $P_k$  étant associé à la valeur propre  $\lambda_k \in \mathbb{K}$  et soit  $P = (P_1 | \dots | P_k)$  la matrice de passage de  $\mathcal{C}_n$  à  $\mathcal{P}$ .

On a pour tout  $k$ ,  $M.P_k = \lambda_k.P_k$  et donc  $M.P = (\lambda_1.P_1 | \dots | \lambda_n.P_n)$ . Il vient que

$$P^{-1}.M.P = (\lambda_1.P^{-1}.P_1 | \dots | \lambda_n.P^{-1}.P_n) = (\lambda_1.E_1 | \dots | \lambda_n.E_n)$$

Ce qui est une matrice diagonale.

## 3 Critères de diagonalisabilité

### 3.1 Sous-espaces propres

**Définition 9.** 1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $f$ . Le sous-espace propre de  $f$  associé à  $\lambda$  est

$$E_\lambda := \text{Ker}(f - \lambda.i_E)$$

2. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $M$ . Le sous-espace propre de  $M$  associé à  $\lambda$  est

$$E_\lambda := \text{Ker}(M - \lambda.I_n) \subset \mathbb{K}^n$$

La dimension de  $E_\lambda$  s'appelle la *multiplicité* de  $\lambda$  en tant que valeur propre de  $f$  (ou  $M$ )

Remarques :



1. Pour tout scalaire  $\lambda$ , on peut définir  $E_\lambda := \text{Ker}(f - \lambda \cdot i_E)$ .  $\lambda$  est valeur propre de  $f$  ssi  $E_\lambda \neq \{0\}$ , i.e ssi il existe des vecteurs propres de  $f$  associés à  $\lambda$ .
2. Si  $f$  n'est pas injective, 0 est valeur propre de  $f$  et réciproquement

### Exemple 1

A quelle condition sur  $a \in \mathbb{R}$ , la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , sur  $\mathbb{C}$ ? Quels sont les espaces propres non triviaux?

Le point de départ est toujours le suivant :  $\lambda$  est valeur propre d'une telle matrice ssi l'équation  $A \cdot x = \lambda \cdot x$  admet une solution non nulle.

Cette équation est équivalente au système homogène de matrice  $\begin{pmatrix} 1 - \lambda & a \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$ . Un tel système admet une solution non triviale ssi les deux lignes sont colinéaires, ce qui, en termes de déterminant, se traduit par

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda) - a = 0, \text{ i.e. } \lambda^2 - 3\lambda + 2 - a = 0$$

Le fait que  $\lambda$  est v.p. de  $A$  force donc  $\lambda$  à être racine d'un trinôme. Il y a donc au plus deux valeurs propres.

Le discriminant de ce trinôme est  $\Delta = 9 - 4(2 - a) = 1 - 4a$ .

1. Si  $\Delta > 0$ , le trinôme admet deux racines réelles  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$  *distinctes* et le système, pour chacune de ces valeurs de  $\lambda$  admet au moins une solution  $v_+$ , pour  $\lambda = \lambda_+$ ,  $v_-$ , pour  $\lambda = \lambda_-$ .  
J'affirme, sans connaître mieux  $v_+$  et  $v_-$  que  $(v_+, v_-)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  (c.f. après).  $A$  est donc diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et *a fortiori* sur  $\mathbb{C}$ .
2. Si  $\Delta < 0$ , ce trinôme n'admet pas de racine réelle,  $M$  n'est donc pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Elle l'est sur  $\mathbb{C}$ .
3. Si  $\Delta = 0$ , i.e  $a = \frac{1}{4}$ , il n'y a qu'une v.p. possible,  $\lambda = \frac{3}{2}$ . Si  $A$  était diagonalisable, elle serait donc semblable à  $\frac{3}{2}I_2$ .

J'affirme donc que dans le cas d'une matrice  $2 \times 2$ , si  $v_+$  et  $v_-$  sont deux vecteurs propres associés à des v.p. *distinctes* alors  $(v_+, v_-)$  est une famille libre. En effet, supposons que  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  sont tels que  $\alpha_+ \cdot v_+ + \alpha_- \cdot v_- = 0$ , alors

$$\begin{aligned} \alpha_+ \cdot v_+ + \alpha_- \cdot v_- &= 0 \\ \alpha_+ \cdot \lambda_+ \cdot v_+ + \alpha_- \cdot \lambda_- \cdot v_- &= 0 \end{aligned}$$

En supposant que  $(\alpha_+, \alpha_-) \neq (0, 0)$  et en lisant de façon adhoc ces équations (prendre une composante particulière), on obtient que les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix}$  forment une famille liée dans  $\mathbb{C}^2$ , ce qui est faux, montre que  $(\alpha_+, \alpha_-) = (0, 0)$  et donne la conclusion cherchée.

## 3.2 Une condition suffisante, une CNS

### Liberté de familles de vecteurs propres

**Théorème 10.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ , une famille de valeurs propres distinctes de  $f$  associées aux vecteurs propres  $v_1, \dots, v_k$ . La famille  $(v_1, \dots, v_k)$  est libre dans  $E$ .

*Démonstration.* On donne deux démonstrations de ce résultat.

1. En effet, supposons que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^k$  sont tels que  $\sum_{\ell} \alpha_{\ell} \cdot v_{\ell} = 0$ . En appliquant  $f^j$  à cette égalité pour  $j = 1, \dots, k-1$ , on obtient que

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k = 0 \\ \alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot \lambda_k \cdot v_k = 0 \\ \vdots + \vdots + \vdots = 0 \\ \alpha_1 \cdot \lambda_1^{k-1} \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot \lambda_k^{k-1} \cdot v_k = 0 \end{cases}$$

Comme la matrice  $k \times k$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \dots & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

est inversible (pourquoi ?), on obtient (pourquoi ?) que

$$\alpha_1 \cdot v_1 = 0, \dots, \alpha_k \cdot v_k = 0$$

et finalement, comme les  $v_{\ell}$  sont non nuls,

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

2. Démonstration par récurrence sur  $k$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on définit la proposition

$(P_k)$  : Pour toute famille  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$  de scalaires distincts, pour toute famille  $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_k) \in E^k$ ,  $\forall 1 \leq i \leq k$ ,  $v_i \neq 0$  et  $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ ,  $\mathcal{V}$  est libre

(a) Pour  $k = 1$ . Soit  $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ ,  $v_1 \in E$  tel que  $f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$  et  $v_1 \neq 0$ .  $\mathcal{V} = (v_1)$  est clairement libre car composée d'un vecteur *non nul*.

(b) Supposons  $(P_k)$  vraie pour un certain entier  $k \geq 1$  et montrons qu'alors  $(P_{k+1})$  est vraie.

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{K}^{k+1}$  une famille de  $k+1$  scalaires distincts et  $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}) \in E^{k+1}$  une famille de vecteurs tels que  $\forall 1 \leq i \leq k+1$ ,  $v_i \neq 0$  et  $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ .

Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in \mathbb{K}^{k+1}$  tel que

$$(*) : \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k + \alpha_{k+1} \cdot v_{k+1} = 0$$

En appliquant  $f$  à cette égalité et en utilisant le fait que  $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ , on obtient

$$(**) : \alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot \lambda_k \cdot v_k + \alpha_{k+1} \cdot \lambda_{k+1} \cdot v_{k+1} = 0$$

En effectuant la combinaison linéaire  $(**) - \lambda_{k+1} (*)$ , on obtient alors

$$(***) : \alpha_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdot v_k = 0$$

Comme, par  $(P_k)$ , la famille  $(v_1, \dots, v_k)$  est libre, il vient

$$\alpha_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \dots = \alpha_k \cdot (\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

Maintenant  $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$  si  $1 \leq i \leq k$  et donc  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ .

En remplaçant dans  $(*)$ , on obtient aussi que  $\alpha_{k+1} \cdot v_{k+1} = 0$  et donc  $\alpha_{k+1} = 0$  car  $v_{k+1} \neq 0$ .

Finalement

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$$

et la famille  $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$  est libre.

La proposition  $(P_{k+1})$  est donc vraie.

Exercice : Enoncer la version matricielle du théorème précédent et démontrer que

**Théorème 11.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $M$  admet au plus  $n$  valeurs propres distinctes.

### Un critère de diagonalisabilité à retenir

**Proposition 12.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $M$  admet  $n$  valeurs propres distinctes,  $M$  est diagonalisable.

**Théorème 13.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on pose

$$E_\lambda = \text{Ker}(M - \lambda \cdot I_n) \subset \mathbb{K}^n$$

1. Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  est une<sup>3</sup> liste de valeurs propres distinctes de  $M$ ,  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k$  sont des bases de  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$  alors la famille obtenue par juxtaposition de ces bases est libre dans  $E$  et

$$\sum_{\ell=1}^k \dim(E_{\lambda_\ell}) \leq n$$

2.  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  étant la<sup>4</sup> liste de toutes les valeurs propres distinctes de  $M$ ,  $M$  est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\ell=1}^k \dim E_{\lambda_\ell} = n$$

**Remarque 14.** Le dernier point peut s'affaiblir en : Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  sont deux à deux distincts<sup>5</sup> et si

$$\sum_{\ell=1}^k \dim E_{\lambda_\ell} \geq n$$

alors  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  et  $\text{Spec}_{\mathbb{K}}(M) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ .

### Exemple 2 : Matrices triangulaires

**Exercice 9.**—Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

alors  $M$  est diagonalisable.

En tirer un principe général pour les matrices triangulaires. Attention ! La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable. En effet, elle n'a qu'une valeur propre 2 et si elle était diagonalisable, elle serait semblable à  $2I_2$  et donc serait égale à  $2I_2$ , ce qui n'est pas le cas.

3.  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \text{Spec}_{\mathbb{K}}(M)$

4.  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} = \text{Spec}_{\mathbb{K}}(M)$

5. Sans être forcément valeurs propres de  $f$

**Exercice 10.—**

Soit  $a, b, c$  des nombres réels tous strictement positifs et soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  de matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f$  est-il diagonalisable ?

**Exemple 3**

On reprend le cas d'un système d'échanges : on suppose que

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

La question est la suivante. Si  $U_0 = (a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3$  est donné avec  $a_0 + b_0 + c_0 = 100$ , en définissant la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n, b_n, c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , par récurrence par  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = P.U_n$ , alors les trois suites  $(a_n), (b_n), (c_n)$  convergent respectivement vers  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .

Montrer que  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est vecteur propre de  $P$  associé à la v.p. 1. Pourquoi 1 est-elle v.p. ? Commentaires ? (Les v.p sont  $1, \frac{4 \pm \sqrt{2}}{10}$ .)

**Exemple 4****Suites récurrentes et Equations différentielles linéaires**

Soit  $a, b, c \in \mathbb{K}$ . On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$  définie par  $u_0 \in \mathbb{K}$  et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = a.u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n$$

En posant  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ . On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = M.U_n \text{ où } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Cherchons les v.p de cette matrice en calculant le rang de la matrice du système linéaire issu de la recherche d'un vecteur propre.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ c & b & a - \lambda \end{pmatrix}$$

Modulo échange de colonnes, le rang cherché est égal au rang de, successivement,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & 0 \\ b & a - \lambda & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & a - \lambda & c + \lambda.b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & c + \lambda.b + \lambda^2(a - \lambda) \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas de rang maximal ssi  $c + \lambda.b + \lambda^2.a - \lambda^3 = 0$  et donc  $\lambda$  est v.p. de  $M$  ssi  $\lambda^3 = a.\lambda^2 + b.\lambda + c$ . On reconnaît là le *polynôme caractéristique* de la récurrence.

Si  $\lambda$  est racine de ce polynôme, l'espace propre associé est de dimension 1, il est engendré par  $u_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2)$ .

On en déduit que si le polynôme caractéristique de la récurrence admet trois racines distinctes  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  alors  $M$  est diagonalisable. En posant  $P$  la matrice dont les colonnes sont  $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, u_{\lambda_3}$ , i.e

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

$P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{K}^3$  à la base  $\mathcal{U} = (u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, u_{\lambda_3})$  et on a

$$M = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$M^n = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

On en déduit l'existence de constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = \alpha_1.\lambda_1^n + \alpha_2.\lambda_2^n + \alpha_3.\lambda_3^n$$

Résolvons maintenant l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 3, d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ ,

$$y^{(3)} = a.y'' + b.y' + c.y$$

En posant  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ , on obtient une EDO vectorielle

$$Y' = M.Y$$

Posons alors  $Z = P^{-1}.Y$ , on a

$$Z' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot Z$$

La composante  $z_k$  de  $Z$  vérifie l'équation différentielle  $z_k' = \lambda_k.z_k$  et donc il existe une constante  $C_k$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, z_k(t) = C_k e^{\lambda_k.t}$$

En réécrivant, on obtient l'existence de constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$  telles que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$y(t) = \alpha_1.e^{\lambda_1.t} + \alpha_2.e^{\lambda_2.t} + \alpha_3.e^{\lambda_3.t}$$

### 3.3 Matrices symétriques réelles

On admet le théorème suivant ( *c.f.* Cours sur  $\mathbb{R}^n$  Euclidien) :

**Théorème 15.** *Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est symétrique, elle est diagonalisable. On peut choisir la matrice de passage  $P$  de sorte que  $P^{-1} = {}^tP$ .*

Remarquer que si  $P = (P_1 | \dots | P_n)$  cela signifie que

$$\forall k, \ell = 1, \dots, n, {}^tP_k \cdot P_\ell = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ 1 & \text{si } k = \ell \end{cases}$$

*i.e.* la famille des colonnes forme une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Exemple 5

On considère un couple  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  de variables aléatoires réelles. Sa matrice de variance-covariance est la matrice

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X) &= \begin{pmatrix} \text{Cov}(X_1, X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Cov}(X_2, X_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{E}(X \cdot {}^tX) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}({}^tX) \end{aligned}$$

Cette matrice est symétrique réelle, elle est diagonalisable.

Il existe donc une matrice de passage  $P$  telle que  $P^{-1} = {}^tP$  et

$$P \cdot \text{Cov}(X) \cdot {}^tP = D$$

où  $D$  est diagonale. Alors, le vecteur aléatoire  $Y = P \cdot X$  est tel que ses composantes sont décorréélées.

**Exercice 11.— Des matrices réelles automatiquement symétriques** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $S = {}^tM \cdot M$ .

1. Montrer que  $S$  est diagonalisable.

2. Pour deux vecteurs  $X = (x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^n$ , vus sous forme de matrices colonne, on pose

$$\langle X, Y \rangle = {}^tX \cdot Y \text{ et } \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

2.a. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $S$  associée au vecteur propre  $X$  de  $S$ . Montrer que

$$\lambda \langle X, X \rangle = \langle M \cdot X, M \cdot X \rangle$$

et en déduire que  $\lambda \in [0, +\infty[$ .

2.b. Montrer<sup>6</sup> que  $\text{Ker } M = \text{Ker } S$ . En déduire que  $M$  est inversible si et seulement si  $S$  l'est.

2.c. Montrer<sup>7</sup> que  $\text{Im } S = \text{Im } {}^tM$

6. On traitera les deux inclusions séparément, l'une étant triviale.

7. On traitera les deux inclusions séparément, l'une étant triviale, l'autre basée sur un argument de dimension.

3. On suppose que  $M$  vérifie  ${}^t M \cdot M = M \cdot {}^t M$ .

3.a. Montrer que  $\text{Ker } M = \text{Ker } {}^t M = \text{Ker } S$ .

3.b. Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $M$  montrer<sup>8</sup> que

$$\text{Ker}(M - \lambda \cdot I_n) = \text{Ker}({}^t M - \lambda \cdot I_n)$$

et que  $\lambda^2$  est une valeur propre de  $S$ .

### 3.4 La technique du polynôme annulateur

Commençons par une remarque préliminaire :

Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$ , avec pour spectre  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  et si  $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_k)$  alors  $P(M) = 0$ .

Une technique de détermination des valeurs propres que l'on retrouve dans de \*très\* nombreux exercices est la suivante.

On considère une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et on trouve un polynôme  $P = p_0 + p_1 X + \dots + p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ , *non nul* tel que

$$P(M) := p_0 \cdot I_n + p_1 \cdot M + \dots + p_k \cdot M^k = 0$$

Un tel polynôme existe toujours et peut se déterminer en résolvant un système linéaire. Pourquoi ? Considérer la famille  $(I_n, M, M^2, \dots, M^{n^2})$ , *obligatoirement* liée dans l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de dimension  $n^2$ .

**Proposition 16.** Si  $P(M) = 0$  et si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est v.p. de  $M$  alors  $P(\lambda) = 0$ .

En résumé, les valeurs propres de  $M$  sont à rechercher parmi les racines de  $P$ .

**Exercice 12.-\*-** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une unique suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  que l'on déterminera telle que pour tout  $n \geq 1$  on ait :  $A^n = u_n A$ .
2. Etudier l'inversibilité de  $A$  et celle de  $A - 3I_3$ , en déduire que  $\{0, 3\} \subset \text{Spec}(A)$ .
3. Réciproquement si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , montrer que  $\lambda = 0$  ou  $3$ .
4. Diagonaliser  $A$ .

**Exercice 13.-\*- Polynôme annulateur** Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$  telle que  $P(M) = 0$ .

1. Déterminer les racines de  $P$  (il y en a d'évidentes !) et donner des exemples de matrices diagonales  $M$  vérifiant l'hypothèse.

2. Montrer que  $M$  est inversible et montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $M$  alors  $P(\lambda) = 0$ . Quelles sont les valeurs possibles pour  $\lambda$  ?

3.

3.a. Vérifier que  $(M - I_3) \cdot (M - 2I_3) \cdot (M + I_3) = 0$

3.b. Montrer qu'au moins l'une des trois matrices dans le produit précédent n'est pas inversible et en déduire qu'au moins l'un des nombres  $+1$ ,  $-1$  ou  $2$  est effectivement valeur propre de  $M$ .

8. En vérifiant que  $M' = M - \lambda \cdot I_n$  vérifie  ${}^t M' \cdot M' = M' \cdot {}^t M'$

4. On suppose que **tous** ces nombres sont valeurs propres de  $M$ .  $M$  est-elle diagonalisable ? Traiter le cas de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. On suppose qu'un seul de ces nombres  $\lambda_0$  est valeur propre de  $M$ . Que vaut  $M$  ?

6. On suppose que  $-1$  et  $+1$  sont valeurs propres de  $M$  mais que  $2$  ne l'est pas.

6.a. Montrer que  $(M - I_3).(M + I_3) = 0$ .

6.b. Montrer que  $\text{Im}(M + I_3) \subset \text{Ker}(M - I_3)$  et  $\text{Im}(M - I_3) \subset \text{Ker}(M + I_3)$ .

6.c. En utilisant le théorème du rang montrer que les seules possibilités sont

$$(\dim \text{Ker}(M - I_3) = 1 \text{ et } \dim \text{Ker}(M + I_3) = 2) \text{ ou } (\dim \text{Ker}(M - I_3) = 2 \text{ et } \dim \text{Ker}(M + I_3) = 1)$$

$M$  est-elle diagonalisable ?

#### Exercice 14.—

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^3$  tel que  $u^2 \neq 0$  et  $u^3 = 0$ . Montrer qu'il existe une base  $B$  de  $E$  tel que la matrice de  $u$  dans cette base s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$u$  est-il diagonalisable ?

#### Un exemple

Soit

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que  $P(M) := M^n - (a_{n-1}M^{n-1} + \dots + a_0.I_n) = 0$ .

On a, pour  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ ,

$$\begin{aligned} M.e_1 &= e_2, M.e_2 = e_3, \dots, M.e_{n-1} = e_n \\ M.e_n &= a_0.e_1 + \dots + a_{n-1}e_n \end{aligned}$$

On a donc, pour  $1 \leq \ell \leq n$ ,  $M^{\ell-1}.e_1 = e_\ell$  et pour  $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} M^n.e_1 &= (a_0.I_n + \dots + a_{n-1}.M^{n-1}).e_1 \\ M^n.e_k &= M^{k-1}.M^n.e_1 = M^{k-1}.(a_0.I_n + \dots + a_{n-1}.M^{n-1}).e_1 \\ &= (a_0.I_n + \dots + a_{n-1}.M^{n-1}).e_k \end{aligned}$$

L'endo. def. par  $P(M)$  est nul sur une base de  $\mathbb{K}^n$ , il est nul et sa matrice aussi.

On a retrouvé par ce biais le fait que les v.p. de  $M$  sont racines du polynôme  $P$ . (cf suites récurrentes et syst. EDO). Par contre, la technique est moins précise au sens où on n'a pas prouvé qu'une racine de  $P$  est effectivement v.p. de  $M$ .



### 3.5 Traitement numérique

Le module `numpy.linalg` contient la fonction `numpy.linalg.eig` permettant de calculer les éléments propres<sup>9</sup> d'une matrice. Ce calcul n'est pas exact. Il est équivalent à la résolution d'une équation polynomiale de haut degré.

Utiliser le script `diag-compagnon.py`. Ce script résout une équation polynomiale  $P(X) = 0$  en diagonalisant sur  $\mathbb{C}$  la matrice  $M$  liée à  $P$  de l'exemple précédent (On dit que  $M$  est la matrice *compagnon*<sup>10</sup> de  $P$ ). Si  $P$  admet  $n$  racines complexes distinctes, celles-ci sont les v.p. de  $M$  et  $M$  est diagonalisable.

### 3.6 Des exercices plus avancés

**Exercice 15.**— Pour une matrice carrée  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $M = (m_{ij})$ , on définit, sa *Trace*, notée  $\text{Tr}(M)$  par

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$$

**1.** Donner la trace de la matrice identité  $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . En général, quelle est la trace d'une matrice diagonale  $D$ , dont on note  $(d_i)_{1 \leq i \leq n}$  les éléments diagonaux.

**2.** Soit  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , deux matrices rectangulaires (ou carrées) de tailles respectives  $n \times m$  et  $m \times n$ .

**2.a.** Justifier que les matrices  $A.B$  et  $B.A$  existent. Sont-elles égales en général ?

**2.b.** Montrer que  $\text{Tr}(A.B) = \text{Tr}(B.A)$ .

**3.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  une matrice inversible,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice carrée.

**3.a.** Montrer que  $\text{Tr}(P^{-1}.A.P) = \text{Tr}(A)$ .

**3.b.** On suppose que  $P^{-1}.A.P = D$ , une matrice diagonale, on note  $d_i$  ses éléments diagonaux. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \text{Tr}(A^p) = \sum_{i=1}^n d_i^p$$

**Exercice 16.**— On considère la matrice  $n \times n$  :

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour  $1 \leq \ell \leq n$ , on pose  $\theta_\ell = \frac{\ell \cdot \pi}{n+1}$  et le vecteur  $v_\ell = (\sin(k \cdot \theta_\ell))_{1 \leq k \leq n}$ .

**1.a.** Pour  $x, y \in \mathbb{R}$ , factoriser  $\sin(x-y) + 2 \sin(x) + \sin(x+y)$ .

**1.b.** Soit  $1 \leq \ell \leq n$ . Déterminer  $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $\Delta_n \cdot v_\ell = \lambda_\ell \cdot v_\ell$ .

**2.** Montrer que la matrice  $\Delta_n$  est diagonalisable.

**3.** Montrer que la matrice  $\Delta_n$  est inversible.

9. En Anglais, valeur propre se dit *eigenvalue* et vecteur propre *eigenvector*

10. terminologie hors-programme mais qui explique le nom du script

**Exercice 17.**— Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ . On définit la matrice  $F \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ , *indicée par*  $(i, j) \in \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, N-1\}$  par  $F_{i,j} = \omega^{i \cdot j}$ .

1. Que vaut  $\omega^N$ ? Montrer que pour tout  $k \in \{-(N-1), \dots, N-1\}$ ,  $k \neq 0$ ,  $\omega^k \neq 1$  et

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} \omega^{k \cdot \ell} = 0$$

2. Calculer  $F \cdot \bar{F}$  où  $\bar{F}$  est la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de  $F$ .

3. Pour un vecteur  $(a_0, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ , on pose  $a_{-1} = a_{N-1}$ ,  $a_{-2} = a_{N-2}, \dots, a_{-(N-1)} = a_1$  et on considère la matrice  $A = C(a_0, \dots, a_{N-1}) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  définie par

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, N-1\} \times \{0, \dots, N-1\}, A_{i,j} = a_{j-i}$$

3.a. Dessiner la matrice  $A$  (au besoin, se limiter à  $N = 3$  ou  $N = 4$ )

3.b. On note  $J = C(0, 1, \dots, 0)$ . Calculer  $J^k$  pour  $0 \leq k \leq N-1$ .

3.c. Montrer que  $A = C(a_0, \dots, a_{N-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot J^k$ .

4.a. Vérifier que  $J^N = I_N$ . La matrice  $J$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ ? Quelles sont ses valeurs propres?

4.b. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable? Que valent les valeurs propres?

5. Alternativement. On note  $F_j$  la colonne d'indice  $j$  de  $F$ . Montrer que  $A \cdot F_j$  est colinéaire (proportionnel) à  $F_j$  et donner le facteur de proportionnalité. (On pourra d'abord travailler sur la matrice  $J$ ).

**Exercice 18.**— Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées (réelles ou complexes) de taille  $n \times n$ . On suppose que  $A \cdot B = B \cdot A$  et que  $A$  admet  $n$  valeurs propres distinctes.

1. Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  et  $X \in E_\lambda := \text{Ker } A - \lambda \cdot I$  alors  $B \cdot X \in E_\lambda$ .

2. En déduire que  $B$  est diagonalisable et que  $B$  admet une base de diagonalisation commune avec  $A$ .

**Exercice 19.**— Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées (réelles ou complexes) de taille  $n \times n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ).

1. Montrer que  $AB$  est inversible si et seulement si  $A$  et  $B$  le sont. En déduire que si 0 est valeur propre de  $B \cdot A$  alors 0 est valeur propre de  $A \cdot B$ .

2. On suppose que  $\lambda \neq 0$  n'est pas valeur propre de  $A \cdot B$ . Vérifier l'identité

$$(\lambda \cdot I_n - BA) \cdot (I_n + B(\lambda \cdot I_n - AB)^{-1} \cdot A) = \lambda \cdot I_n$$

et en déduire qu'alors  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $B \cdot A$

3. Montrer que  $A \cdot B$  et  $B \cdot A$  ont mêmes valeurs propres.