Corrections choisies 08

Théorèmes « limite » en probabilités. Statistiques inférentielles

Correction Ex.–6 Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de BERNOULLI de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $n \geq 1$, on note

$$Y_n = X_n.X_{n+1}$$

1. Soit $n \geq 1$, la v.a. Y_n est à valeurs dans $\{0,1\}$, c'est donc une v.a. de BERNOULLI, son paramètre de succès est

$$p_Y = \mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_n.X_{n+1})$$

Cette dernière quantité se simplifie, par indépendance des (X_i) en

$$p_Y = \mathbb{E}(X_n).\mathbb{E}(X_{n+1}) = p^2$$

On a donc $\mathbb{E}(Y_n) = p^2$, $\mathbb{V}(Y_n) = p^2.(1-p^2)$.
2. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^*$:
— si $i = j$, $\mathbb{C}ov(Y_i,Y_j) = \mathbb{V}(Y_i) = p^2.(1-p^2)$;
— si $|i-j| > 1$, Y_i et Y_j sont indépendantes (à ce propos voir et comprendre le lemme des coalitions qui permet d'affirmer ce type d'indépendance) et $\mathbb{C}ov(Y_i,Y_j) = 0$;
— si $|i-j| = 1$, par exemple $j = i+1$ (l'autre cas est symétrique, Y_i et Y_j sont a priori pas indépendantes en utilisant le lemme des coalitions ; on a

$$Y_i.Y_j = Y_i.Y_{i+1} = X_i.X_{i+1}.X_{i+1}.X_{i+2} = X_i.X_{i+1}.X_{i+2}$$

et donc, par indépendance des (X_i),

$$\mathbb{C}ov(Y_i,Y_j) = \mathbb{E}(Y_i.Y_j) - p^4 = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$$

3. Soit $S_n = \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$ pour $n \geq 1$. On a par linéraité de l'espérance et caractère quadratique de la variance, que

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Y_i) = p^2$$

et

$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(Y_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{C}ov(Y_i,Y_j)\right) = \frac{1}{n^2}\left(n.p^2(1-p^2) + 2.(n-1).p^3(1-p)\right)$$

Il est clair que $\mathbb{V}(S_n) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc, par BIENAYMÉ–TECHBYCHEFF, si $\varepsilon > 0$ est fixé,

$$0 \leq \mathbb{P}(|S_n - p^2| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure à

$$\mathbb{P}(|S_n - p^2| > \varepsilon) \overset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Correction Ex.–7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p = \frac{1}{6} \in]0,1[$. On lance n fois un dé équilibré et on considère S_n le nombre de fois où 6 est sorti durant les n premiers tirages. On pose $Y_n = \exp(\frac{S_n}{n})$.

1. S_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ car les tirages sont indépendants. On compte le nombre de succès dans n tirages indépendants, un succès étant le tirage d'un 6, avec probabilité $p=\frac{1}{6}$.

Plus précisémment, si on nomme X_k la variable de BERNOULLI, de loi $\mathscr{B}(p)$ valant 1 si un 6 est tiré au tirage k, 0 sinon, on a

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$$

— Pour l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(Y_n)=\mathbb{E}(e^{\frac{1}{n}S_n})=\mathbb{E}(e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k})=\mathbb{E}(\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n}X_k})\overset{\text{indep.}}{=}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}(e^{\frac{1}{n}X_k})=(1-p+p.e^{\frac{1}{n}})^n$$

— Pour la variance, on a, sur la même trame,

$$\mathbb{E}(Y_n^2)=\mathbb{E}(e^{\frac{2}{n}S_n})=\mathbb{E}(e^{\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k})=\mathbb{E}(\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{2}{n}X_k})\overset{\text{indep.}}{=}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}(e^{\frac{2}{n}X_k})=(1-p+p.e^{\frac{2}{n}})^n$$

et donc, par KOENIG–HUYGHENS,

$$\mathbb{V}(Y_n)=\mathbb{E}(Y_n^2)-\mathbb{E}(Y_n)^2=(1-p+p.e^{\frac{2}{n}})^n-(1-p+p.e^{\frac{1}{n}})^{2n}$$

On peut faire ces calculs sans avoir recours à cette décomposition de S_n, en utilisant la formule de transfert pour la loi binomiale et le binôme de NEWTON, p.ex. pour l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(Y_n)=\mathbb{E}(e^{\frac{1}{n}S_n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{\frac{k}{n}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{\frac{1}{n}}p)^k(1-p)^{n-k}\overset{(\text{NEWTON})}{=}\left(1-p+p.e^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

2. Il s'agit de démontrer que

$$\mathbb{E}(Y_n)=(1-p+p.e^{\frac{1}{n}})^n\overset{n\to+\infty}{\to}e^p$$

La difficulté dans l'expression $(1-p+p.e^{\frac{1}{n}})^n$ lorsque $n\to+\infty$ est que $(1-p+p.e^{\frac{1}{n}})\to 1$ et $n\to+\infty$. On a donc affaire à une indétermination du type "$1^{+\infty}$".

On a en passant à $\exp\ln$, en utilisant les DL $e^x-1=x+o(x)$ et $\ln(1+x)=x+o(x)$ lorsque $x\to 0$, que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n)=(1-p+p.e^{\frac{1}{n}})^n &= e^{n.\ln(1+p.(e^{\frac{1}{n}}-1))}=e^{n.\ln(1+p.(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})))}=e^{n.p.(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))}\\ &= e^{p.(1+o(1))}\overset{n\to+\infty}{\to}e^p\end{aligned}$$

De la même manière (remplacer les $\frac{1}{n}$ par $\frac{2}{n}$), on a

$$\mathbb{E}(Y_n^2)\overset{n\to+\infty}{\to}e^{2p}$$

et donc

$$\mathbb{V}(Y_n)=\mathbb{E}(Y_n^2)-\mathbb{E}(Y_n)^2\overset{n\to+\infty}{\to}e^{2p}-(e^p)^2=0$$

Finalement, soit $\varepsilon>0$, on a

$$|Y_n-e^p|\leq|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)|+|\mathbb{E}(Y_n)-e^p|$$

Supposons n_0 tel que $\forall n\geq n_0$, $|\mathbb{E}(Y_n)-e^p|<\frac{1}{2}\varepsilon$. On a l'implication pour de tels n

$$|Y_n-e^p|\geq\varepsilon\Rightarrow|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)|>\frac{1}{2}\varepsilon$$

et donc l'inégalité de probabilités,

$$0\leq\mathbb{P}(|Y_n-e^p|\geq\varepsilon)\leq\mathbb{P}(|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)|>\frac{1}{2}\varepsilon)$$

et enfin, par l'inégalité de BIENAYMÉ–TCHEBYCHEFF, on a

$$0\leq\mathbb{P}(|Y_n-e^p|\geq\varepsilon)\leq\frac{\mathbb{V}(Y_n)}{(\frac{1}{2}\varepsilon)^2}$$

et donc, lorsque $n\to+\infty$, $\frac{\mathbb{V}(Y_n)}{(\frac{1}{2}\varepsilon)^2}\to 0$ et, par encadrement, $\mathbb{P}(|Y_n-e^p|\geq\varepsilon)\to 0$. En passant au complémentaire,

$$\mathbb{P}(|Y_n-e^p|<\varepsilon)\overset{n\to+\infty}{\to}1$$

Correction Ex.–9
1. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $\psi_X(t) = \ln \mathbb{E}(e^{tX})$.
1.a. Posons, pour alléger les écritures, $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$, $1 \leq k \leq K$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, en appliquant la formule de transfert :

$$\psi_X(t) = \ln \mathbb{E}(e^{tX}) = \ln \sum_{k=1}^{K} e^{t.x_k}.p_k$$

L'expression à l'intérieur du ln définit une fonction $e_X = t \mapsto \mathbb{E}(e^{t.X}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, combinaison linéaire, à coefficients positifs non tous nuls de fonctions de type exponentielle et donc > 0. On a

$$\forall t \in \mathbb{R},\, e_X'(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k.e^{t.x_k}.p_k = \mathbb{E}(X.e^{t.X})$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R},\, e_X''(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k^2.e^{t.x_k}.p_k = \mathbb{E}(X^2.e^{t.X})$$

La composition avec le ln se « passe bien » et donc ψ_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \psi_X'(t) = \frac{e_X'(t)}{e_X(t)} = \frac{\mathbb{E}(X.e^{t.X})}{\mathbb{E}(e^{t.X})}$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \psi_X''(t) = \frac{e_X''(t).e_X(t) - e_X'(t)^2}{e_X(t)^2} = \frac{\mathbb{E}(X^2.e^{t.X}).\mathbb{E}(e^{t.X}) - \mathbb{E}(X.e^{t.X})^2}{\mathbb{E}(e^{t.X})^2}$$

1.b. Montrons que

$$\mathbb{E}(X^2.e^{t.X}).\mathbb{E}(e^{t.X}) - \mathbb{E}(X.e^{t.X})^2 \geq 0$$

En utilisant l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ :

$$\mathbb{E}(Y.Z)^2 \leq \mathbb{E}(Y^2).\mathbb{E}(Z^2)$$

avec $Y = X.e^{\frac{1}{2}t.X}$ et $Z = e^{\frac{1}{2}t.X}$, on obtient le résultat attendu en utilisant les identités

$$Y.Z = X.e^{\frac{1}{2}t.X}e^{\frac{1}{2}t.X} = X.e^{t.X},\, Y^2 = X^2.e^{t.X} \text{ et } Z^2 = e^{t.X}$$

On admettra que, au cas où X n'est pas constante, on a $\psi_X'' > 0$, ce qui est probablement du au cas d'égalité dans l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ, hors de notre programme [1].
1.c. On a $e_X(0) = \mathbb{E}(1) = 1$, $e_X'(0) = \mathbb{E}(X) = \mu$ et $e_X''(0) = \mathbb{E}(X^2)$ et donc

$$\psi_X'(0) = \frac{e_X'(0)}{e_X(0)} = \mu = \mathbb{E}(X)$$

1.d. Soit $\delta > 0$ positif donné, et posons, pour $\tau \geq 0$, $f(\tau) = \psi_X(\tau) - \tau(\mu + \delta)$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ avec

$$f'(\tau) = \psi_X'(\tau) - (\mu + \delta)$$

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = -\delta < 0$$

Comme f' est continue en 0, elle est strictement négative sur un intervalle du type $[0, \tau_0]$ pour un certain $\tau_0 > 0$ et la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle. Vu que $f(0) = 0$, on en déduit que $f(\tau) < 0$ pour tout $0 < \tau < \tau_0$. Il suffit donc de choisir un tel nombre τ.
1.e. On a applique la même technique à $f(\tau) = \psi_X(\tau) - \tau.(\mu - \delta) < 0$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = +\delta > 0$. La focntion f est donc strictement croissante sur un intervalle ouvert contenant 0 et il suffit de prendre $\tau' < 0$ dans cet intervalle pour avoir $f(\tau') < 0$

Indication:On pourra dresser les tableaux de variations de ces fonctions de τ au voisinage de 0.
2. Soit $\delta > 0$.
2.a. Soit $t > 0$. On a l'égalité d'événements (la première est due au fait que $t > 0$, la seconde au fait que exp est strictement coirssante)

$$\{X > \mu + \delta\} = \{t.X > t.(\mu + \delta)\} = \left\{e^{t.X} > e^{t.(\mu+\delta)}\right\}$$

En appliquant l'inégalité de MARKOV à la v.a. positive e^{tX} et $\lambda = e^{t.(\mu+\delta)} > 0$, on obtient

$$\mathbb{P}(X > \mu + \delta) = \mathbb{P}(e^{t.X} > e^{t.(\mu+\delta)}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{t.X})}{e^{t.(\mu+\delta)}} = e^{\psi_X(t) - t(\mu+\delta)}$$

1. Ce cas d'égalité dit que si l'on a $\mathbb{E}(Y.Z)^2 \leq \mathbb{E}(Y^2).\mathbb{E}(Z^2)$ alors il existe une constante positive λ telle que $y = \lambda.Z$ ou $Z = \lambda.Y$, appliqué à notre cas, cela montre que si $\psi_X'(t) = 0$ pour un certain t alors X est une v.a. constante presque-sûrement, ce que l'on exclut.

2.b. Soit $t<0$. On a l'égalité d'événements (la première est due au fait que $t<0$, la seconde au fait que exp est strictement coirssante)

$$\{X<\mu-\delta\}=\{t.X>t.(\mu-\delta)\}=\left\{e^{t.X}>e^{t.(\mu-\delta)}\right\}$$

En appliquant l'inégalité de MARKOV à la v.a. positive e^{tX} et $\lambda=e^{t.(\mu-\delta)}>0$, on obtient

$$\mathbb{P}(X<\mu-\delta)=\mathbb{P}(e^{t.X}>e^{t.(\mu-\delta)})\leq\frac{\mathbb{E}(e^{t.X})}{e^{t.(\mu-\delta)}}=e^{\psi_X(t)-t(\mu-\delta)}$$

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite indépendante de même loi que X, $\overline{X_n}$ la n-ième moyenne empirique.
3.a. On a, pour $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl}
\psi_{\overline{X_n}}(t) & = & \ln\mathbb{E}(\exp\left(t.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)) \\
& = & \ln\mathbb{E}(\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{t}{n}X_k\right)) \\
(X_k)\text{ indep !} & = & \ln\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}(\exp\left(\frac{t}{n}X_k\right)) \\
X_k\text{ même loi que }X & = & \ln\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}(\exp\left(\frac{t}{n}X\right)) \\
& = & \ln\mathbb{E}(\exp\left(\frac{t}{n}X\right))^n \\
& = & n.\psi_X(\frac{t}{n})
\end{array}$$

3.b. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a l'égalité d'événements

$$\left\{|\overline{X}_n-\mu|>\delta\right\}=\left\{\overline{X}_n-\mu<-\delta\right\}\cup\left\{\overline{X}_n-\mu>\delta\right\}=\left\{\overline{X}_n<\mu-\delta\right\}\cup\left\{\overline{X}_n>\mu+\delta\right\}=$$

et donc

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n-\mu|>\delta)\leq\mathbb{P}(\left\{\overline{X}_n<\mu-\delta\right\})+\mathbb{P}(\left\{\overline{X}_n>\mu+\delta\right\})$$

En appliquant les inégalités obtenues en 2 à $\overline{X}_n$, on obtient pour $t>0$,

$$\mathbb{P}(\left\{\overline{X}_n<\mu-\delta\right\})\leq e^{\psi_{\overline{X}_n}(t)-t(\mu-\delta)}=e^{n(\psi_X(t/n)-t/n(\mu-\delta))}$$

et pour $t<0$

$$\mathbb{P}(\left\{\overline{X}_n>\mu+\delta\right\})\leq e^{\psi_{\overline{X}_n}(t)-t(\mu+\delta)}=e^{n(\psi_X(t/n)-t/n(\mu+\delta))}$$

Ces inégalités sont étonnantes au sens où le terme de droite ne dépend pas de t alors que le terme de gauche, si. On peut donc choisir pour chacune un t adéquat. On prend $t=n.\tau>0$ dans la seconde et $t=n.\tau'<0$ dans la première et on a donc, en posant

$$c'=\psi_X(\tau')-\tau'(\mu-\delta)<0, c=\psi_X(\tau)-\tau(\mu+\delta)<0,$$

que

$$\mathbb{P}(\left\{\overline{X}_n<\mu-\delta\right\})\leq e^{c'.n}$$

et

$$\mathbb{P}(\left\{\overline{X}_n>\mu+\delta\right\})\leq e^{c.n}$$

Finalement on obtient

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n-\mu|>\delta)\leq e^{c.n}+e^{c'.n}$$

pour c,c' des constantes <0, ce qui peut se résumer en l'inégalité suggérée.
4. Pour X une v.a suivant l'une des lois suivantes (discrète ou à densité) : géométrique, POISSON, exponentielle ou normale, en calculant ψ_X explicitement, on obtient les relations initiales entre les dérivées de ψ_X et les fonctions e_X, e'_X et e''_X sur un certain intervalle ouvert centré en 0. Le reste de la méthode ne préjuge pas du caractère fini de la v.a. X et reste donc valable pour obtenir l'inégalité finale.

Correction Ex.–12 Soit $(T_k)_{k\geq1}$ une suite de variables indépendantes distribuées suivant une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. On considère $\overline{T}_n$ la n-ième moyenne empirique.

1. Il s'agit d'un exercice classique (à référencer ?) sur les lois de sommes, en posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$ alors S_n suit une loi « gamma », *i.e.* a pour densité γ_n définie par

$$\forall s \in \mathbb{R},\, \gamma_n(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0 \\ \lambda.\frac{(\lambda.s)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda.s} & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

Maitenant, on a $\overline{T}_n = \frac{1}{n}.S_n$ et donc (changement de variable affine dans la formule de transfert générique, par exemple), $\overline{T}_n$ a pour densité γ_n donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \delta_n(t) = n.\gamma_n(n.t) \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ n.\lambda.\frac{(\lambda.n.t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda.n.t} & \text{si } t > 0 \end{cases} = n.\lambda.\frac{(\lambda.n.t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda.n.t}.1\!\!1_{\{t>0\}}.$$

2. On a, par linéarité de l'esprance et équidistribution des T_k que

$$\mathbb{E}(\overline{T}_n) = \mathbb{E}(T_1) = \frac{1}{\lambda}$$

3. Posons $V_n = \overline{T}_n - \mathbb{E}(T_n)$. Par le changement de variable affine ($v = t - \frac{1}{\lambda}$) dans la formule de transfert générique, on a

$$\phi_n(v) = \delta_n(v+\frac{1}{\lambda}) = n.\lambda.\frac{(\lambda.n.(v+\frac{1}{\lambda}))^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda.n.(v+\frac{1}{\lambda})}.1\!\!1_{\{v>-\frac{1}{\lambda}\}} = \lambda.n^n.\frac{e^{-n}}{(n-1)!}.((\lambda.v+1).e^{-\lambda.v})^{n-1}.e^{-\lambda.v}.1\!\!1_{\{v>-\frac{1}{\lambda}\}}$$

Pour donner une idée de l'évolution cette fonction lorsque $n \to +\infty$,, on la trace son graphe pour plusieurs valeurs de n (On fixe $\lambda = 1$). On peut remarquer (étude de fonction simple, on cherche l'annulation de la dérivée) que le maximum est atteint en $-\frac{1}{n.\lambda}$.

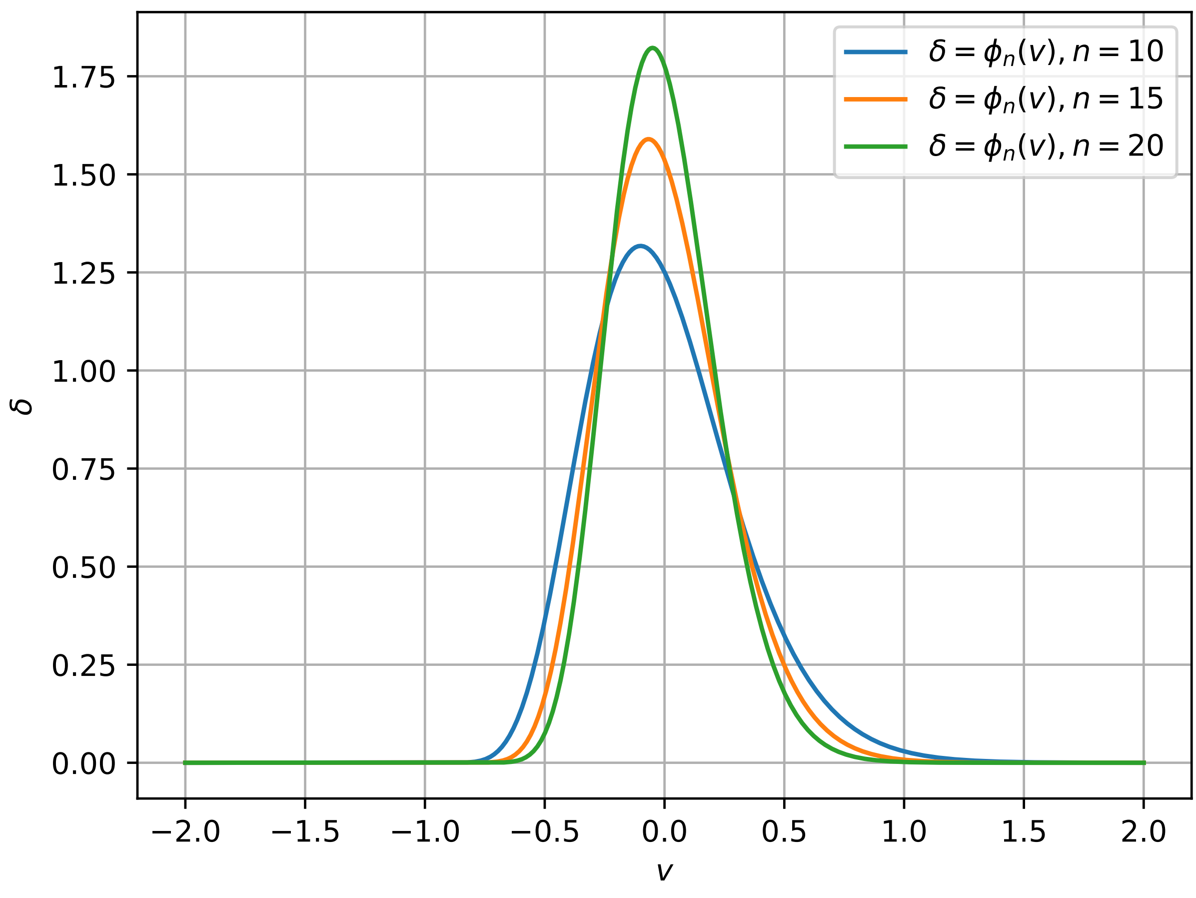

FIGURE 1 – Graphes de ϕ_n pour $n = 10, 15, 20$

4. Les graphes de la fig. 1 suggèrent que pour calculer la limite de $\phi_n(x)$ lorsque x est fixé, on a intérêt à disinguer deux cas : $x > 0$ et $x < 0$.

Pour faciliter le calcul, on utilise l'indication d'équivalent pour obtenir

$$n^n.\frac{e^{-n}}{(n-1)!} \sim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2.\pi}}$$

Par une étude de fonction, la quantité $(\lambda.x+1).e^{-\lambda.x}$, lorsque x décrit l'intervalle $\left[-\frac{1}{\lambda}, +\infty\right]$ est toujours dans l'intervalle $[0,1]$ et ne vaut 1 que lorsque $x = 0$. On en déduit que si $x \in \left[-\frac{1}{\lambda}, +\infty\right]$, $x \neq 0$ alors

$$\sqrt{n}\left((\lambda.x+1).e^{-\lambda.x}\right)^{n-1} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

De ceci et de la formule pour $\phi_n(x)$, on déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \phi_n(x) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

La LFGN donne que pour tout $\varepsilon > 0$, les suites d'intégrales

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \phi_n(x)\ dx \text{ et } \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \phi_n(x)\ dx$$

ont une limite nulle. C'est cohérent avec le résultat prouvé mais ne s'en déduit pas facilement avec les outils dont nous disposons.

On peut remarquer que, par ailleurs, la suite de terme général $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)\ dx$ vaut constamment 1 et donc « toute la masse se concentre autour de 0 ».

5. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a, à partir d'un certain rang,

$$\phi_n(\frac{x}{\sqrt{n}}) = \lambda.n^n.\frac{e^{-n}}{(n-1)!}.((\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}+1).e^{-\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}})^{n-1}.e^{-\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}}$$

car, à partir d'un certain rang (dépendant de x), $1\!\!1_{\left\{\frac{x}{\sqrt{n}} > -\frac{1}{\lambda}\right\}} = 1$, on a donc, en utilisant l'indication (et donc $\lambda.n^n.\frac{e^{-n}}{(n-1)!} \sim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}$)

$$\phi_n(\frac{x}{\sqrt{n}}) \sim_{n\to+\infty} \lambda.\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}.((\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}+1).e^{-\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}})^n$$

La difficulté technique vient de la limite de $((\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}+1).e^{-\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}})^n$ qui est une indétermination du type $1^{+\infty}$. On la lève en passant à $\exp\ln$.

On a, par le DL d'ordre 2 de exp en 0,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}+1).e^{-\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}}\right) &= \ln\left(\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}+1).(1-\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}+\lambda^2.\frac{x^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right))\right) \\
&= \ln\left(1-\lambda^2.\frac{x^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= -\lambda^2.\frac{x^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$n.\ln\left(\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}+1).e^{-\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}}\right) \overset{n\to+\infty}{\to} -\frac{x^2}{2\frac{1}{\lambda^2}}$$

et

$$((\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}+1).e^{-\lambda.\frac{x}{\sqrt{n}}})^n \overset{n\to+\infty}{\to} e^{-\frac{x^2}{2\frac{1}{\lambda^2}}}$$

et finalement

$$\phi_n(\frac{x}{\sqrt{n}}) \sim_{n\to+\infty} \lambda.\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2\frac{1}{\lambda^2}}}$$

Le lien avec le TCL est le fait que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}\phi_n(x/\sqrt{n})$ est la densité de $\frac{1}{\lambda}.\overline{T}_n^*$ qui, par le TCL est « presque » la densité $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\right)$ dont on reconnaitra aisémment la formule dans l'équivalent précédent.

Correction Ex.–15 On effectue des pesées avec une balance. On sait, pour l'avoir testée, que cette balance donne, pour un objet donné, des résultats qui suivent une loi normale dont la moyenne est la masse de l'objet pesé, et dont l'écart-type est de $\sigma = 1g$.
1. On a effectué 25 mesures d'un certain objet, et la somme des résultats est $30,25g$. L'intervalle de confiance à 95% pour la masse de cet objet

$$I = \left[\overline{m} - 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{m} + 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

où $n = 25$ est le nombre de mesures et $\overline{m}$ est la moyenne des masses, *i.e.* $\overline{m} = \frac{30,25}{25}.g = 1,21g$. On a donc

$$I = \left[1,21 - 1,96\frac{1}{5}, 1,21 + 1,96\frac{1}{5}\right] \subset [0,818, 1,602] \subset [0,8, 1,62]$$

NB : I est un intervalle de confiance à 95% pour m, la "vraie" masse, signifie que $\mathbb{P}(m \in I) \geq 0.95$. Si I est un tel intervalle de confiance, tout intervalle $J \supset I$ en est aussi un. (Ce qui donne la bonne direction pour faire les arrondis, on se débrouille pour que le centre de l'intervalle soit $\overline{m}$)

On a dans ce cas une incertitude de mesure de $0,31g$, *i.e.* , en relatif de 25%.
2. Pour $n = 400$ mesures dont la somme donne le résultat $484g$. On a $\overline{m} = \frac{484}{400} = 1,21$ et donc

$$I = \left[1,21 - 1,96\frac{1}{20}, 1,21 + 1,96\frac{1}{20}\right] \subset [1,11, 1,31]$$

Ici l'incertitude mesure est de $0,1g$, *i.e.* moins de 10% en relatif.
3. Il s'agit de déterminer un entier n (le plus petit possible) tel que $1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 5.10^{-2}$ et donc $n \geq \left(\frac{1,96.\sigma}{5.10^{-2}}\right)^2$ *i.e.* $n \geq 1537$. Ici l'incertitude mesure est de $0,05g$, *i.e.* moins de 5% en relatif.