Corrections choisies 09

Séries

Correction Ex.–1

1. $u_n = \ln\frac{1+n}{n}$, $n \geq 1$. Soit $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \ln\frac{1+n}{n} &= \sum_{n=1}^{N} \ln(1+n) - \ln n\\ &= \ln(N+1) - \ln 1\\ &\overset{N\to+\infty}{\to} +\infty\end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \ln\frac{1+n}{n}$ est divergente.

2. $u_n = \frac{n!}{n^{10}}$, $n \geq 1$.
NB : ce n'est pas une série télescopique, il s'agit d'un intrus destiné à tromper la vigilance. En fait $u_n \to +\infty$ et donc la série $\sum_n u_n$ est ce qu'on appelle communément *grossièrement divergente* !
On a, pour $n \geq 11$,

$$u_n = \frac{n.(n-1)....(n-9)}{n\times\cdots\times n}.(n-10)!.$$

Or la suite $\frac{n.(n-1)....(n-9)}{n\times\cdots\times n}$ est produit de 10 suites de limite 1 et, comme $(n-10)! \to +\infty$, $u_n \to +\infty$.
Cet exemple est le moment de définir ce qu'est une série *grossièrement divergente.*. Si $\sum_n u_n$ est convergente alors la suite (S_N) des sommes partielles définie par $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ est convergente (de limite S). La suite des différences consécutives de sommes partielles définie par $S_{N+1} - S_N$ est donc convergente vers 0. Un simple calcul montre que

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_{N+1} - S_N = u_{N+1}$$

et donc si la série $\sum_n u_n$ converge, la *suite* (u_n) converge vers 0.
A contrario, si le terme général u_n ne converge pas vers 0, la série $\sum_n u_n$ *diverge* et c'est tellement « pas très fin » comme argument, qu'on dit que la série $\sum_n u_n$ *diverge grossièrement*.

3. $\frac{2}{n(n^2-1)}$, $n \geq 2$. Pour $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{n.(n-1) - 2(n^2-1) + n.(n+1)}{n.(n^2-1)} = \frac{2}{n.(n^2-1)}$$

Soit $N \geq 2$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n.(n^2-1)} &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1}\\ &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N} -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\\ &= \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{N}\\ &\overset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Et donc $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n(n^2-1)}$ est convergente, de somme

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n(n^2-1)} = \frac{1}{2}$$

Correction Ex.–2 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique de limite 0 et a, b, c trois nombres réels tels que $a+b+c=0$. Soit la série de terme général $u_n = a.v_n + b.v_{n+1} + c.v_{n+2}$. On a, pour $N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N} a.v_n + b.v_{n+1} + c.v_{n+2} = a.\sum_{n=0}^{N} v_n + b.\sum_{n=0}^{N} v_{n+1} + c.\sum_{n=0}^{N} v_{n+2}\\
&= a.\sum_{n=0}^{N} v_n + b.\sum_{n=1}^{N+1} v_n + c.\sum_{n=2}^{N+2} v_n = a.(v_0+v_1)+b.(v_1)+\underbrace{a.\sum_{n=2}^{N} v_n + b.\sum_{n=2}^{N} v_n + c.\sum_{n=2}^{N} v_n}_{=0} + \underbrace{b.v_{N+1}}_{\to 0} + \underbrace{c.(v_{N+1}+v_{N+2})}_{\to 0}\\
&\overset{N\to+\infty}{\to} a.(v_0+v_1)+b.(v_1)
\end{aligned}$$

Donc $\sum_n u_n$ converge et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = a.(v_0+v_1)+b.(v_1)$$

Vu que $b=-a-c$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = a.v_0 - c.v_1.$$

NB : On aurait pu faire apparaitre des séries télescopiques en écrivant

$$u_n = a.v_n + b.v_{n+1} + c.v_{n+2} = a.(v_n - v_{n+1}) + c.(v_{n+2} - v_{n+1})$$

et en remarquant que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n - v_{n+1} = v_0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+2} - v_{n+1} = -v_1$. La présentation adoptée dans la résolution permettait seulement de garder une symétrie entre a, b et c.

Correction Ex.–4

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. Soit $N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1}-u_n).v_n &= \sum_{n=0}^{N} u_{n+1}.v_n - \sum_{n=0}^{N} u_n.v_n\\
&= u_{N+1}.v_N + \sum_{n=0}^{N-1} u_{n+1}.v_n - \sum_{n=1}^{N} u_n.v_n - u_0.v_0\\
\text{(chgt indice } n'=n+1) &= u_{N+1}.v_N + \sum_{n'=1}^{N} u_{n'}.v_{n'-1} - \sum_{n=1}^{N} u_n.v_n - u_0.v_0\\
(n\text{"}'=n, \text{ regroupement des } \textstyle\sum) &= u_{N+1}.v_N - u_0.v_0 - \sum_{n=1}^{N} u_n.(v_n - v_{n-1})
\end{aligned}$$

2. Soit $q\in\mathbb{C}$, $q\neq 1$.

2.a. On applique la formule précédente avec $v_n = q^n$, $u_n = n$, ce qui donne, pour $N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1}-u_n).v_n &= \sum_{n=0}^{N} q^n \left(=\frac{1-q^{N+1}}{1-q}\right)\\
&= (N+1).q^N - \sum_{n=1}^{N} n.(q^n - q^{n-1}) = (N+1).q^N + (1-q).\sum_{n=1}^{N} n.q^{n-1}
\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\sum_{n=1}^{N} n.q^{n-1} = \frac{1}{1-q}\sum_{n=0}^{N} q^n - \frac{(N+1).q^N}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{q^{N+1}}{(1-q)^2} - \frac{(N+1).q^N}{1-q}$$

2.b. Et donc, lorsque $|q|<1$, lorsque $N\to+\infty$, par croissance comparées, $N.q^N\to 0$ et

$$\sum_{n=1}^{N} n.q^{n-1} \to \frac{1}{(1-q)^2}.$$

On a donc, lorsque $|q|<1$, convergence de la série en question et la valeur de sa somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n.q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

(Noter au niveau de l'écriture : sommes partielles (en famille), flèche de limite, valeur *vs.* somme totale (jusque $\boxed{+\infty}$), signe $\boxed{=}$ et valeur)

Cette dernière formule est la formule du cours (à connaitre ! !) donnant la somme de la première série géométrique dérivée.

3. En faisant le même travail à partir de $u_n = n.(n-1)$, $v_n = q^n$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\sum_{n=1}^{N} n.q^{n-1} &= \sum_{n=1}^{N}((n+1)n - n(n-1))q^{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{N+1} n.(n-1).q^{n-2} - \sum_{n=0}^{N} n.(n-1).q^{n-1} \\ &= (1-q)\sum_{n=2}^{N} n.(n-1).q^{n-2} + (N+1).N.q^{N-1} \end{aligned}$$

A la limite (lorsque $|q| < 1$), par croissances comparées,

$$2\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n.q^{n-1} = (1-q)\sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).q^{n-2}$$

et donc on retrouve la valeur de la série géométrique dérivée seconde :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).q^{n-2} = 2\frac{1}{(1-q)^3}.$$

Une remarque : on a souligné l'analogie qu'il pouvait y avoir entre suite géométrique du type $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et fonction exponentielle du type $t \mapsto e^{-\alpha.t}$ (lorsque $q > 0$, $\alpha \leftrightsquigarrow -\ln q$). Lorsque $\alpha > 0$, le calcul des intégrales généralisées convergentes

$$\int_0^{+\infty} t.e^{-\alpha.t}\,dt = \frac{1}{\alpha^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} t^2.e^{-\alpha.t}\,dt = \frac{2}{\alpha^3}$$

peut s'effectuer par une intégration par parties qui est un calcul parallèle aux calculs menés auparavant.

Notons, que par i.p.p et récurrence, on obtient que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^k.e^{-\alpha.t}\,dt = \frac{k!}{\alpha^{k+1}}$$

alors que pour les séries, par la technique présentée dans l'exercice, ou la technique de dérivation utilisée dans le cours, par récurrence, on peut montrer que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{n.(n-1)....(n-k+1)}_{k \text{ termes}}.q^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}.q^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}.q^{n-k} = \frac{1}{(1-q)^{k+1}}.$$

Correction Ex.–14

1.

1.a. Pour $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, comparer $\frac{1}{n}$, $\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t}$ et $\int_{n}^{n+1}\frac{dt}{t}$. Expliquer graphiquement cette comparaison.

Comme la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, on a,

1. Pour[1] $t\in[n-1,n]$, $\frac{1}{t}\geq\frac{1}{n}$,
2. Pour $t\in[n,n+1]$, $\frac{1}{t}\leq\frac{1}{n}$,

En intégrant ces inégalités sur chacun des intervalles concernés (ils sont de longueur 1), on a

$$\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t}\geq\frac{1}{n}\geq\int_{n}^{n+1}\frac{dt}{t}$$

1.b. Soit $N\in\mathbb{N}^*$.

— En sommant la première des inégalités précédentes pour n variant de 2 à N, on obtient $\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n}\leq\int_1^N\frac{dt}{t} = \ln(N)$. En ajoutant à ceci le terme pour $n=1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\leq 1+\ln(N)$$

— En sommant la deuxième des inégalités précédentes pour n variant de 1 à N, on obtient

$$\ln(N+1) = \int_1^{N+1}\frac{dt}{t}\leq\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

1. Pour $n=1$, ouvrir l'intervalle à droite

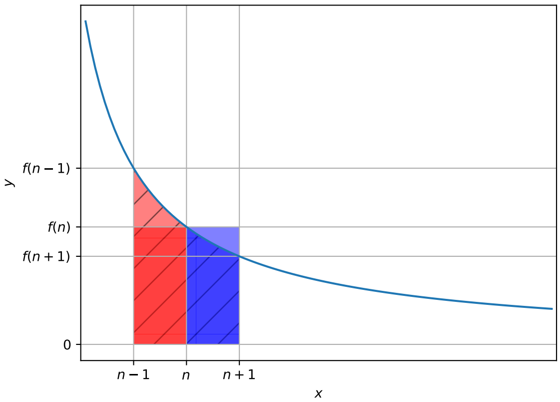

FIGURE 1 – Comparaison série-intégrale : cas d'intégrande décroissante

1.c. La minoration des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ tout juste obtenue montre que cette série est divergente.
1.d. On a, pour $N\in\mathbb{N}^*$, $N\geq 2$,

$$\frac{\ln(N+1)}{\ln N}\leq\frac{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}}{\ln N}\leq 1+\frac{1}{\ln N}$$

La limite lorsque $N\to+\infty$ des deux termes extrêmes de cette famille d'inégalités est 1. (On a notamment $\frac{\ln(N+1)}{\ln(N)}=1+\frac{ln(1+\frac{1}{N})}{\ln(N)}\to 1$) et par le théorème des gendarmes,

$$\frac{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}}{\ln N}\to 1$$

Ceci montre que

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sim_{N\to+\infty}\ln N$$

2.
2.a. La fonction $t\in]0,+\infty[\mapsto\ln(t)$ est strictement croissante. Soit $n\in\mathbb{N}^*$,

1. Pour[2] $t\in[n-1,n]$, $\ln t\leq\ln n$,
2. Pour $t\in[n,n+1]$, $\ln t\geq\ln n$,

En intégrant ces inégalités sur chacun des intervalles concernés (ils sont de longueur 1), on a

$$\int_{n-1}^{n}\ln(t)\;dt\leq\ln n\leq\int_{n}^{n+1}\ln(t)\;dt$$

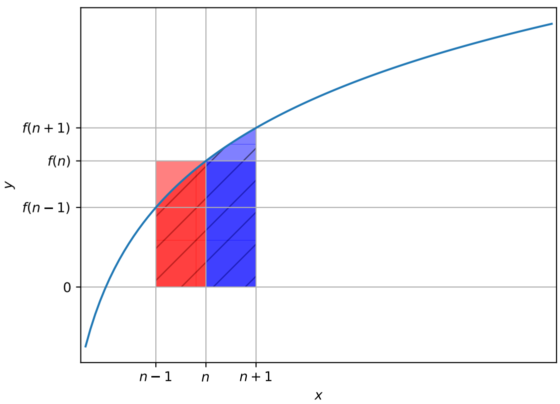

FIGURE 2 – Comparaison série-intégrale : cas d'intégrande croissante

2. Pour $n=1$, ouvrir l'intervalle à droite

2.b. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

— En sommant la première des inégalités précédentes pour n variant de 2 à N, on obtient $\sum_{n=2}^{N} \ln n \geq \int_1^N \ln(t)\, dt$. En ajoutant à ceci le terme pour $n = 1$, qui vaut 0, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \ln n \geq \int_1^N \ln(t)\, dt$$

— En sommant la deuxième des inégalités précédentes pour n variant de 1 à N, on obtient

$$\ln(N+1) = \int_1^{N+1} \ln(t)\, dt \geq \sum_{n=1}^{N} \ln n$$

2.c. $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$. (On peut la connaitre, ou effectuer une intégration par parties.)

On a donc, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^N \ln(t)\, dt = N\ln N - N + 1$$

et, lorsque $N \to +\infty$,

$$\frac{\int_1^N \ln(t)\, dt}{N\ln N} \to 1$$

De même,

$$\int_1^{N+1} \ln(t)\, dt = (N+1)\ln(N+1) - N$$

et, lorsque $N \to +\infty$,

$$\frac{\int_1^{N+1} \ln(t)\, dt}{N\ln N} \to 1$$

On a donc, pour $N \geq 2$,

$$\frac{\int_1^N \ln(t)\, dt}{N\ln N} \leq \frac{\ln(N!)}{N\ln N} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \ln(n)}{N\ln N} \leq \frac{\int_1^{N+1} \ln(t)\, dt}{N\ln N}$$

Les deux termes extrêmes de cette famille d'inégalités ayant pour limite 1 lorsque $N \to +\infty$, il vient

$$\ln(N!) \sim_{N\to+\infty} N\ln N$$

Le but de l'exercice est d'obtenir, pour chacune des séries divergentes $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \ln(n)$, une estimation asymptotique plus précise que celle obtenue dans les questions précédentes. La technique va simplement être de raffiner la comparaison avec l'intégrale.

3. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty([1,+\infty[)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

3.a. Prenons $u(t) = (t - (n+\frac{1}{2}))$, $u'(t) = 1$, $u(n) = -\frac{1}{2}$, $u(n+1) = \frac{1}{2}$, u et f sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n,n+1]$ et on a

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} f(t)\, dt &= \int_n^{n+1} f(t).u'(t)\, dt \\
&= [f(t).u(t)]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f'(t).u(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2}(f(n)+f(n+1)) - \int_n^{n+1} f'(t).(t-(n+\frac{1}{2}))\, dt
\end{aligned}$$

3.b. Prenons $u(t) = \frac{1}{2}(t-(n+\frac{1}{2}))^2$, $u'(t) = (t-(n+\frac{1}{2}))$, $u(n) = u(n+1) = \frac{1}{8}$, $u(n+1) = \frac{1}{2}$, u et f' sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n,n+1]$ et on a

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} f'(t).(t-(n+\frac{1}{2}))\, dt &= \int_n^{n+1} f'(t).u'(t)\, dt \\
&= \left[f'(t).u(t)\right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f''(t).u(t)\, dt \\
&= \frac{1}{8}(-f'(n)+f'(n+1)) - \frac{1}{2}\int_n^{n+1} f''(t).(t-(n+\frac{1}{2}))^2\, dt
\end{aligned}$$

En replaçant dans la formule obtenue à la question précédente, on obtientla formule

$$\int_n^{n+1} f(t)\, dt = \frac{1}{2}(f(n)+f(n+1)) + \frac{1}{8}f'(n) - \frac{1}{8}f'(n+1) + \frac{1}{2}\int_n^{n+1} (t-(n+\frac{1}{2}))^2 f''(t)\, dt$$

3.c. On pose $u_n = \frac{1}{2}\int_n^{n+1}(t-(n+\frac{1}{2}))^2 f''(t)\,dt$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, en additionnant les égalités précédentes pour n allant de 1 à N, on obtient, par CHASLES

$$\int_1^{N+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(f(n)+f(n+1)) + \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{N}(f'(n+1)-f'(n)) + \sum_{n=1}^{N} u_n$$

— La première somme vaut $\sum_{n=1}^{N} f(n) - \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(N+1)$,
— la deuxième somme est téléescopique et vaut $\frac{1}{8}f'(1) - \frac{1}{8}f'(N+1)$

Finalement, il vient

$$\int_1^{N+1} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{N} f(n) + \frac{1}{2}f(N+1) - \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{8}f'(1) - \frac{1}{8}f'(N+1) + \sum_{n=1}^{N} u_n$$

4. On se place dans le cas où $f(x) = \frac{1}{x}$.
4.a. On a alors $\forall x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$.
4.b. Soit $n \geq 1$, on a

$$|u_n| \quad \leq \quad \frac{1}{2}\int_n^{n+1}(x-(n+\frac{1}{2}))^2.\frac{2}{x^3}\,dx$$

Lorsque $x \in [n, n+1]$, on a
— $0 \leq |x-(n+\frac{1}{2})| \leq \frac{1}{2}$ et donc $0 \leq (x-(n+\frac{1}{2}))^2 \leq \frac{1}{4}$.
— $\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{n^3}$,
— les 2 se neutralisant, il reste

$$|u_n| \leq \frac{1}{4n^3}$$

4.c. La majoration obtenue précédemment montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$ (car $4n^3 \geq n^2$). On a majoré le terme général, *positif*, $|u_n|$ par le terme général d'une série convergente, par le théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est absolument convergente et donc convergente. On note S sa somme.
4.d. Soit $N \geq 1$, on a par les majorations issues du théorème $ACV \Rightarrow CV$ pour la première inégalité et du théorème de comparaison pour la seconde que

$$|\sum_{n=1}^{N} u_n - S| = |\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \leq \frac{1}{4}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$$

Il nous reste à estimer $\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$. En s'inspirant de ce qui a été fait dans les premières questions, on remarque que $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc que pour $n \geq N+1$, on a

$$0 \leq \frac{1}{n^3} \leq \int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^3}$$

La série $\sum_{n\geq N+1}\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^3}$ est convergente et sa somme vaut $\int_N^{+\infty}\frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t^2}\right]_N^{+\infty} = \frac{1}{2N^2}$. Par l'inégalité issue du théorème de comparaison, on a donc

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{2N^2}$$

Il reste finalement

$$|\sum_{n=1}^{N} u_n - S| \leq \frac{1}{8.N^2}$$

4.e. Soit $N \geq 1$, on a de l'égalité

$$\int_1^{N+1} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{N} f(n) + \frac{1}{2}f(N+1) - \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{8}f'(1) - \frac{1}{8}f'(N+1) + \sum_{n=1}^{N} u_n$$

avec $f(x) = \frac{1}{x}$, que [3]

$$\begin{aligned} \ln(N+1) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8(N+1)^2} + \sum_{n=1}^{N} u_n \\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8(N+1)^2} + S + \sum_{n=1}^{N} u_n - S \end{aligned}$$

3. la première est une réécriture de la formule, pour la seconde, on ajoute et retranche S

Passons les choses du côté attendu, regroupons les constantes et nommons R_N le reste, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} &= \ln(N+1)-\frac{1}{2(N+1)}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-S}_{\gamma}+\underbrace{-\frac{1}{8(N+1)^2}+S-\sum_{n=1}^{N}u_n}_{R_N}\\ &= \ln(N+1)+\gamma-\frac{1}{2(N+1)}+R_N\end{aligned}$$

où, par inégalité triangulaire, le fait que $(N+1)^2\geq N^2$ et l'ingéalité prouvée à la question précédente,

$$|R_N|\leq\frac{1}{8(N+1)^2}+|S-\sum_{n=1}^{N}u_n|\leq\frac{1}{8N^2}+\frac{1}{8N^2}=\frac{1}{4N^2}$$

On peut prendre $C=\frac{1}{4}$.
5. On se place dans le cas où $f(x)=\ln(x)$.
5.a. On a $\forall x>0,\ f'(x)=\frac{1}{x}$ et $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$.
5.b. Soit $n\geq 1$, on a

$$|u_n| \leq \frac{1}{2}\int_{n}^{n+1}(x-(n+\frac{1}{2}))^2.\frac{1}{x^2}\,dx$$

Lorsque $x\in[n,n+1]$, on a
— $0\leq|x-(n+\frac{1}{2})|\leq\frac{1}{2}$ et donc $0\leq(x-(n+\frac{1}{2}))^2\leq\frac{1}{4}$.
— $\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{n^2}$,

Il reste

$$|u_n|\leq\frac{1}{8n^2}$$

5.c. La série $\sum_{n\geq1}|u_n|$ est, par le théorème de comparaison (la série $\sum_{n\geq1}\frac{1}{8n^2}$ est réputée convergente), convergente. La série $\sum_{n\geq1}u_n$ est donc absolument convergente et donc convergente. On note S sa somme.
5.d. Soit $N\geq1$. Comme déjà expliqué, on a

$$|\sum_{n=1}^{N}u_n-S|\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty}|u_n|\leq\frac{1}{8}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Il nous reste à estimer $\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. En s'inspirant de ce qui a déjà été fait en termes de comparaison séries-intégrales, on remarque que $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc que pour $n\geq N+1$, on a

$$0\leq\frac{1}{n^2}\leq\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^2}$$

La série $\sum_{n\geq N+1}\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^2}$ est convergente et sa somme vaut $\int_{N}^{+\infty}\frac{dt}{t^2}=\left[-\frac{1}{t}\right]_{N}^{+\infty}=\frac{1}{N}$. Par l'inégalité issue du théorème de comparaison, on a donc

$$0\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{N}$$

Il reste finalement

$$|\sum_{n=1}^{N}u_n-S|\leq\frac{1}{8.N}$$

5.e. Soit $N\geq1$, on a de l'égalité

$$\int_{1}^{N+1}f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{N}f(n)+\frac{1}{2}f(N+1)-\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{8}f'(1)-\frac{1}{8}f'(N+1)+\sum_{n=1}^{N}u_n$$

avec $f(x)=\ln x$, que [4]

$$(N+1)\ln(N+1)-N = \sum_{n=1}^{N}\ln n+\frac{1}{2}\ln(N+1)+\frac{1}{8}-\frac{1}{8(N+1)}+\sum_{n=1}^{N}u_n$$

4. la première est une réécriture de la formule, pour la seconde, on ajoute et retranche S

Passons les choses du côté attendu, ajoutons retranchons S, regroupons les constantes et nommons R_N le reste, on a

$$\begin{aligned}
\ln(N!) = \sum_{n=1}^{N} \ln(n) &= (N+1)\ln(N+1) - N - \frac{1}{2}\ln(N+1) + \underbrace{\frac{1}{8} - S}_{\gamma} + \underbrace{- \frac{1}{8(N+1)} + S - \sum_{n=1}^{N} u_n}_{R_N} \\
&= (N+1)\ln(N+1) - N - \frac{1}{2}\ln(N+1) + \gamma - \frac{1}{2}\ln(N+1) + R_N
\end{aligned}$$

où, par inégalité triangulaire, le fait que $(N+1) \geq N$ et l'inégalité prouvée à la question précédente,

$$|R_N| \leq \frac{1}{8(N+1)} + |S - \sum_{n=1}^{N} u_n| \leq \frac{1}{8N} + \frac{1}{8N} = \frac{1}{4N}$$

On peut prendre $C = \frac{1}{4}$.
5.f. On peut modifier un peu cette égalité pour obtenir

$$\ln(N!) \quad = \quad N\ln(N+1) - N + \frac{1}{2}\ln(N+1) + \gamma - \frac{1}{2}\ln(N+1) + R_N$$

En passant l'égalité précédente à l'exponentielle, on a

$$N! = e^{\gamma}\sqrt{N+1}.(N+1)^N.e^{-N}.e^{R_N}$$

ce qui n'est pas exactement ce que l'on cherche. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{N+1}(N+1)^N}{\sqrt{N}N^N} &= \sqrt{1+\frac{1}{N}}(1+\frac{1}{N})^N \\
&\overset{N\to+\infty}{\to} e
\end{aligned}$$

On a donc on a

$$N! = e^{\gamma}\sqrt{N}.N^N.e^{-N}.e^{R_N}.\alpha_N$$

où $\alpha_N \to e$, ce qui se traduit par

$$N! = e^{\gamma+1}\sqrt{N}.N^N.e^{-N}.e^{\rho_N}.$$

où $\rho_N \to 0$ lorsque $N \to +\infty$.
Remarque finale : On montre (par exemple à l'aide des intégrales de WALLIS) que la constante A vaut $\sqrt{2\pi}$. On vient d'obtenir la *formule de* STIRLING :

$$N! \sim_{N\to+\infty} \sqrt{2\pi.N}N^N e^{-N}$$