Corrections choisies 10

Variables discrètes

Correction Ex.–25 Soit (X,Y) un couple de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = n \cap Y = m) = \frac{k}{(n+m+1)!}$$

où k est une constante.
1. Posons $p'_{mn} = \frac{1}{(m+n+1)!}$ de sorte que $p_{m,n} = k.p'_{mn}$ et calculons $\sum_{n,m\geq 0} p'_{m,n}$ en regroupant en paquets (anti-) diagonaux $D_k = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : m+n = k\}$, $k \geq 0$. Pour chaque $k \geq 0$,

$$\sum_{(m,n)\in D_k} p'_{m,n} = (k+1)\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}$$

et donc

$$\sum_{m,n\geq 0} p'_{mn} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{(m,n)\in D_k} p'_{m,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

On prend $k = \frac{1}{e}$ de sorte que $\sum_{m,n\geq 0} p_{mn} = 1$. Comme $\forall n,m \geq 0, p_{mn} \geq 0$, il existe une v.a. $W = (X,Y)$ à valeurs $\mathbb{N}^2$ telle que

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(W = (m,n)) = \mathbb{P}(X = m, Y = n) = p_{m,n}$$

2. Calculons $\mathbb{P}(X = 0)$ en conditionnant sur les valeurs de Y En conditionnant sur les valeurs prises par Y, on obtient

$$\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = m) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{e.(m+1)!} = 1 - \frac{1}{e}$$

et de même

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \frac{1}{e}$$

Il vient donc

$$\mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) = \frac{1}{e} \neq \mathbb{P}(X = 0).\mathbb{P}(Y = 0) = (1 - \frac{1}{e})^2$$

et ceci implique que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
3. La v.a $Z = X + Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{m,n\in D_k} p_{m,n} = (k+1)\frac{1}{e.(k+1)!} = \frac{e^{-1}}{k!}$$

On en déduit que Z est une v.a. $\mathscr{P}(()\lambda)$ avec $\lambda = 1$ et donc que son espérance est 1. On en déduit, du fait que $1 = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, que X et Y ont même loi (par symétrie) que

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$$

Correction Ex.–26
1. On a, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = m \text{ et } Y = n) &= \mathbb{P}(X = m | Y = n)\mathbb{P}(Y = n) \\ &= \begin{cases} e^{-\lambda}.\binom{n}{m} p^m.q^{n-m}\frac{\lambda^n}{n!} & \text{si } m \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui donne la loi de (X,Y)

2. On a donc, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=m) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=m \text{ et } Y=n) = e^{-\lambda} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{p^m.q^{n-m}.\lambda^n}{m!(n-m)!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(p.\lambda)^m}{m!} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{q^{n-m}.\lambda^{n-m}}{(n-m)!} \\
&= e^{-\lambda.p} \frac{(p.\lambda)^m}{m!}
\end{aligned}$$

et donc $X \sim \mathscr{P}(\lambda.p)$.

3. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=n|X=m) &= \begin{cases} e^{-\lambda}.\frac{1}{m!(n-m)!} p^m.q^{n-m}\lambda^n.e^{+\lambda.p}\lambda^{-m}p^{-m}m! & \text{si } n \geq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{-q.\lambda}.\frac{1}{(n-m)!} q^{n-m}\lambda^{n-m} & \text{si } m \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

et donc la loi de $Y-m$ conditionelle à $(X=m)$ est une loi $\mathscr{P}(\lambda.q)$.