Programme de Colles 04

V.a. réelles à densité,
12/11–22/11

PROGRAMME

Probabilités et variables aléatoires réelles à densité. (Tout le chapitre)

1. Densité, formule de transfert, fonction de répartition
2. Exemples de calculs de la densité de $Y = f(X)$ connaissant la loi de X et la fonction f (cas simples où f est monotone et lisse.)
3. Loi classiques et leurs caractéristiques, espérance, variance, fonction de répartition : uniforme sur un intervalle $\mathscr{U}_{[a,b]}$, exponentielle, $\mathscr{E}(\lambda)$, loi normale $\mathscr{N}\left(m,\sigma^2\right)$.

******

4. Utilisation de la fonction de répartition pour simuler une v.a de densité donnée. $X = F^{-1}(U)$
5. Condition suffisante sur la fonction de répartition d'une v.a. réelle pour que celle-ci soit à densité. Calcul de la densité par dérivation.

++++++

6. Densité de $\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$ pour X et Y indépendantes, à densité.
7. Densité de $X+Y$ pour X et Y indépendantes, à densité. Formule du produit de convolution.

QUESTIONS DE COURS

1. Définition d'une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et d'une v.a. X admettant cette densité. Formule de transfert générique.
2. Définition, espérance, variance d'une v.a uniforme sur un intervalle $]a,b[$. Calcul de sa fonction de répartition.
3. Définition, espérance, variance d'une v.a exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calcul de sa fonction de répartition.
4. Définition d'une v.a. normale $\mathscr{N}\left(m,\sigma^2\right)$. Calculs de l'espérance et variance (en se ramenant par i.p.p à l'intégrale gaussienne.) d'une v.a. normale $\mathscr{N}(0,1)$.

******

5. Démonstration du fait qu'une v.a. exponentielle satisfait la propriété d'absence de mémoire.
6. Formule $X = F^{-1}(U)$ permettant la simulation d'une v.a à densité connaissant une v.a uniforme. Justifier que la fonction de répartition de X est F (on la suppose continue, strictement croissante) et écrire une fonction Python permettant de simuler une v.a $\mathscr{E}(1)$ connaissant la fonction `numpy.random.rand()`.

++++++

7. Calcul des lois de $\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$ où X et Y, à densité, sont indépendantes. Exemple avec $X,Y \sim \mathscr{E}(\lambda)$.
8. Formule du produit de convolution pour calculer la densité d'une somme de v.a. à densité, indépendantes. Loi de la somme de deux v.a. uniformes sur $[-1,+1]$, indépendantes.
9. Formule du produit de convolution pour calculer la densité d'une somme de v.a. à densité, indépendantes. Loi de la somme de deux v.a. $\mathscr{N}(0,1)$, indépendantes.

Les points entre **** et ++++ auront été traités lors du TD du mardi de la première semaine, les points après ++++ sont pour la deuxième semaine.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE

— V.a. à densité, Suites récurrentes, équations différentielles et modélisation déterministe.