Programme de Colles 05

EDO, Suites récurrentes
25/11–06/12

PROGRAMME

- Variables aléatoires à densité : tout le chapitre
- EDO et Suites récurrentes
  1. Révisions : suites géométriques, arithmético-géométriques.
  2. Suites réelles du type $u_{n+1} = f(u_n), u_0 \in I$ où f est monotone sur l'intervalle I, stable par f. NB : Les éléments d'étude classiques de suites récurrentes réelles ne sont pas au programme mais on peut donner des exercices (très) guidés.
  3. Révisions : EDO linéaire scalaire du premier ordre : variation de la constante.
  4. Révisions : EDO linéaire du second ordre à coefficients constants, équation caractéristique. [1]
  5. EDO se ramenant à une EDO linéaire via un changement de fonction inconnue.
  6. Principe du schéma d'EULER associé à une EDO du premier ordre, scalaire ou vectorielle.

$\star\star\star$

  7. Equations du premier ordre à variables séparées.
  8. Systèmes conservatifs (*i.e.* admettant une énergie, constante du mouvement)
  9. Exemples variés issus de la physique, chimie, biologie.

QUESTIONS DE COURS

1. (Révision de première année) Résolution d'une récurrence linéaire d'ordre 2 (Suites).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, I un intervalle stable par f et une suite u vérifiant $u_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si f est croissante sur I alors u est monotone. Donner un exemple graphique de cette situation où u est décroissante.
3. (Révision de première année) Méthode de la variation de la constante sur un exemple simple.
4. (Révision de première année) Résolution d'une EDO d'ordre 2, linéaire, homogène, à coefficients réels constants sur deux exemples simples reflétant les deux régimes principaux.
5. Simulation informatique d'une résolution d'EDO du premier ordre via la méthode d'EULER. Principe et codage informatique sur un exemple simple.

$\star\star\star$

6. Résolution de l'équation de GOMPERTZ :
$$\frac{du}{dt} = -k.u.\ln(u)$$
On séparera les cas $u(0) \in]0,1[$ et $u(0) > 1$.
7. Preuve de la constance de
$$E = r_d(\ln u - u) + r_g(\ln v - v) = \ln\left(u^{r_d} e^{-r_d.u} v^{r_g} e^{-r_g.v}\right)$$
le long d'une solution du système différentiel de LOTKA–VOLTERRA réduit (r_d et r_g sont deux constantes réelles > 0)
$$\frac{du}{dt} = -r_g(1-v).u \text{ et } \frac{dv}{dt} = +r_d(1-u).v$$
et interprétation géométrique. (L'allure des lignes de niveau de E sur $]0,+\infty[^2$ doit être connue, p.ex. du cours de SVT).

Les points situés après les $\star\star\star$ sont pour la deuxième semaine.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE

- Révisions d'algèbre. (Complexes, Polynômes, algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$.)

1. Dans les cas avec second membre, on doit proposer une forme de solution particulière.