**Lycée Pierre-Gilles de Gennes** — **BCPST2**
**Mathématiques** — **2019-2020**

# Programme de Colles 07

Fondamentaux d'Algèbre linéaire
06/01-17/01

Comme d'habitude, les points après $\star\star\star$ sont pour la 2e semaine.

## PROGRAMME

— Révisions d'Algèbre, *c.f.* Programme précédent

$\star\star\star$

— Fondamentaux d'algèbre linéaire.

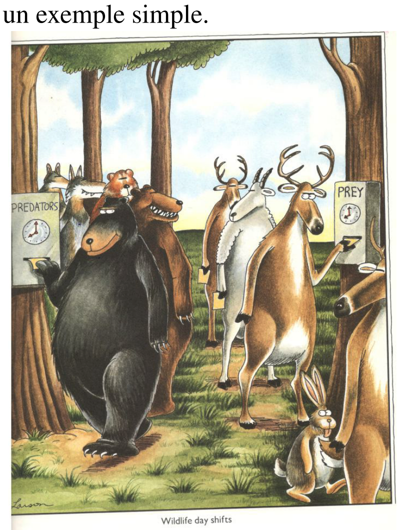
1. Définitions d'un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-ev $E$, d'un sev de $E$. Exemples (espaces et sous-espaces de fonctions, de suites, de polynômes, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$)
2. Intersection de sev.
3. Définition d'une application linéaire $E \to F$, (morphismes, endomorphismes, formes linéaires), notations $\mathscr{L}(E,F), \mathscr{L}(E)$. Exemples variés.
4. Sev engendré par une famille finie de vecteurs, famille génératrice d'un sev. Notation $\mathrm{Vect}\langle u_1,\dots,u_n\rangle$. Ecriture de solutions de problèmes linéaires homogènes variés sous cette forme.
5. Opérations sur les applications linéaires, composition, réciproque, notation $f^n$ pour $f \in \mathscr{L}(E), n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$
6. Noyau, image : caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.

## QUESTIONS DE COURS

1. Résolution d'un système linéaire $2\times 2$ à l'aide du déterminant. Formules, formule de l'inverse d'une matrice $2\times 2$ et application sur un exemple.
2. Sur un exemple : Utilisation d'identités polynômiales pour le calcul matriciel : binôme de NEWTON pour le calcul de puissances, somme des termes consécutifs d'une suite géométrique pour le calcul d'inverse ; utilisation d'un polynôme annulant la matrice.
3. Etant donnée une matrice $A$, détermination d'un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Im}\,A$, l'image de $A$ et d'une base de cet espace sur un exemple.

$\star\star\star$

4. Sur des exemples simples, montrer qu'une partie d'un $\mathbb{K}$-ev $E$ est ou n'est pas un sev de $E$.
5. Démontrer que l'intersection de deux sev d'un ev $E$ est un sev de $E$.
6. Démontrer que l'application $I : \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t).e^t\,dt \end{array}\right.$ est bien définie, $\mathbb{C}$-linéaire.
7. Soit $u$, $v$ deux suites géométriques réelles de raisons respectives $q$ et $r$. Démontrer que l'application $CL$ : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda,\mu) & \mapsto & \lambda.u+\mu.v \end{array}\right.$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Est-elle surjective ? A quelle condition sur $q,r$ est-elle injective ?
8. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des sev respectivement de $E$ et $F$ et détermination de ces espaces sur un exemple.
9. Caractérisation de l'injectivité par le noyau nul : démonstration et application à un exemple simple.



Wildlife day shifts

## PRÉVISIONS POUR LA QUINZAINE SUIVANTE

— Algèbre linéaire abstraite : Coordonnées dans une base, matrices d'applications linéaires, changement de base ; exemples.
— Statistiques

BONNES VACANCES ET JOYEUSES FÊTES !