Programme de Colles 08

Fondamentaux d'algèbre linéaire : bases et matrices

21/01-01/02

PROGRAMME

— Révisions d'Algèbre et d'Algèbre linéaire de première année dans les espaces numériques $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ *y compris le théorème du rang pour les matrices*.

— Fondamentaux d'algèbre linéaire.

1. Définitions d'un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-ev E, d'un sev de E. Exemples (espaces et sous-espaces de fonctions, de suites, de polynômes, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$)
2. Intersection de sev.
3. Définition d'une application linéaire $E \to F$, (morphismes, endomorphismes, formes linéaires), notations $\mathscr{L}(E,F), \mathscr{L}(E)$. Exemples variés (évaluation, app.lin. canoniquement associée à une matrice, dérivation, intégration, décalage). Endomorphismes obtenus par restriction de l'image.
4. Sev engendré par une famille finie de vecteurs, famille génératrice d'un sev. Notation Vect $\langle u_1, .u_n\rangle$. Ecriture de solutions de problèmes linéaires homogènes variés sous cette forme (récurrences linéaires, équations différentielles linéaires).
5. Opérations sur les applications linéaires, composition, réciproque, notation f^n pour $f \in \mathscr{L}(E), n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$
6. Noyau, image : caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
7. Familles libres. Exemples de familles libres dans des espaces de fonctions, de polynômes et de matrices.
8. Bases en dimension finie. Coordonnées dans une base.
9. Détermination de la dimension d'un $\mathbb{K}$-ev. Arguments de dimension. Rang d'une famille de vecteurs.

⋆⋆⋆

10. Rang d'une application linéaire, d'une matrice. Liens entre ces différentes notions de rang.
11. Inversibilité d'une application linéaire et dimension.
12. Matrices d'applications linéaires.
13. Matrices de passage, formules de changement de bases.
14. Théorème du rang « abstrait »

QUESTIONS DE COURS

1. Montrer que l'application $u : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^\mathbb{R}$ définie par
$$\forall f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}), u(f) = \left(x \mapsto \int_0^1 (x-t)^2.f(t)\, dt\right)$$
est bien définie, linéaire et que par restriction, elle définit un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
2. Soit $D : \mathbb{C}^\mathbb{N} \to \mathbb{C}^\mathbb{N}$ l'application linéaire de décalage définie par $D(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\psi = D^2 - 5.D + 6.i_{\mathbb{C}^\mathbb{N}}$. Montrer que par restriction, D définit un endomorphisme de Ker ψ.
3. Dans l'exemple précédent, déterminer une base de Ker ψ.
4. Démonstration type qu'une famille de vecteurs est libre et application sur un exemple de type fonctions, polynômes ou suites.
5. Exemple simple de détermination du rang d'une famille de vecteurs d'un ev E via leurs coordonnées dans une base.

⋆⋆⋆

6. Démonstration du résultat suivant : Soient E,F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{E} = (e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E. Si $f(\mathscr{E}) := (f(e_1),\dots,f(e_n))$ est libre dans F alors $\mathscr{E}$ est libre dans E.
7. Démonstration du résultat suivant : Soient E,F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, *injective* et $\mathscr{E} = (e_1,\dots,e_n)$ une famille *libre* de vecteurs de E. Alors $f(\mathscr{E}) := (f(e_1),\dots,f(e_n))$ est libre dans F.
8. Construction de matrices d'application linéaire à mettre en oeuvre sur des exemples facilement calculables.
9. Calcul de matrices d'endomorphismes via la formule du changement de base sur des exemples concrets.

Les points après ⋆⋆⋆ sont pour la deuxième semaine.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE

— Diagonalisation.

— $\mathbb{R}^n$ Euclidien ou Statistiques.