Programme de Colles 09

Matrices d'applications linéaires–Diagonalisations
03/02–06/03

PROGRAMME

— Algèbre linéaire : tout le chapitre
— Matrices d'applications linéaires/ formules de changement de base

⋆⋆⋆

— Diagonalisation
1. Intérêt de la diagonalisation pour le calcul de puissances de matrices et la résolution de systèmes différentiels linéaires.
2. Application aux chaines de MARKOV, *c.f.* chapitre proba
3. Définitions : vecteurs propres, valeurs propres, espaces propres d'un endomorphisme et d'une matrice.
4. Inversibilité et valeurs propres.
5. Définitions : endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$.
6. Calcul des valeurs propres d'une matrice par discussion sur le rang de $M-\lambda.I$. Cas particulier des matrices 2x2, des matrices triangulaires.
7. Valeurs propres d'une matrice et de sa transposée.
8. Familles libres et bases obtenues par juxtaposition de familles libres de v.p. associés à des v.p. distinctes.
9. Critères de diagonalisibilité
   (a) Le cas de n valeurs propres distinctes.
   (b) CNS portant sur la somme des dimensions des sev propres.
   (c) Le cas des matrices symétriques réelles. (le fait que la matrice de passage puisse être choisie de sorte que son inverse soit sa transposée sera vue dans le prochain prochain chapitre).

QUESTIONS DE COURS

1. Construction des matrices d'un endomorphisme relativement à deux bases dans un cas concret et vérification de la formule de changement de base.
2. Construction d'une matrice de passage entre deux bases et epxlication de la formule de changement de bases pour une application linéaire $E \to F$.

⋆⋆⋆

3. Mise en place d'une matrice de chaine de MARKOV sur un exemple et preuve, sur cet exemple, que 1 est valeur propre de cette matrice.
4. Traitement d'un système différentiel d'ordre 1 via l'écriture matricielle et la diagonalisation.
5. Démonstration du fait que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ sont valeurs propres *distinctes* d'un endomorphisme, associées aux vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 alors (v_1, v_2, v_3) est libre.
6. Démonstration du fait que si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ sont valeurs propres *distinctes* d'un endomorphisme (en dimension finie), $\mathscr{V}_1$, une base de l'espace propre associé à λ_1, $\mathscr{V}_2$, une base de l'espace propre associé à λ_2, alors $\mathscr{V}_1 \# \mathscr{V}_2$, la famille obtenue par juxtaposition de $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$, est libre dans E.

Ce qui est après les ⋆⋆⋆ est pour la deuxième semaine (hopefully).

PRÉVISIONS POUR LA QUINZAINE SUIVANTE

— Espaces vectoriels euclidiens.
— Théorèmes limite en probabilités. Statistique d'échantillonnage.