Programme de Colles 10

Diagonalisations, produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$
09/03–20/03

PROGRAMME

— Diagonalisation
1. Intérêt de la diagonalisation pour le calcul de puissances de matrices.
2. Application aux chaines de MARKOV, *c.f.* chapitre proba
3. Définitions : vecteurs propres, valeurs propres, espaces propres d'un endomorphisme et d'une matrice.
4. Calcul des valeurs propres d'une matrice par discussion sur le rang de $M - \lambda.I$. Cas particulier des matrices 2x2, des matrices triangulaires
5. Valeurs propres d'une matrice et de sa transposée.
6. Familles libres et bases obtenues par juxtaposition de familles libres de v.p. associés à des v.p. distinctes.
7. Critères de diagonalisibilité
   (a) Le cas de n valeurs propres distinctes et CNS portant sur la somme des dimensions des sev propres.
   (b) Le cas des matrices symétriques réelles.
8. Technique du polynôme annulateur sur un exemple.

— Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$
1. Définitions du produit scalaire et de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, écriture matricielle.
2. Propriétés élémentaires : linéarité, symétrie
3. Orthogonalité et théorème de PYTHAGORE. Dessins
4. Inégalités : CAUCHY–SCHWARZ, inégalité triangulaire
5. Familles orthogonales, orthonormales, bases. Caractérisations matricielles.
6. Exercice : Des vecteurs propres d'une matrice symétrique réelle associés à des v.p. distinctes sont orthogonaux.
7. Enoncé du théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles. Commentaires, détermination d'une B.O.N. de diagonalisation à partir d'une base de diagonalisation.
8. Existence d'une BON d'un sev F de $\mathbb{R}^n$.

$\star\star\star$

9. Projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et caractérisation matricielle d'une projection orthogonale.
10. La projection orthogonale d'un point sur un sev F réalise la distance du point à F.

QUESTIONS DE COURS

1. Définitions de valeurs propres, vecteurs propres et espaces propres d'une matrice carrée.
2. Démontrer qu'une matrice et sa transposée ont même spectre. Application aux matrices de transition des chaines de MARKOV.
3. Enoncé de la CNS de diagonalisabilité d'une matrice portant sur la somme des dimensions des espaces propres.
4. Soit P un polynôme non nul, M une matrice carrée telle que $P(M) = 0$. Montrer que si λ v.p. de M alors $P(\lambda) = 0$.
5. Si λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ sont valeurs propres *distinctes* d'une matrice symétrique réelle associées respectivement aux vecteurs propres v_1 et v_2 alors v_1 et v_2 sont orthogonaux.
6. Sur un exemple : Etant donnés deux vecteurs u et v dans $\mathbb{R}^n$, non colinéaires, construire une BON de $F = \text{Vect}\langle u, v\rangle$.
7. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^n$.

$\star\star\star$

8. Equivalence entre définition officielle et caractérisation matricielle d'une projection orthogonale sur un sev F (*i.e.* $P^2 = P$, ${}^tP = P$ et $\text{Im}\, P = F$).
9. Etablissement de la formule $P = V.({}^tV.V)^{-1}.{}^tV$ donnant la matrice (relativement à la base canonique) de projection sur $F = \text{Vect}\left\langle V_1, \dots, V_p\right\rangle$ avec $V = (V_1|\dots|V_p)$.

Les points après $\star\star\star$ sont au programme de la deuxième semaine. Les fondamentaux sur la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$ seront traités lundi 09/03 et mardi 10/03.

PRÉVISIONS POUR LA QUINZAINE SUIVANTE

— Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
— Théorèmes limite en probabilités, application en statistique d'échantillonnage.