Programme de Colles 11

Orthogonalité, Théorèmes Limite, Statistiques et Séries

Avec une tout petit peu de variables aléatoires discrètes dedans

23/03–03/04

PROGRAMME

- Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. *c.f.* Programme précédent.
- Théorèmes limite en probabilité, application aux statistiques.
  1. Loi faible des grands nombres, Utilisation(s) en simulation
  2. Théorème central limite.
  3. Statistiques d'échantillonnage : Echantillon, Test d'hypothèse statistique, test de conformité d'une moyenne et intervalle de confiance pour la moyenne.
- Series
  1. Series, Series convergentes, définitions, divergence grossière.
  2. Exemples : séries géométriques, séries télescopiques, séries géométriques dérivées $\sum_{n\geq 0} n.q^n$, $\sum_{n\geq 0} n(n-1).q^n$, séries de t.g. de la forme $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$
  3. Le théorème de comparaison pour les séries à termes ≥ 0
  4. Exemples : série harmonique, série de RIEMANN $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

     $\star\star\star$

  5. Critère de convergence absolue, exemples
  6. Série exponentielle, convergence et valeur de la somme.
- Variables aléatoires discrètes
  1. Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$. Définition comme loi du rang du premier succès dans un schéma de BERNOULLI. Loi, espérance, variance.
  2. Loi de POISSON de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$. Présentation comme limite de binomiales avec $n \to +\infty$ et espérance constante, valant λ.

QUESTIONS DE COURS

1. Une diagonalisation concrète de matrice symétrique réelle avec matrice de passage orthogonale.
2. Enoncé de la loi faible des grands nombres. Preuve dans le cas d'un échantillon d'une v.a. admettant une variance et utilisation de l'inégalité de BIENAYMÉ–TCHEBYCHEFF.
3. Utilisation de la loi des grands nombres pour construire une fonction Python calculant une estimation de la fonction de répartition d'une v.a. réelle X donnée par une fonction Python `X()` quelconque. Implémentation machine.
4. Enoncé du théorème central limite (les deux versions); construction de l'intervalle de confiance pour la moyenne d'une série statistique.
5. Valeurs des sommes de séries géométriques dérivées première et seconde.

$\star\star\star$

6. Sur un exemple relativement simple, mise en oeuvre du thm de comparaison pour les séries à termes positifs, éventuellement suivi du théorème $ACV \Rightarrow CV$ et éventuellement précédé d'une comparaison asymptotique.
7. Valeurs des sommes des séries exponentielle, $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
8. Valeurs de l'espérance et de la variance d'une loi $\mathscr{G}(\mathbb{N}^*, p)$.
9. Valeurs de l'espérance et de la variance d'une loi $\mathscr{P}(\lambda)$.
10. Enoncé correct et démonstration du fait qu'une binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ avec n grand et $p = \frac{\lambda}{n}$ est quasiment une loi de POISSON $\mathscr{P}(\lambda)$.
11. Simulation informatique d'une variable géométrique, d'une variable de POISSON.

Les points après $\star\star\star$ sont pour la deuxième semaine.