# Fonctions réelles de deux variables réelles

12 septembre 2019

## Définition

- *Une fonction (à valeur) réelle de deux variables réelles est une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D$ est une partie de $\mathbb{R}^2$.*
- *Le graphe d'une telle fonction est la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par*

$$G_f = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R},\ z = f(x, y)\}$$

- *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau $\lambda$ est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$L_{\lambda,f} = \{(x, y) \in D,\ f(x, y) = \lambda\}$$

- *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble de surniveau $\lambda$ est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$S_{\lambda,f} = \{(x, y) \in D,\ f(x, y) > \lambda\}$$

Des exemples par ordre de complexité croissante (en fixant une partie $D$ de $\mathbb{R}^2$) :

- Fonctions constantes $f(x, y) = a$ ;
- Fonctions affines $f(x, y) = a.x + by + c$ ;
- Fonctions (polynomiales) quadratiques $f(x, y) = a.x^2 + b.y^2 + c.x.y$
- Fonctions polynomiales $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i.y^j$, combinaisons linéaires des monômes $(x, y) \in D \mapsto x^i.y_j$ où $i, j \in \mathbb{N}$ ;
- Fonctions définies par composition à gauche avec une fonction de variable réelle, p.ex. $(x, y) \in D \mapsto e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$. Ce type de formule peut donner lieu à des problèmes d'*ensemble de définition*, d'où la possibilité de restreindre le domaine de définition à une partie $D$ de $\mathbb{R}^2$.

On peut représenter graphiquement une fonction réelle de deux variables réelles par représentant son graphe (en général une surface dans $\mathbb{R}^3$ et donc en 3D [1]) ou, à la manière d'une carte topographique, en 2D, en zonant le plan par lignes et ensembles de sur-(sous)-niveau pertinents.
Exemples : affines, quadratiques, à la machine carte topographique.

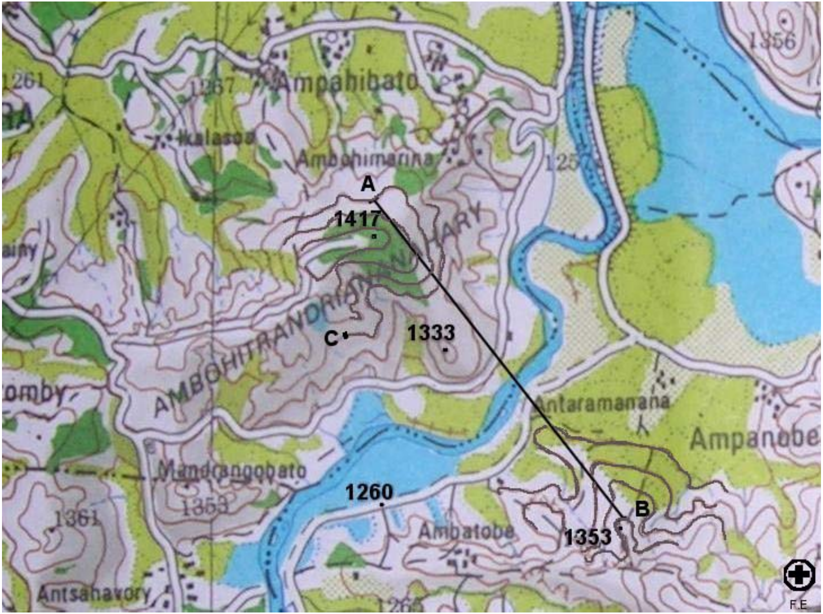


FIGURE – Les lignes de niveau sur une carte topographique.

Il y a pour les fonctions de deux variables réelles une notion de limite en un point $(x_0, y_0)$ du plan, variante de la notion de limite d'une fonction d'une variable réelle en un point $x_0$ de la droite.
Cette notion est *stricto sensu* hors de notre programme mais sans y faire allusion, on ne peut pas comprendre le reste du discours.
La distance entre deux arguments de la fonction n'est plus mesurée par la valeur absolue de la différence mais par la norme (euclidienne) de la différence et mène à la définition suivante :

## Définition

*Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction,* $\ell$ *un nombre réel,* $(x_0, y_0)$ *un point du plan. On dit que* $f$ *admet pour limite* $\ell$ *en* $(x_0, y_0)$*, ce que l'on note*

$$f(x, y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} \ell,$$

*si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in D,$$
$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \epsilon$$

La question de la position du point $(x_0, y_0)$ relativement à l'ensemble $D$ amène à s'intéresser aux points $(x_0, y_0)$ qui sont « intérieurs » à $D$, *i.e.* tels qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta_0 \Rightarrow (x, y) \in D$$

Un ensemble $D$ dont tous les points sont intérieurs à $D$ est appelé un ensemble *ouvert dans* $\mathbb{R}^2$ et le seul exemple que nous ayons au programme est l'exemple des *pavés ouverts*, *i.e.* les parties de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la forme $I \times J$ où $I$ et $J$ sont des intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$. (Dessins ! ! !)

### Définition

- *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *et* $(x_0, y_0) \in D$. *On dit que* $f$ *est continue en* $(x_0, y_0)$ *si*
$$f(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} f(x_0, y_0)$$
- *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2$ *et* $P \subset D$. *(Le programmme nous impose de travailler sur* $P$*, un pavé ouvert) On dit que* $f$ *est continue sur* $P$ *si* $f$ *est continue en tout* $(x_0, y_0) \in P$. *On note ce fait par la locution « $f$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $P$ ».*

La continuité de $f$ au point $(0, 0)$ est équivalente à l'existence du DL à l'ordre 0 en $(x_0, y_0)$ :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + o\,(1)$$

où $o\,(1)$ est une fonction de limite 0 lorsque $(h, k) \to (0, 0)$.

Exemples pour l'établissement d'une continuité par analyse des opérations et compositions présentes dans une formule) :

- (Admis) Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Les exemples les plus simples sont les constantes $(x, y) \mapsto a$ et les fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$.
- De ceci, on déduit qu'une composée de fonction d'une variable réelle continue sur $\mathbb{R}$ par une fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par exemple $(x, y) \mapsto e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Plus généralement, si la composition « se passe bien », on a continuité de la fonction composée. Par exemple

$$f : (x, y) \in D \mapsto \ln(1 - (x^2 + y^2))$$

est continue sur tout pavé ouvert contenu dans le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\}$. En effet, soit $P$ un tel pavé ouvert.

1. La fonction $p : (x, y) \mapsto 1 - (x^2 + y^2)$ est continue sur $P$ car elle y est polynomiale. Elle y est à valeurs dans $]0, +\infty[$.
2. La fonction $\ln$ est $\mathscr{C}^0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. $f = \ln \circ p$ est donc continue sur $P$.

La question de la différentiabilité d'une fonction de deux variables en un point $(x_0, y_0)$ est la question[2] de l'existence d'un DL d'ordre 1 en $(x_0, y_0)$, *i.e.* la question de l'existence de $a$ et $b$ tels que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + a.h + b.k + o\left(\|(h, k)\|\right)$$

où $o\left(\|(h, k)\|\right)$ est une fonction (infinment petit d'ordre 1) telle que

$$\frac{o\left(\|(h, k)\|\right)}{\|(h, k)\|} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\to} 0$$

Il s'agit de la possibilité d'approximer $f(x, y)$ au voisinage de $(x_0, y_0)$ par une fonction affine de deux variables.

En physique on note $h = dx$, l'accroissement de la variable $x$, $k = dy$, l'accroissement de la variable $y$, et on écrit

$$f(x+dx, y+dy) = f(x,y) + a.dx + b.dy \text{ à l'ordre 1}$$

Une remarque de notation importante : En mathématiques, usuellement, les lettres utilisées pour définir une fonction n'ont pas d'importance (invariance d'une proposition logique par substitution de noms de variables muettes) et les deux définitions de la fonction $f$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 + 2.y^2$$

et

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ f(s,t) = s^2 + 2.t^2$$

sont logiquement strictement identiques.

Pour les fonctions de deux variables, nous faisons une entorse à cette règle ! ! ! Cette entorse, bien comprise, amène des simplifactions d'écriture notable (attention à lever les ambiguités) et est compatible avec l'usage en physique ou en théorie des équations différentielles. On dira donc soit $f$ la fonction des deux variables $x$ et $y$ définie par la formule $f(x, y) = ..$ en n'oubliant pas les lettres ayant servi à cette définition.

Etant donnée une fonction $f$ des deux variables réelles $x$ et $y$ définie par $f(x, y) = ...$ pour $(x, y) \in P$, où $P = I \times J$ est un pavé ouvert dans $\mathbb{R}^2$, on peut, pour chaque point $(x_0, y_0) \in P$, définir deux fonctions d'une variable réelle, les fonctions partielles.

- La fonction partielle $f_{y=y_0}$ est fonction de la variable réelle $x$ définie par $f_{y=y_0}(x) = f(x, y_0)$. (On maintient donc $y$ constant à $y_0$). C'est une fonction définie sur l'intervalle ouvert $I$ : $f_{y=y_0} : I \to \mathbb{R}$.
- La fonction partielle $f_{x=x_0}$ est fonction de la variable réelle $y$ définie par $f_{x=x_0}(y) = f(x_0, y)$. (On maintient donc $x$ constant à $x_0$). C'est une fonction définie sur l'intervalle ouvert $J$ : $f_{x=x_0} : J \to \mathbb{R}$.

On note, sous réserve d'existence des nombres dérivés incriminés,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y=y_0}(x_0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x=x_0}(y_0)$$

De la sorte (imaginons qu'il n'y a jamais de réserve lorsque $(x_0, y_0)$ est un point quelconque de $P$ ! !), on définit deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ des deux variables $x$ et $y$. Ce sont les deux dérivées partieles de $f$.
Exemples de calcul. D'un point de vue pratique, pour calculer les dérivées partielles d'une fonction $f$, on laisse tomber les indices $x_0 \to x$, $y_0 \to y$.

### Proposition-Définition

*Soit $f : P = I \times J = \{(x, y),\ x \in I,\ y \in J\} \to \mathbb{R}$ une fonction des deux variables réelles $x$ et $y$ ; Si les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bien définies sur $P$ et y sont de classe $\mathscr{C}^0$, on dit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $P$. Dans ce cas, en tout $(x_0, y_0) \in P$, on a le DL1*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).k + o\left(\|(h, k)\|\right)$$

La formule précédente s'écrit, en physique,

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).\delta x + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).\delta y \text{ à l'ordre 1}$$

ou encore plus résumé (on oublie totalement la référence au point), en notant $\delta f(x,y) = f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x,y)$,

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}.\delta x + \frac{\partial f}{\partial x}.\delta y \text{ à l'ordre 1}$$

### Proposition-Définition (Principe de FERMAT)

*Si $f : D \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur le pavé ouvert $P \subset D$ admet un extremum en $(x_0, y_0) \in P$ alors le point $(x_0, y_0)$ est critique pour $f$, i.e. , par définition*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \; et \; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Exemples.

Pour illustrer ceci, si on pense à une fonction $f$ représentée par une carte topographique d'une région, la valeur de $f$ en $(x, y)$ étant l'altitude au point de coordonnées $(x, y)$, $X(t)$, $Y(t)$ décrit les coordonnées d'un promeneur à l'instant $t$ alors $h(t) = f(X(t), Y(t))$ est l'altitude du promeneur à l'instant $t$.

### Théorème

*Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $P$, $X$ et $Y$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $T$ alors $h$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $T$ avec*

$$\forall t \in T,\ h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t)).X'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t)).Y'(t)$$

En physique, ceci se réécrit en termes de variables physiques : $F$ une variable dépendant de $x$ et $y$ ($F = f(x, y)$), $x$, $y$ des variables dépendant de la variable $t$ alors

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

Que signifie cette formule si le promeneur (un peu fatigué) se promène dans la ligne de niveau ?
Que signifie cette formule si le promeneur (très en forme) veut monter le plus rapidement possible ?

### Définition

*Si $f : D \to \mathbb{R}$, où $P \subset D$ est un pavé ouvert, est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $P$ telle que les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont elle-même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $P$, on dit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $P$.*

Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $P$, on peut définir quatre dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x},\ \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y},\ \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x},\ \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y},$$

notées respectivement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Le remarquable théorème de SCHWARZ affirme que :

**Théorème (SCHWARZ)**

*Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $P$, alors, sur $P$ :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, .$$

On peut vérifier que ce résultat, valable pour des fonctions très abstraites, sans formule *a priori* , se vérifie aisément pour des monômes, des fonctions polynômiales, des composées à gauche par des fonctions d'une variable réelle, etc...(Exemples ! ! !)