Corrections choisies 02

Révisions Suites/Equations différentielles

Correction Ex.–6 Soit u une suite arithmético-géométrique (on suppose $q \neq 1$), définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q.u_n + r$$

En posant ℓ la solution dse l'équation $\ell = q.\ell + r$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \ell = q.(u_n - \ell)$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n(u_0 - \ell) + \ell$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (q^n(u_0 - \ell) + \ell) = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}(u_0 - \ell) + (n+1)\ell$$

Correction Ex.–32 Soit

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. On a $\det(> P) = -2$ et donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Par le calcul

$$A.P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc $P^{-1}.A.P = D$ où

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1}$ où

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a (récurrence facile sur $n \in \mathbb{N}$ à partir de $A = P.D.P^{-1}$ et de $A^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1}$) que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, A^n = P.D^n.P^{-1}$$

De façon explicite (calculs non développés ici)

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-2)^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-2)^{-n} + 1 & -(-2)^{-n} + 1 \\ -(-2)^{-n} + 1 & (-2)^{-n} + 1 \end{pmatrix}$$

3. On considère une suite récurrente (vectorielle) donnée par son premier terme U_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = (I_2 + A)..U_n$$

On a par une récurrence facile (à rédiger ?) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (I_2 + A)^n.U_0$$

On calcule $(I_2 + A)^n$ par la même technique que précédemment en constatant que

$$I_2 + A = P.(I_2 + D).P^{-1} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, (I_2 + A)^n = P.(I_2 + D)^n.P^{-1}$$

avec

$$(I_2 + D)^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Tous calculs faits, il vient, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(I_2 + A)^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^{-n} + 2^n & -2^{-n} + 2^n \\ -2^{-n} + 2^n & 2^{-n} + 2^n \end{pmatrix}$$

En notant $U_n = (a_n, b_n)$ (en couple), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2}(2^{-n} + 2^n)a_0 + \frac{1}{2}(-2^{-n} + 2^n)b_0, b_n = \frac{1}{2}(-2^{-n} + 2^n)b_0 + \frac{1}{2}(+2^{-n} + 2^n)b_0$$

Les composantes de U_n admettent une limite finie lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $a_0 + b_0 = 0$. Dans ce cas $a_n, b_n \to 0$.
4. On considère le problème de CAUCHY

$$U(0) = U_0 \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq 0, U'(t) = A.U(t)$$

On peut poser $V(t) = P^{-1}.U(t)$, *i.e.* $U(t) = P.V(t)$, $V'(t) = P.U(t)$ (Attn, cette identité de dérivation sort un peu du cadre de notre programme) et U est solution de l'EDO précédente si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, V'(t) = P^{-1}.A.P.V(t) = D.V(t)$$

En écrivant ce système différentiel composante par composante, en voyant que chaque ligne est une équation différentielle très simple, on obtient par simple résolution que

$$\forall t \in \mathbb{R}, V(t) = \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t}.V_1(0) \\ e^t.V_2(0) \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}, U(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t}.V_1(0) + e^t.V_2(0) \\ e^{-2t}.V_1(0) + e^t.V_2(0) \end{pmatrix}$$

Les composantes de $U(t)$ admettent une limite finie lorsque $t \to +\infty$ si et seulement si $V_2(0) = 0$, c'est à dire si et seulement si $U_1(0) + U_2(0) = 0$.

Dans ce cas, la limite de chaque composante de $U(t)$ est nulle.