Corrections choisies 03

Révisions Algèbre: Complexes

Correction Ex.–19 Soient A, B et C trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. On peut poser

$$z = z_A - z_B, z' = z_B - z_C$$

L'inégalité triangulaire se traduit par

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

ce qui donne :

$$|z_A - z_C| \leq |z_A - z_B| + |z_B - z_C|$$

Dans un triangle ABC, la longueur AC est inférieure à la somme des longueurs AB et BC.

Correction Ex.–20 Déterminer dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $|z - 3i| = 5$: C'est le cercle de centre d'affixe $3i$, de rayon 5.
2. $z\bar{z} = 4$. Ceci équivaut à $|z| = 2$, c'est donc le cercle de center 0 de rayon 2.
3. $\arg z = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Il s'agit de la demi-droite ouverte d'extrémité 0 faisant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec le demi-axe réel positif. Elle a pour équation (car elle passe par le point $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $y = \sqrt{3}.x$, $x > 0$.
4. $\arg z = \frac{\pi}{3}\ [\pi]$. Il s'agit de la réunion de la demi-droite précédente avec sa symétrique dans la symétrie centrale de centre 0, autrement dit c'est la droite d'équation $y = \sqrt{3}.x$ privée du point 0.
5. $z + \frac{1}{z}$ soit réel. On a, pour $z \neq 0$,
$$z + \frac{1}{z} = \frac{|z|^2.z + \bar{z}}{|z|^2}$$
et $z + \frac{1}{z}$ est réel si et seulement si $|z|^2.z + \bar{z}$ a une partie imaginaire nulle. Ecrivons $z = x + i.y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a alors
$$\mathrm{Im}(|z|^2.z + \bar{z}) = (x^2 + y^2 - 1).y$$
et donc $z + \frac{1}{z}$ est réel si et seulement si $(x^2 + y^2 - 1).y = 0$, *i.e.* $y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$. L'ensemble cherché est donc la réunion du cercle unité et de l'axe réel privé du point 0.

Correction Ex.–21 Soient trois points A, B et C d'affixes respectives a, b, c.

1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, c'est à dire (si $a \neq c$), ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}, b - a = \lambda.(c - a)$ si et seulement si
$$\mathrm{Im}(b - a)\overline{(c - a)} = 0$$
(Cette condition est aussi valable si $a = c$).
2. Le triangle ABC soit rectangle en A si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont perpendiculaires, c'est à dire (si $a \neq c$), ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}, b - a = i.\lambda.(c - a)$ ($i.u$ et u sont perpendiculaires) si et seulement si
$$\mathrm{Re}(b - a)\overline{(c - a)} = 0$$
(Cette condition est aussi valable si $a = c$).