Corrections choisies 01

Probabilités : des modèles finis aux modèles généraux

Correction Ex.–4

1. Soit X une v.a. uniforme sur $\{0,\dots,n\}$ (qui comporte $n+1$ éléments), on a

$$\forall k \in \{0,\dots,n\}, \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k.\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n}{2}$$

De même, si Y est une v.a. uniforme sur $\{1,\dots,n\}$ (qui comporte n éléments), on a

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$$

et donc

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} k.\mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$$

2. Soit Z une v.a. uniforme sur l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 500, on a $Z=2X$ où X est uniforme sur sur $0,..,250$ et donc

$$\mathbb{E}(Z) = 2\mathbb{E}(X) = 2\frac{250}{2} = 250$$

Soit W une v.a. uniforme sur l'ensemble des entiers naturels, alors $Z = W-1$ est uniforme sur l'ensemble des entiers pairs inférieurs à 500 et donc $250 = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(W)-1$ et finalement $\mathbb{E}(W) = 251$.

Correction Ex.–5

1. Appelons U_1, U_2 les résultats des deux tirages. Ce sont des variables uniformes sur $\{1,\dots,n\}$, uniformément distribuées. On a $X = \min(U_1,U_2)$, $Y = \min(U_1,U_2)$.

Si $(k,\ell) \in \{1,\dots,n\}$ alors

1. Si $k=\ell$, $\mathbb{P}((X,Y)=(k,k)) = \mathbb{P}((U_1,U_2)=(k,k)) \overset{\text{indep.}}{=} \mathbb{P}(U_1=k)\mathbb{P}(U_2=k) = \frac{1}{n^2}$,
2. Si $1 \leq \ell < k \leq n$,
$$\mathbb{P}((X,Y)=(k,\ell)) = \mathbb{P}(U_1=k,U_2=\ell)+\mathbb{P}(U_1=\ell,U_2=k) = \frac{2}{n^2}$$

2. On a en décomposant d'une part suivant les valeurs de Y, d'autre part suivant les valeurs de X (*i.e.* en utilisant les s.c.e.i $((Y=\ell),\ell=1\dots,n)$ et $((X=k),k=1\dots,n))$, Pour $k\in\{1,\dots,n\}$, (à ce moment ℓ est muette dans la somme) et pour $\ell \in \{1,\dots,n\}$ (et là, c'est k qui est muette)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}((X,Y)=(k,\ell)) = \frac{2k-1}{n^2}\\
\mathbb{P}(Y=\ell) &= \sum_{k=\ell}^{n} \mathbb{P}((X,Y)=(k,\ell)) = \frac{2(n-\ell)+1}{n^2}
\end{aligned}$$

Passons maintenant aux calculs des espérances. Rappelons que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$. La v.a. réelle X est à valeurs dans $\{1,\dots,n\}$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k.\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k.\frac{2k-1}{n^2}\\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{3n} - \frac{(n+1)}{2n}\\
&= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}
\end{aligned}$$

De même, la v.a. réelle Y est à valeurs dans $\{1,\ldots,n\}$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=\ell}^{n} \ell.\mathbb{P}(Y=\ell) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell.\frac{2(n-\ell)+1}{n^2} \\
&= \frac{2n+1}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n}\ell - \frac{2}{n^2}\sum_{k=\ell}^{n}\ell^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}
\end{aligned}$$

On peut remarquer que $X+Y=U_1+U_2$ et donc, comme (espérance de v.a. uniforme sur $\{1,\ldots,n\}$) $\mathbb{E}(U_1)=\mathbb{E}(U_2)=\frac{n}{2}$, par linéarité de l'espérance, on doit avoir

$$\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)=n+1$$

Dans notre cas, cette vérification de cohérence est correcte :

$$\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}=n+1$$

3. Z est à valeurs dans $\{0,\ldots,n-1\}$. On a, pour ν dans cet ensemble, en décomposant à l'aide du s.c.e.i $((X=k),k=1\ldots,n)$,

1. Si $\nu>0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=\nu) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k \text{ et } Z=\nu) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=k-\nu) \\
&= \sum_{k=\nu+1}^{n}\mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=k-\nu) = 2\frac{n-\nu}{n^2}
\end{aligned}$$

2. Si $\nu=0$, $\mathbb{P}(Z=\nu)=\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=k)=\frac{1}{n}$.

On a alors, par la formule de définition de l'espérance

$$\mathbb{E}(Z)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu.\mathbb{P}(Z=\nu)=2.\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu.(n-\nu)$$

et donc, en utilisant sommes des premiers entiers et carrés d'entiers

$$\mathbb{E}(Z)=2\frac{1}{n^2}\left(n.\frac{(n-1).n}{2}-\frac{(n-1).n.(2n-1)}{6}\right)=\frac{n.(n-1)}{3n^2}(3n-(2n-1))=\frac{n^2-1}{3n}$$

Remarquons que comme $Z=X-Y$, par linéarité de l'espérance, on peut calculer l'espérance de Z sans calculer la loi de Z :

$$\mathbb{E}(Z)=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}=\frac{(n+1)(2n-2)}{6n}=\frac{n^2-1}{3n}$$

Pour la variance, on a

$$\mathbb{E}(Z^2)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu^2.\mathbb{P}(Z=\nu)=2.\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^2.(n-\nu)$$

Pour finir le calcul, on peut soit développer et il faut alors utiliser une formule sur la somme des premiers cubes, soit (plus malin) remarquer que par changement d'indice $\nu'=n-\nu$, on a

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^2.(n-\nu)=\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^2.\nu$$

et donc, en sommant

$$2\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^2.(n-\nu)=\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu).\nu.(\nu+n-\nu))=n.\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu).\nu$$

et donc

$$\mathbb{E}(Z^2)=\frac{n}{2}.\mathbb{E}(Z)=\frac{n^2-1}{6}$$

et

$$\mathbb{V}(Z)=\mathbb{E}(Z^2)-\mathbb{E}(Z)^2=\frac{n^2-1}{3}.\frac{n^2+2}{6n^2}=\frac{(n^2-1)(n^2+2)}{18.n^2}$$

Correction Ex.–6

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, par la formule de transfert pour X appliquée à la fonction $h : t \mapsto 1\!\!1_{\{t \leq x\}}$, du fait de la relation $\mathbb{E}(1\!\!1_A) = \mathbb{P}(A)$ valable pour tout événement A,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{E}(1\!\!1_{\{X \leq x\}}) = \sum_{k=1}^{K} 1\!\!1_{\{x_k \leq x\}})\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k:x_k \leq x} \mathbb{P}(X = x_k)$$

2. Si de plus, les valeurs prises par X sont *positives*, on peut les classer par ordre croissant, ajouter 0 au besoin pour obtenir X est à valeurs dans $\{x_0, \ldots, x_K\}$ avec $x_0 = 0 < x_1 < \ldots x_K$.

$$1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X > x) \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} 1\!\!1_{\{x_k > x\}})\mathbb{P}(X = x_k) & \text{si } x_K > x > 0 \\ 0 & \text{si } x \geq x_K \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\, dx = \int_0^{x_K} \mathbb{P}(X > x)\, dx = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{K} 1\!\!1_{\{x_k > x\}})\mathbb{P}(X = x_k)\, dx$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\, dx = \sum_{k=1}^{K} \left(\int_0^{x_K} 1\!\!1_{\{x_k > x\}})\, dx \right) .\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{K} \left(\int_0^{x_k} dx \right) .\mathbb{P}(X = x_k)$$

et finalement on a

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\, dx = \sum_{k=1}^{K} x_k.\mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{E}(X).$$

Cette formule montre que pour une v.a. positive, la connaissance de sa fonction de répartition permet le calcul direct de son espérance, sans utiliser la formule usuelle de l'espérance.

En vue du chapitre suivant, on remarque que cette formule permet l'extension *théorique* de la notion d'espérance aux v.a. réelles positives ne prenant pas nécessairement un nombre fini de valeurs. Par exemple, si U est une v.a. uniforme sur $[0,1]$, *i.e.* une v.a. dont la fonction de répartition est donnée par

$$\forall u \in \mathbb{R}, F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$$

alors (on a simplifié $1 - F_U(u)$ directement)

$$\mathbb{E}(U) = \int_0^1 u\, du \left(= \frac{1}{2} \right)$$

et, peut-être de façon plus parlante, si $\phi : [0,1] \to [a,b] \subset \mathbb{R}^+$ est une fonction strictement croissante, de classe $\mathscr{C}^1$, de réciproque $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, si $V = \phi(U)$, de fonction de répartition

$$\forall v \in \mathbb{R}, F_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v < a \\ \phi^{-1}(v) & \text{si } a \leq v \leq b \\ 1 & \text{si } v \geq b \end{cases}$$

On a alors

$$\mathbb{E}(\phi(U)) = \mathbb{E}(V) = \int_a^b (1 - \phi^{-1}(v))\, dv$$

et, en intégrant par parties, puis en changeant de variable $(v = \phi(u), u = \phi^{-1}(v))$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi(U)) &= \left[v.(1 - \phi^{-1}(v)) \right]_a^b + \int_a^b v. \left(\phi^{-1} \right)'(v)\, dv \\ &= \int_0^1 \phi(u)\, du \end{aligned}$$

Cette dernière formule est la formule usuelle et pratique pour l'espérance d'une fonction de U. C'est celle-là qui sera utilisée prioritairement et non pas la formule démontrée dans l'exercice, de fait *hors-programme*.

Correction Ex.–7

1. Soit $X \sim \mathscr{U}_{\{0,\dots,n\}}$. En utilisant la formule de KOENIG–HUYGHENS, et les formules donnant les sommes des n premiuers entiers et premiers carrés d'entiers, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k^2 - \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 \\
&= \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6(n+1)} - \left(\frac{1}{n+1}\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{2.n.(2n+1)-3n^2}{12} = \frac{n^2+2.n}{12} = \frac{(n+1)^2-1}{12}
\end{aligned}$$

Si maintenant Y est uniforme sur $\{1,\dots,n\}$ alors $X' = Y-1$ est uniforme sur $\{0,\dots,n-1\}$ et (règles générales sur la variance : invariance par addition d'une constante), $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X') = \frac{n^2-1}{12}$

2. Soit U une v.a uniforme sur $\{0,\dots,250\}$ alors U est de variance

$$\sigma^2 = \frac{251^2-1}{12} = \frac{250\times 252}{12} = 250\times 21 = 5250.$$

Les v.a. $Z_p = 2U$ et $Z_i = 2U+1$ sont respectivement uniformes sur l'ensemble des entiers pairs de 0 à 500 et l'ensemble des entiers impairs de 1 à 501, leurs variances valent (règles sur les variances : $\mathbb{V}(\lambda.X+\mu) = \lambda^2\mathbb{V}(X)$) toutes deux $4\mathbb{V}(U) = 21000$.

NB : L'interprétation naturelle de la variance se fait plutôt en termes d'écart-type $\sqrt{\mathbb{V}(Z_{i,p})} = 10\sqrt{210} \simeq 144.91$.