

Corrections choisies 03

Intégrales généralisées

Correction Ex.-1 On suppose que la fonction f , continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles à une limite ℓ non nulle en l'infini.

Du fait de la continuité supposée de f , il est légitime de considérer la question de la convergence ou de la divergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

— Si $\ell > 0$, alors en utilisant la définition de $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$ avec $\varepsilon = \ell/2 > 0$, on obtient l'existence de $A > 0$ tel que

$$\forall t \geq A, f(t) \geq \ell/2$$

Montrons que $\int_A^{+\infty} f(t) dt$ est divergente vers $+\infty$, ce qui, via CHASLES, montrera la divergence de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Soit $T > A$, destiné à tendre vers $+\infty$, on a, par croissance de l'intégrale, que

$$\int_A^T f(t) dt \geq \int_A^T \ell/2 dx = \ell/2 \cdot (T - A) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} +\infty$$

L'intégrale généralisée $\int_A^{+\infty} f(t) dt$ est donc divergente vers $+\infty$, comme recherché.

— Si $\ell < 0$, alors la fonction $-f$ a pour limite $-\ell > 0$ en $+\infty$ et donc, par le point précédent, $\int_0^{+\infty} (-f(t)) dt$ diverge vers $+\infty$. On en déduit que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge vers $-\infty$.

Correction Ex.-2 L'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(x) dx$ est divergente. En effet, pour $X > 0$, on a

$$\int_1^X \sin(x) dx = \cos(1) - \cos(X)$$

et cette dernière quantité n'admet pas de limite lorsque $X \rightarrow +\infty$ (car $X \mapsto \cos X$ n'admet pas de limite en $+\infty$).

Correction Ex.-8 Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ est une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I (qu'il soit ouvert ou fermé), la distance parcourue par le mobile sur la trajectoire γ est par définition

$$D = \int_I |\gamma'(t)| dt,$$

cette intégrale étant, au besoin, à prendre au sens des intégrales généralisées¹.

1. Dans le cas où $I = [-\pi, \pi]$, $\gamma(s) = \cos s + i \sin s$, on a

$$\forall s \in I, \gamma'(s) = -\sin(s) + i \cos(s)$$

et donc

$$\forall s \in I, |\gamma'(s)| = 1$$

et donc

$$D = \int_{-\pi}^{+\pi} 1 ds = 2\pi$$

2. Dans le cas où $I = \mathbb{R}$,

$$\gamma(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i \frac{2t}{1+t^2}$$

,

$$\forall t \in I, \gamma'(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2} + i \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

et donc

$$\forall s \in I, |\gamma'(t)| = \frac{2}{(1+t^2)^2} \sqrt{4t^2 + (1-t^2)^2} = \frac{2}{(1+t^2)^2} \sqrt{(1+t^2)^2} = \frac{2}{1+t^2}$$

et donc (sous réserve de convergence de l'intégrale)

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+t^2} dt$$

et finalement (calcul classique avec arctan),

$$D = 2\pi$$

1. Si l'intégrale généralisée en question diverge vers $+\infty$, on dit que cette distance est infinie.

3. Les deux distances parcourues sont les mêmes. En traçant les courbes sous Python, on voit que dans le premier cas la trajectoire parcourue est tout le cercle (une fois, dans le sens trigo) et que dans le second cas, il s'agit du cercle privé du point d'affixe -1 .

Noter que l'on passe d'une intégrale à l'autre par le changement de variable généralisé $t = \tan \frac{s}{2}$, $dt = \frac{1}{2}(1+t^2) ds$, i.e. $ds = \frac{2}{1+t^2} dt$.

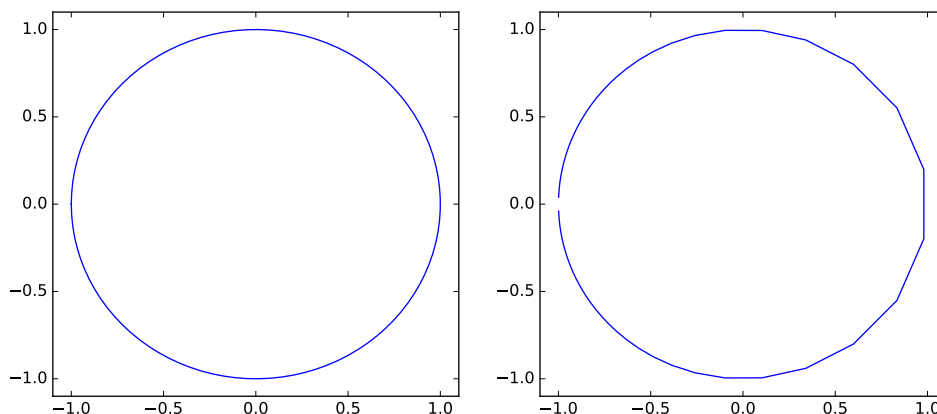


FIGURE 1 – Le cercle de gauche est celui du premier cas, celui de droite du second cas. Celui de droite ne pouvant être tracé sur tout $\mathbb{R}$, on voit qu'il manque une petite portion du côté du point d'affixe -1 .

Listing 1 – python/cercles.py

```
#Tracé de deux trajectoires
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#
fig,ax = plt.subplots(1,2,figsize=(12,5))#Préparation fenêtre avec 2 paires d'axes
#premier cas
s=np.linspace(-np.pi,+np.pi,100)
x=np.cos(s)
y=np.sin(s)
plt.sca(ax[0]) #choix du graphique 0 (gauche)
plt.xlim(-1.1,1.1);plt.ylim(-1.1,1.1);
plt.plot(x,y)
#2e cas
t=np.linspace(-50,50,500)
x=(1-t**2)/(1+t**2)
y=2*t/(1+t**2)
plt.sca(ax[1]) #choix du graphique 1 (droite)
plt.xlim(-1.1,1.1);plt.ylim(-1.1,1.1);
plt.plot(x,y)
#Sauvegarde
plt.savefig('cercles.pdf',format='pdf')
plt.show()
```