Corrections choisies 07

Algèbre linéaire. Généralités

Correction Ex.-2

1. C'est un sev. Le polynôme nul est de degré $\leq n$ par la convention $-\infty \leq n$. Si P et Q sont deux polynômes de degré $\leq n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, par les règles sur le degré, $\lambda.P + \mu.Q$ est de degré $\leq n$. C'est un exemple fondamental.
2. Non sev. Le polynôme nul n'est pas dans $F = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) \geq n\}$.
3. Non sev. Le polynôme nul n'est pas dans $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 1\}$,
4. Sev. Le polynôme nul s'écrit $0 = 0' + 0''$. Si P et $\tilde{P}$ sont deux polynômes dans F ss'écrivant respectivement $Q' + Q''$ et $\tilde{Q}' + \tilde{Q}''$, si $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$, alors $\lambda.P + \tilde{\lambda}.\tilde{P}$ s'écrit

$$\lambda.P + \tilde{\lambda}.\tilde{P} = \lambda.(Q' + Q'') + \tilde{\lambda}(\tilde{Q}' + \tilde{Q}'') = (\lambda.Q + \tilde{\lambda}.\tilde{Q})' + \lambda.Q + \tilde{\lambda}.\tilde{Q}''$$

et donc $\lambda.P + \tilde{\lambda}.\tilde{P} \in F$.

5. Non Sev. Si f est la fonction constante valant 1, $f \in F$ alors que $-f \notin F$.
6. Sev. La fonction nulle est de période de T et une combinaison linéaire de deux fonctions de même période T est encore une fonction de période T .

On peut remarquer que l'ensemble $G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ périodique pour une certaine période}\}$ n'est pas un sev de E . En effet, les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \cos(2\pi.x)$ sont périodiques (respectivement de périodes 2π et 1) alors que leur somme n'est pas périodique (ce n'est pas si facile¹ que ça).

7. Sev. La fonction nulle vérifie cette propriété et si $f, g \in F$ ($f(0) = f(1), g(0) = g(1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}, h = \lambda.f + \mu.g$ alors

$$h(0) = \lambda.f(0) + \mu.g(0) = \lambda.f(1) + \mu.g(1) = h(1)$$

et $h \in F$.

8. Non sev. Si f est la fonction $x \mapsto x$, $g = (x \mapsto x^3)$, $f, g \in F$ alors que $f - g \notin F$. Un polynôme qui s'annule deux fois est difficilement monotone, à moins d'être nul.
9. Sev. $F = \text{Vect}\langle u, v \rangle$.
10. Sev. la suite nulle est convergente. Une combinaison linéaire de deux suite conergentes est convergente (résultats d'analyse sur sommes et produits de suites convergentes)

1. Supposons que celle-ci est T périodique pour une certaine période $T > 0$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x+T) + \cos(2\pi(x+T)) = \cos(x) + \cos(2\pi.x)$$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x)\cos(T) - \sin(x)\sin(T) + \cos(2\pi.x)\cos(2\pi.T) - \sin(2\pi.x)\sin(2\pi.T) = \cos(x) + \cos(2\pi.x)$$

En utilisant le fait que $x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x), x \mapsto \sin(2\pi.x), x \mapsto \cos(2\pi.x)$ forme une famille libre dans E (cf. plus loin dans le cours), on obtient que

$$\sin(T) = 0, \sin(2\pi.T) = 0, \cos(T) = 1, \cos(2\pi.T) = 1$$

et donc il existe deux entiers relatifs (strictement positifs) k, ℓ tels que

$$T = 2k.\pi \text{ et } 2\pi.T = 2\ell.\pi$$

et donc, pour ces entiers relatifs, $\pi = \frac{\ell}{k}$, π est rationnel (ce qui est faux, LAMBERT, 1761, HERMITE, 1873, culture générale) et on a trouvé une contradiction.