Notes de cours 07

Algèbre linéaire. Généralités

Table des matières

1 Trois problèmes, une structure

1.1 Des systèmes linéaires

Dans $\mathbb{R}^3$ Soit à résoudre le système (une équation !) linéaire d'inconnue $x = (x_0, x_1, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrcl} -x_0 & +3x_1 & -x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

En introduisant deux paramètres, on tombe sur l'ensemble des solutions S de (S) (on choisit, à dessein pédagogique, de prendre comme inconnues secondaires x_0 et x_1),

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \exists \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{ccccrr} x_0 & & & = & \lambda & \\ & x_1 & & = & & \mu \\ & & x_2 & = & -\lambda & +3\mu \end{array} \right. \right\}$$

i.e. , en posant $u = (1, 0, -1)$, $v = (0, 1, 3)$, x vérifie (S) si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda.u + \mu.v$$

On a finalement l'égalité

$$S = \{\lambda.u + \mu.v, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Remarquons que l'on dispose d'autres solutions en donnant des valeurs au couple (λ, μ), par exemple, en posant $q_+ = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, $q_- = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, de sorte que pour $q = q_+$ et $q = q_-$, on a

$$-1 + 3q - q^2 = 0$$

alors les vecteurs

$$u_+ = (1, q_+, q_+^2) = 1.u + q_+.v, \; u_- = (1, q_-, q_-^2) = 1.u + q_-.v$$

sont solutions de (S).

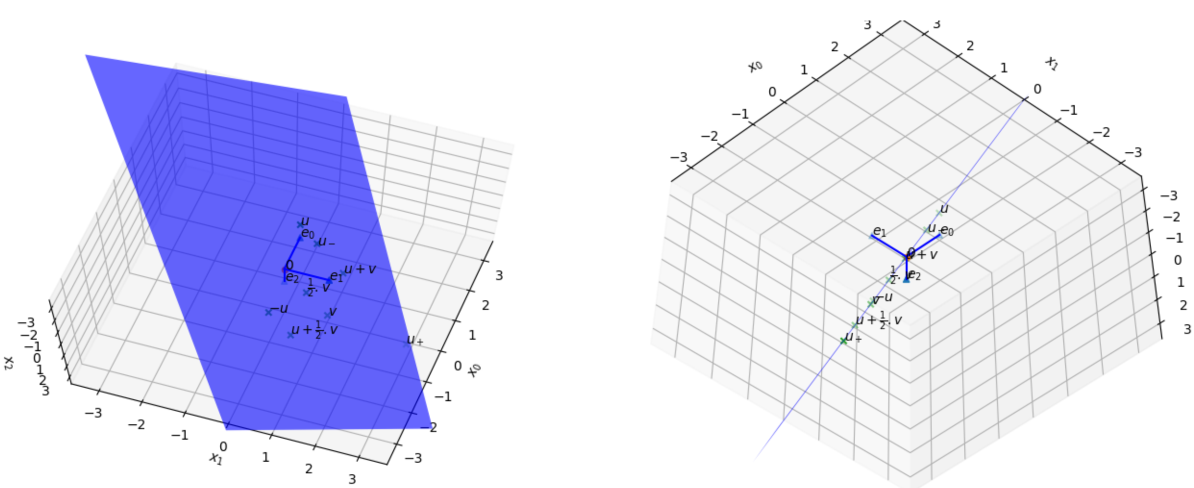

FIGURE 1 – Deux représentations graphiques des solutions du système

Dans $\mathbb{R}^5$ Soit à résoudre le système linéaire d'inconnue $x = (x_0, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^5$

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} -x_0 & +3x_1 & -x_2 & & & = & 0 \\ & -x_1 & +3x_2 & -x_3 & & = & 0 \\ & & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

On utilise en général pour cela la méthode du *pivot de* GAUSS et, après avoir posé cette méthode (ici, le système est échelonné), on tombe sur l'ensemble des solutions S de (S), (on utilise, comme dans l'exemple précédent les inconnues x_0 et x_1 comme inconnues secondaires)

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, \exists \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{cccccccc} x_0 & & & & & = & \lambda & \\ & x_1 & & & & = & & \mu \\ & & x_2 & & & = & -\lambda & +3\mu \\ & & & x_3 & & = & -3\lambda & +8\mu \\ & & & & x_4 & = & -8\lambda & +21\mu \end{array}\right. \right\}$$

i.e. , en posant [1] $u = (1, 0, -1, -3, -8)$, $v = (0, 1, 3, 8, 21)$, x vérifie (S) si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda.u + \mu.v$$

On a finalement

$$S = \{\lambda.u + \mu.v, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Comme dans l'exemple précédent, en posant $q_+ = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, $q_- = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, de sorte que pour $q = q_+$ et $q = q_-$, on a

$$-1 + 3q - q^2 = 0$$

alors les vecteurs

$$u_+ = (1, q_+, q_+^2, q_+^3, q_+^4) = 1.u + q_+.v, u_- = (1, q_-, q_-^2, q_+^3, q_+^4) = 1.u + q_-.v$$

sont solutions de (S).

1. Je note indifféremment les vecteurs de $\mathbb{R}^5$ sous forme de 5-uplet $(.., .., ..)$ ou de matrice colonne à 5 lignes. Cette dernière présentation est compatible avec le codage des vecteurs de `numpy`

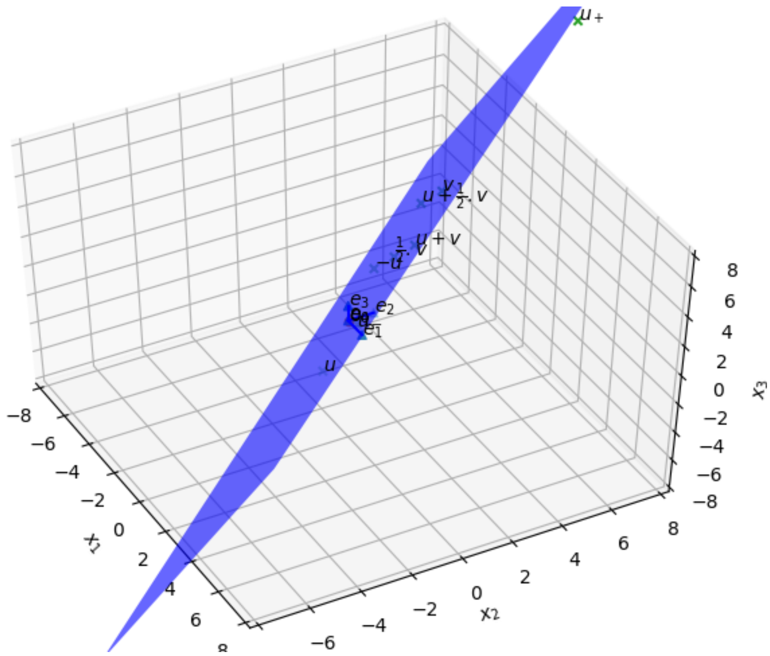

FIGURE 2 – Une représentation graphique des solutions du système, projections sur les axes x_1, x_2 et x_3

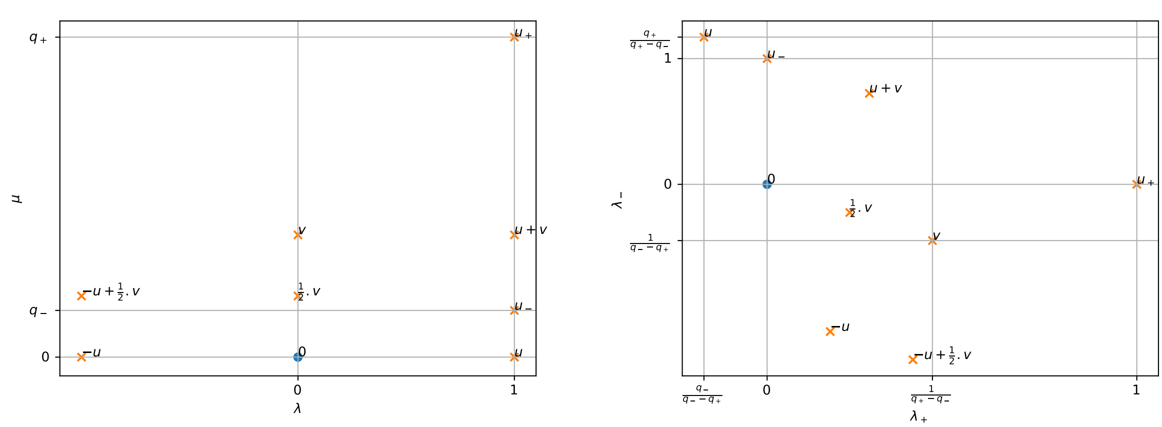

FIGURE 3 – Deux représentations graphiques en se plaçant uniquement dans le plan des solutions. On a $u_+ = 1.u + q_+.v$, $u_- = 1.u + q_-.v$, $u = \frac{1}{q_+-q_-}(-q_-.u_+ + q_+.u_-)$, $v = \frac{1}{q_+-q_-}(u_+ - u_-)$

1.2 Une suite récurrente

Intéressons nous maintenant au problème de déterminer l'ensemble R des suites récurrentes (d'ordre 2) réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la récurrence linéaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n \tag{R}$$

La méthode classique consiste à rechercher les suites *géométriques* vérifiant cette récurrence. Une telle suite géométrique a une raison q devant satisfaire $q^2 = 3q - 1$, l'*équation caractéristique* de la récurrence i.e $q = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{+,n} = q_+^n$, $u_{-,n} = q_-^n$. On a $u_+, u_- \in R$.

On peut appliquer le principe de superposition des solutions : Comme u_+ et u_- sont deux suites vérifiant (R), en prenant λ_+, λ_- deux réels et en posant $x = \lambda_+.u_+ + \lambda_-.u_-$, opération aux sens des suites, alors x vérifie (R).)

Donc

$$\{\lambda_+.u_+ + \lambda_-.u_-, (\lambda_+, \lambda_-) \in \mathbb{R}^2\} \subset R$$

La conclusion de la méthode classique est que si x est une suite satisfaisant cette récurrence (R), il existe alors λ_+, λ_- des réels tels que

$$x = \lambda_+.u_+ + \lambda_-.u_- \tag{C}$$

C'est à dire

$$\{\lambda_+.u_+ + \lambda_-.u_-, (\lambda_+, \lambda_-) \in \mathbb{R}^2\} = R$$

Ici, on va à contre-courant du principe de superposition en affirmant que *toute* suite x vérifiant (R) s'écrit sous la forme (C). Il faut un argument, *i.e.* utiliser une propriété particulière dont jouissent R, u^+ et u^-, qui permette de faire ce saut.

Les suites $u, v \in R$ vérifiant les conditions initiales $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ *i.e.*

$$u = (1, 0, -1, -3, -8, \dots) \text{ et } v = (0, 1, 3, 8, 21, \dots)$$

vérifient $u = \frac{1}{q_+ - q_-}(-q_-.u_+ + q_+.u_-)$ et $v = \frac{1}{q_+ - q_-}(u_+ - u_-)$. On a aussi $u_+ = 1.u + q_+.v$, $u_- = 1.u + q_-.v$.

Les représentations graphiques de la figure 3 sont toujours pertinentes pour indiquer les positions de ces suites les unes par rapport aux autres.

1.3 Une équation différentielle

Un raisonnement similaire à celui fait sur les suites donne que si $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, est solution de l'équation différentielle (linéaire, d'ordre 2)

$$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) - 3f'(t) + f(t) = 0, \tag{ED}$$

alors, en définissant f_+ et f_- par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_+(t) = e^{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})t} \text{ et } f_-(t) = e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})t},$$

il existe deux constantes réelles λ_+ et λ_- telles que

$$f = \lambda_+ f_+ + \lambda_- f_- \tag{C}$$

au sens des fonctions, i.e,

$$\forall t \in \mathbb{R},\, f(t) = \lambda_+ f_+(t) + \lambda_- f_-(t)$$

Une fois de plus, le principe de superposition des solutions est réalisé, il est donc clair qu'une fonction s'écrivant sous la forme (C) est solution car f_+ et f_- sont solution de (ED).

Autrement dit, en notant ED l'ensemble des fonctions vérifiant (ED), le principe de superposition donne que, partant de $f_+, f_- \in ED$, on obtient

$$\{\lambda_+.f_+ + \lambda_-.f_-,\, (\lambda_+, \lambda_-) \in \mathbb{R}^2\} \subset ED$$

La méthode donne qu'en fait on a l'*égalité*

$$ED = \{\lambda_+.f_+ + \lambda_-.f_-,\, (\lambda_+, \lambda_-) \in \mathbb{R}^2\}$$

Là encore, une propriété particulière et non triviale de l'équation (ED) et du couple (f_-, f_+) fait que ce couple suffit à décrire *toutes* les solutions de (ED) en les écrivant sous la forme (C).

Les fonction $f, g \in ED$ vérifiant les conditions initiales $f(0) = 1, f'(0) = 0, g(0) = 0, g'(0) = 1$ vérifient $f = \frac{1}{q_+ - q_-}(-q_-.f_+ + q_+.f_-)$ et $g = \frac{1}{q_+ - q_-}(f_+ - f_-)$. On a aussi $f_+ = 1.f + q_+.g$, $f_- = 1.f + q_-.g$.

Les représentations graphiques de la figure 3, après substitutions $u_+ \leftarrow f_+$, $u_- \leftarrow f_-$, $f \leftarrow u$, $g \leftarrow v$ sont toujours pertinentes pour indiquer les positions de ces fonctions les unes par rapport aux autres.

1.4 Espaces vectoriels

Ce que ce cours entend développer, c'est la structure commune à ces trois problèmes, *i.e.* la logique commune représentée géométriquement par la figure 3. Il s'agit de développer les bases du langage commun à ces phénomènes de superposition de solutions d'équations linéaires et de mettre en exergue les propriétés communes de ces problèmes.

Le point de départ est un ensemble E, non vide, (dans les exemples précédents, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^5$, l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ou l'ensemble $\mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ de fonctions à valeurs réelles) que l'on munit de deux opérations

1. $+$, une opération *interne* [2] : $+ : E \times E \to E, (u, v) \mapsto u + v$.
2. ., une opération *externe* [3] : $. : \mathbb{R} \times E \to E, (\lambda, u) \mapsto \lambda.u$

Ces deux opérations permettent, étant donnés deux éléments x et y de E et deux *scalaires* [4] λ et μ, de former un élément de E, $z = \lambda.x + \mu.y$, *combinaison linéaire* de x et y avec les coefficients λ et μ.

Plus généralement, étant donnés $x_1, \ldots, x_n$, n éléments de E, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des *scalaires*, *i.e.* des nombres réels, on peut former [5] un élément de E,

$$z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k,$$

l'élément z de E est *combinaison linéaire* des x_i affectés des coefficients scalaires λ_i. On s'intéresse ensuite aux objets de E possèdant une certaine propriété (P). Le point saillant est que si $x, y \in E$ vérifient (P) et si λ, μ sont deux réels alors $\lambda.x + \mu.y$ vérifie (P) [6].

Dans chacun des exemples donnés, on peut rappeler comment sont définies les opérations.

2. interne car les deux arguments de cette fonction sont du même « type » E, opération car partant d'éléments du type E, la fonction retourne un élément du même type.
3. interne car les deux arguments de cette fonction sont de « types » *a priori* différents E et $\mathbb{R}$. Le cas $E = \mathbb{R}$ n'est cependant pas exclu.
4. Les nombres réels (et plus tard complexes) dans ce contexte sont souvent appelés des scalaires, la provenance de ce terme est géométrique, évoquant la notion de changement d'échelle, de taille
5. en utilisant les règles que l'on posera dans l'axiomatique
6. On dit que la propriété (P) est stable par combinaisons linéaires.

1. Dans le cas de $\mathbb{R}^5$, si $x=(x_1,\dots,x_5)$, $y=(y_1,\dots,y_5)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on définit

$$x \underbrace{+}_{\text{au sens de } \mathbb{R}^5} y := (x_1 \underbrace{+}_{+\text{au sens des réels}} y_1,\dots,x_5+y_5) \text{ et } \lambda.x := (\lambda \underbrace{.}_{.\text{au sens des réels}} x_1,\dots,\lambda.x_5)$$

Ce qui a pour conséquence que la combinaison linéaire de x et y avec les coefficients λ et μ vaut :

$$\lambda.x+\mu.y=(\lambda.x_1+\mu.y_1,\dots,\lambda.x_5+\mu.y_5)$$

On remarque que la propriété (P) d'un élément $x\in\mathbb{R}^5$: « x satisfait (S) » est stable par combinaisons linéaires.

2. Dans le cas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on définit

$$u \underbrace{+}_{\text{au sens des suites}} v := \left(u_n \underbrace{+}_{+\text{au sens des réels}} v_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \lambda.u := \left(\lambda \underbrace{.}_{.\text{au sens des réels}} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Ce qui a pour conséquence que la combinaison linéaire de u et v avec les coefficients λ et μ vaut :

$$\lambda.u+\mu.v=(\lambda.u_n+\mu.v_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\lambda.u_0+\mu.v_0,\dots,\dots)$$

On remarque que la propriété (P) d'un élément $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: « u satisfait la récurrence (R) » est stable par combinaisons linéaires.

3. Dans le cas de $\mathscr{C}^2(I;\mathbb{R})$, si $f:=(t\in I\mapsto f(t)\in\mathbb{R})$, $g=(t\in I\mapsto g(t)\in\mathbb{R}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on définit

$$f \underbrace{+}_{\text{au sens des fonctions}} g := (t\in I\mapsto f(t)+g(t)\in\mathbb{R}) \text{ et } \lambda.f := (t\in I\mapsto \lambda.f(t)\in\mathbb{R})$$

Ce qui a pour conséquence que la combinaison linéaire de f et g avec les coefficients λ et μ vaut :

$$\forall t\in I,\ (\lambda.f+\mu.g)(t)=\lambda.f(t)+\mu.g(t)$$

On remarque que la propriété (P) d'un élément $f\in\mathscr{C}^2(I;\mathbb{R})$: « f satisfait l'équation différentielle (ED) » est stable par combinaisons linéaires.

Ce qu'il faut retenir c'est que l'on connait des opérations $+$ et . agissant sur les nombres réels. Ces opérations « primitives » servent à définir de « nouvelles » opérations, notées de la même manière, mais agissant qui sur les 5-uplets, qui sur les suites, qui sur les fonctions éléments de $\mathscr{C}^2(I;\mathbb{R})$. Dans chaque cas, la somme de deux objets d'un type [7] donné donne un objet du même type et la multiplication d'un réel (on dit aussi *scalaire* dans ce contexte) par un objet d'un type donné donne aussi un objet du même type.

Il est crucial dans ce domaine des mathématiques (l'algèbre) plus encore que dans les autres de distinguer $f(x)$, valeur de la fonction f au point x (donné ou quantifié auparavant) et $x\mapsto f(x)$, qui *est* [8] la fonction f. On a

$$f=(x\mapsto f(x))$$

***f n'est pas* $f(x)$, ce sont deux objets de types différents.**

De même u_n n'est pas la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Le nombre réel u_n est la valeur de la suite u à l'entier n (mal spécifié par ailleurs). u_n et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux objets de types différents.

7. On est prié de prendre les mots « objets » et « type » au sens informatique.
8. on peut sous-entendre le domaine de départ et le domaine d'arrivée de f pour alléger

Le langage Python peut manipuler directement des vecteurs ou des fonctions en tant qu'objets.

Listing 1 – python/AL-fonctions.py

```
"""
AL-fonctions.py : ce script pour démontrer comment faire directement de l'AL
                  sur les fonctions de variable réelle
"""
def somme_evfct(f,g) :
    """
    somme_evfct(f,g) : retourne la fonction somme des deux fonctions f et g
    """
    def s(x) :
        return f(x)+g(x)
    return s
def mult_evfct(lambada,f):
    """
    mult_evfct(lambada,g) : retourne la fonction produit
                            du scalaire lambada par la fonction f
    rq: lambda est un mot réservé du langage, on ne peut pas l'utiliser
    """
    def m(x) :
        return lambada*f(x)
    return m
def CL_evfct(coeff_fct) :
    """
    CV_evfct(coeff_fct) :
    retourne la fonction combinaison lineaire de la liste coeff_fct
        cette liste est une liste de couples [scalaire,fonction]
    """
    #si la liste est vide on retourne la fonction nulle
    def zero(x) :
        return 0.0
    result=zero
    #Pour une syntaxe plus lisible, on peut boucler directement sur une liste
    for lambada,f in coeff_fct :
        result = somme_evfct(result,mult_evfct(lambada,f))
    return result

#essais graphiques
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
liste=[[1.0,np.sin],[2.0,np.cos]]
f=CL_evfct(liste) # on construit la fonction CL de la liste précédente
x=np.linspace(0,2*np.pi,100)
plt.plot(x,f(x),label=r'$y=f(x)$')
plt.plot(x,np.sin(x),label=r'$y=\sin(x)$')
plt.plot(x,2*np.cos(x),label=r'$y=2\cos(x)$')
plt.legend()
plt.show()
```

On peut voir dans ce script, des fonctions Python implémentant

1. La fonction `somme_evfct(f,g)` retournant la fonction somme de deux fonctions réelles de variable réelle f et g,
2. La fonction `mult_evfct(lambada,f)` donnant la fonction produit d'une fonction réelle de variable réelle f par un scalaire réel λ.
3. La fonction `CL_evfct(liste)` donnant la fonction résultant de la combinaison linéaire de la liste de couples (scalaire,fonction) décrite par `liste`.

Définition 1. *Un ensemble*[9] *E, non vide, muni des opérations*[10] $+$ *et* . *est un* $\mathbb{R}$-espace vectoriel *si les axiomes suivants sont vérifiés.*

Les axiomes de $\mathbb{R}$-espace vectoriel

AXIOMATIQUE

1. Commutativité somme : $\forall x, y \in E,\, x+y=y+x$
2. Associativité somme[11] : $\forall x, y, z \in E,\, (x+y)+z=x+(y+z)$.
3. 0 Neutre somme : $\exists 0 \in E, \forall x \in E,\, x+0=0+x=x$
4. Existence d'opposé[12] : $\forall x \in E, \exists x' \in E,\, x+x'=x'+x=0$
5. Associativité produit[13] : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\, (\lambda.\mu).x=\lambda.(\mu.x)$.
6. $1 \in \mathbb{R}$ Neutre produit : $\forall x \in E,\, 1.x=x$
7. Distributivité I[14] : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\, (\lambda+\mu).x=(\lambda.x)+(\mu.x)$
8. Distributivité II : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E,\, \lambda.(x+y)=(\lambda.x)+(\lambda.y)$

Quelques règles de calcul

1. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on dit que $\mathbb{R}$ est le *corps* des *scalaires* de E. Les éléments de E sont appelés des *vecteurs*.
2. L'élément 0 apparaissant dans la propriété *Neutre somme* est unique avec cette propriété. On le nomme le *vecteur nul*. Il ne faut pas le confondre avec le 0 réel. On le note parfois 0_E.
3. Pour chaque $x \in E$, x' vérifiant la propriété *Existence d'opposé* est unique avec cette propriété. On le note $-x$, l'*opposé* de x.
4. $0 \in \mathbb{R}$ et $0 \in E$ On a $\forall x \in E, 0.x=0, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.0=0$.
5. Signes $-$ baladeurs : $(-\lambda).x=\lambda.(-x)=-(\lambda.x)$
6. Simplification produit nul : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\, \lambda.x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $\lambda=0$. $\lambda \neq 0$ alors $x=y$
7. Simplification égalités II : Si $\lambda.x=\mu.x$ et $x \neq 0$ alors $\lambda=\mu$

9. plus préciséмment « le triplet $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si ... »
10. $+$ interne, . externe
11. Cette propriété permet de considérer, sans parenthésage $x+y+z$ et plus généralement $x_1+x_2+\cdots+x_n$.
12. pour chaque x, il y a en fait un unique x' tel que $x'+x=x+x'=0$, il s'appelle l'**opposé** de x, noté $-x$. Soustraire x, c'est faire la somme avec $-x$
13. Cette propriété permet de considérer, sans parenthésage $\lambda.\mu.x$. Noter les différentes significations du signe .
14. Ces propriétés sont à la base des techniques de développement, factorisation

Exemples de référence de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

1. $\mathbb{R}^n$ avec somme et multiplication par un scalaire vu en première année
2. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels comportant n lignes, p colonnes.
3. $\mathbb{R}^I$ [15] l'ensemble des applications $f : I \to \mathbb{R}$ où les opérations sont définies par
$$\forall t \in I, (f+g)(t) = f(t) + g(t), (\lambda.f)(t) = \lambda.(f(t))$$
Cet exemple couvre les deux exemples précédents avec resp. $I = \{1,\dots,n\}$ et $I = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\}$, l'espace des suites réelles avec $I = \mathbb{N}$, l'espace des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, sur un ensemble Ω quelconque ...
4. $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée X.

Les axiomes de $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Nous aurions pu traiter les exemples introductifs, en cherchant, dans le premier problème, les vecteurs $x \in \mathbb{C}^5$ vérifiant le système linéaire, dans le problème des suites récurrentes, les suites à valeurs complexes vérifiant (R) et dans l'équation différentielle, les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vérifiant (ED). Cela mène, pour chaque problème, à l'introduction de *scalaires* $\lambda, \mu, \lambda_+, \lambda_-$ complexes.

Pour un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on recopie la définition de $\mathbb{R}$-espace vectoriel en remplaçant chaque occurence de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Dans le contexte des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, on dit que $\mathbb{C}$ est le *corps* des *scalaires*. Les éléments de l'espace vectoriel en considération sont appelés des *vecteurs*.

Si on dit sèchement dans un enoncé que E est un espace vectoriel, le corps des scalaires est sous-entendu et il est à éclaircir [16] en priorité.

Exemples de référence de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

1. $\mathbb{C}^n$ avec somme et multiplication par un scalaire définis de façon similaire à $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à coefficients complexes comportant n lignes, p colonnes.
3. $\mathbb{C}^I$, l'ensemble des applications $f : I \to \mathbb{C}$ où les opérations sont définies par
$$\forall t \in I, (f+g)(t) = f(t) + g(t), (\lambda.f)(t) = \lambda.(f(t))$$
Cet exemple comporte les exemples précédents, l'espace des suites complexes, l'espace des fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle, ...
4. $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes en l'indéterminée X.

Cas limite

1. $\{0\}$ est un $\mathbb{R}$-e.v., un $\mathbb{C}$-e.v.
2. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
3. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il est, en tant que $\mathbb{R}$-espace, *isomorphe* à $\mathbb{R}^2$.
4. Plus généralement, tout [17] $\mathbb{C}$-e.v. est un $\mathbb{R}$-e.v. en restreignant la multiplication par les scalaires à $\mathbb{R}$.

Pour éviter la duplication des définitions et théorèmes, on note $\mathbb{K}$ l'un des deux *corps* de *scalaires* $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Chaque théorème ou définition a donc deux lectures, celle concernant les $\mathbb{R}$-ev. et celle concernant les $\mathbb{C}$-ev.

15. où I est un ensemble non vide
16. Le contexte indique s'il s'agit de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$.
17. On n'insistera pas sur cette subtilité.

2 Sous-espaces d'un espace vectoriel

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $F \subset E$ une partie *non vide* de E. On dit que F est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E si

1. (Stabilité par somme) $\forall x, y \in F, x + y \in F$
2. (Stabilité par produit externe) $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x \in F$

Définition 3 (Equivalente)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $F \subset E$ une partie* non vide *de E. On dit que F est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E s'il est* stable par combinaisons linéaires *i.e. si*

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda.x + \mu.y \in F$$

Un s.e.v est un e.v.

Autrement dit, F est un s.e.v de E si et seulement si les restrictions des opérations $+$ et $.$ se restreignent en des opérations sur F : $+ : F \times F \to F, . : \mathbb{K} \times F \to F$. On définit ainsi des opérations sur F *héritées* des opérations sur E.

Proposition 4

Si F est un $\mathbb{K}$-s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v. E alors $(F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Rq : Le vecteur nul dans F est celui, « hérité » de E.

D'un point de vue pratique, quand on vous demande de prouver que tel ensemble F muni de certaines opérations $+$ et $.$ est un $\mathbb{K}$-e.v., il s'agit d'identifier un $\mathbb{K}$-e.v. E de la liste officielle et de montrer que F en est un s.e.v.

Exemples

1. Si I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}^0(I) = \mathscr{C}^0(I;\mathbb{R})$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^I$,
2. $\mathbb{R}[X] \simeq \mathscr{P}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ polynomiale}\}$, $\mathscr{R}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ frac. rat. déf. sur } I\}$ sont des s.e.v de $\mathbb{R}^I$
3. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^\infty(I)$, $\mathscr{C}^{k+1}(I)$ sont des $\mathbb{R}$-sev de $\mathscr{C}^k(I)$.

$$\mathscr{P}(I) \subset_{\text{sev}} \mathscr{R}(I) \subset_{\text{sev}} \mathscr{C}^\infty(I) \subset_{\text{sev}} \cdots \subset_{\text{sev}} \mathscr{C}^{k+1}(I) \subset_{\text{sev}} \mathscr{C}^k(I) \subset_{\text{sev}} \cdots \subset_{\text{sev}} \mathscr{C}^0(I) \subset_{\text{sev}} \mathbb{R}^I$$

4. Etant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, l'ensemble $\mathscr{L}$ des variables aléatoires réelles est un s.e.v de $\mathbb{R}^\Omega$. l'ensemble $\mathscr{L}^1$ des v.a. intégrables [18] est un s.e.v de $\mathscr{L}$, l'ensemble $\mathscr{L}^2$ des v.a. de carré intégrable [19] est un s.e.v de $\mathscr{L}^1$ et finalement l'ensemble $\mathscr{L}_{fini}$ des v.a. réelles prenant un nombre fini de valeurs est un s.e.v de $\mathscr{L}^2$.

$$\mathscr{L}_{fini} \subset_{\text{sev}} \mathscr{L}^2 \subset_{\text{sev}} \mathscr{L}^1 \subset_{\text{sev}} \mathscr{L} \subset_{\text{sev}} \mathbb{R}^\Omega$$

5. Une droite $D \subset \mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$,
6. Un plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

18. *i.e.* admettant une espérance
19. *i.e.* admettant une variance

Retour sur les exemples initiaux

1. L'ensemble S des solutions du système linéaire homogène (S) est un sev de $\mathbb{R}^5$
2. L'ensemble R des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire homogène (R) est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. L'ensemble ED des fonctions vérifiant l'EDO linéaire homogène (ED) est un sev de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Intersection de s.e.v.

Proposition 5

1. Si F, G sont deux sev de E alors $F \cap G$ est un sev de E.
2. Si $F_1, \dots, F_n$ sont n sev de E alors $F_1 \cap \cdots \cap F_n = \bigcap_{i=1}^n F_i$ est un sev de E.

Exemples :

1. Espace des solutions d'un système linéaire homogène.
2. Suites récurrentes vérifiant des conditions additionnelles.
3. Solutions d'EDO vérifiant des conditions additionnelles.

Remarque : l'exercice 5 (pas si facile) montre que $F \cup G$ est un sev de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$. Hormis ce cas (trivial), $F \cup G$ n'est pas un sev de E.

Exercices **Exercice 1.—** Déterminer lesquels des ensembles F suivants sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Dans le cas où F est un s.e.v. de E préciser s'il s'agit de $\{0\}$, d'une droite vectorielle, d'un plan vectoriel et/ou de E tout entier.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 4z - y = 0\}$,
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ xy + 4z = 0\}$,
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 4z = 0 \text{ ou } x + y + z = 0\}$,
5. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 4z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$,
6. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 2y + 1\}$,
7. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$,
8. $E = \mathbb{R}^2$, $F_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 0\}$, $F_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$, $F_m \cap F_p$? $F_m \cup F_p$?
9. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{\lambda(1,2) + (0,1), \lambda \in \mathbb{R}\}$,
10. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{\lambda(1,2) + \mu(3,4), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 2.— Déterminer si les ensembles F suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X], deg(P) \leq n\}$,
2. $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X], deg(P) \geq n\}$,
3. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 1\}$,
4. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P' + P'', P \in \mathbb{R}[X]\}$,
5. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$,

6. Soit $T > 0, E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, f$ périodique de période $T\}$,
7. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, f(0) = f(1)\}$,
8. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), F = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\, f$ monotone$\}$
9. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de E, $F = \{(w_n)_n, \exists \lambda,\, \nu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda u_n + \nu v_n\}$.
10. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, F le sous-ensemble des suites convergentes.

Exercice 3.— Déterminer si les ensembles F suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

1. $E = \mathbb{C}^2, F = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,;\, x + 3y = 1\}$,
2. $E = \mathbb{C}^2, F = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,;\, x + iy = 0\}$,
3. $E = \mathbb{C}^2, F = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,;\, xy = 1\}$,
4. $E = \mathbb{C}^3, F = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,;\, x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$,
5. $E = \mathbb{C}[X], F = \{P \in \mathbb{C}[X], P(0) = i\}$,
6. $E = \mathbb{C}[X], F = \{P + P' + 2P'', P \in \mathbb{C}[X]\}$,
7. $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, F = \{(w_n)_n, \exists \lambda,\, \nu \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda e^{in\frac{\pi}{3}} + \nu n.2^n\}$.
8. $E = \mathbb{C}^{[0,2\pi]}, F = \{f \in E, f \in \mathscr{C}^2([0,2\pi], f'' + f = 0$ et $f(0) = f(2\pi)\}$.

Exercice 4.—Pour chacun des ensembles suivants, indiquer avec justification si c'est un espace vectoriel ou pas. On précidera le corps des scalaires ainsi que l'ev de référence dont l'ensemble est un sev.
1. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de coefficient constant nul.
2. L'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_{3,5}(\mathbb{K})$ ayant une première colonne nulle.
3. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1 et nulles en 4 .
4. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1 ou nulles en 4 .
5. L'ensemble des fonctions f croissantes sur $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonales.
7. L'ensemble des suites arithmétiques à valeurs réelles.
8. L'ensemble des suites géométriques à valeurs complexes.
9. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré égal à $n \geqslant 2$ fixé.
10. L'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
11. L'ensemble des fonctions réelles définies sur $]-1,1[$, continues, positives ou nulles.
12. L'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
13. L'ensemble des matrices carrées de taille n de diagonale nulle.
14. L'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires.

Exercice 5.— Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces de E.
1. Montrer que
$$(F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E) \Rightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F).$$
Indication:Montrer la contraposée en fabriquant deux vecteurs de $F \cup G$ dont la somme n'est pas dans $F \cup G$. Illustrer graphiquement.
2. Le même résultat est-il vrai si l'on suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 6.— Soit E un espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer l'équivalence
$$(\forall (x,y) \in F \times G, \forall (x',y') \in F \times G, x + y = x' + y' \Rightarrow x = x' \text{ et } y = y') \Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$$
On traitera séparémment les deux implications.

2.1 Combinaisons linéaires

Définition 6. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $(u_i)_{i\in I}$ une famille* finie *de vecteurs dans E indexée par I, $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires. La* combinaison linéaire *de la famille $(u_i)_{i\in I}$ avec les coefficients $(\lambda_i)_{i\in I}$ est le vecteur de E défini par*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i . u_i$$

Réciproquement, on dit qu'un vecteur $v \in E$ est combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{i\in I}$ s'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i . u_i$$

2.2 Stabilité par combinaisons linéaires

Proposition 7 (Une CL de CL est une CL)**.** *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E, $(v_j)_{j\in J}$ une famille finie de vecteurs de E, telle que chaque v_j est combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{i\in I}$.*

Une combinaison linéaire de la famille $(v_j)_{j\in J}$ est une combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{i\in I}$.

Démonstration. L'hypothèse implique que pour chaque j, il existe une famille $(\lambda_{ij})_{i\in I}$ de scalaires telle que

$$v_j = \sum_{i\in I} \lambda_{ij} u_i$$

Soit $w = \sum_{j\in J} \mu_j . v_j$. On a alors, en appliquant les axiomes d'e.v.

$$w = \sum_{j\in J} \mu_j \left(\sum_{i\in I} \lambda_{ij} u_i \right) = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in J} \lambda_{ij} \mu_j \right) u_i$$

$\square$

Exercice 7.— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), F, G deux sous-espaces de E. Soit

$$H = \{x + y, x \in F, y \in G\} = \{z \in E, \exists (x,y) \in F \times G, z = x + y\}$$

1. Montrer que H est un sev de E et que $F \cup G \subset H$.
2. Montrer que si K est un sev de E contenant $F \cup G$ alors $H \subset K$.
3. Donner un exemple simple (E, F, G non triviaux) tel que $H \neq E$. Illustration graphique ?

2.3 Sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Proposition–Définition 8

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E. Le *sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille*, noté

$$\mathrm{Vect}\langle u_i,\, i\in I\rangle \text{ ou } \mathrm{Vect}\langle \mathscr{U}\rangle\,,$$

est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(u_i)_{i\in I}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, *i.e.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}\langle u_i,\, i\in I\rangle = \mathrm{Vect}\langle \mathscr{U}\rangle &= \{\sum_{i\in I}\lambda_i.u_i,\, (\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I\}\\ &= \{z\in E,\, \exists(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I,\, z=\sum_{i\in I}\lambda_i.u_i\}\end{aligned}$$

Définition 9

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{U}$ est *génératrice de E* si

$$E = \mathrm{Vect}\langle u_i, i\in I\rangle$$

Remarques :

1. Une *tautologie* : La famille finie $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice (ou *engendre*) l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\langle u_i, i\in I\rangle$.
2. Cas limite : « la famille vide engendre l'espace nul. ». C'est la convention sur les sommes vides.

Exercices **Exercice 8.—** Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (e_1, e_2) où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Exercice 9.— Soient $e_1 = (0, 1, -2, 1), e_2 = (1, 0, 2, -1), e_3 = (3, 2, 2, -1)$ et $e_4 = (0, 0, 1, 0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\mathrm{Vect}\langle e_1, e_2, e_3\rangle = \mathrm{Vect}\langle (1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\rangle$.
2. $(1, 1, 0, 0) \in \mathrm{Vect}\langle e_1, e_2\rangle \cap \mathrm{Vect}\langle e_2, e_3, e_4\rangle$.

Exercice 10.— Soient e_1, e_2, e_3, e_4 des éléments quelconques d'un espace vectoriel E. On pose

$$f_1 = e_1 + e_2\ ,\ f_2 = e_2 + e_3\ ,\ f_3 = e_3 + e_4\ ,\ f_4 = e_4 - e_1\ .$$

Peut-on exprimer e_1 en fonction de f_1, f_2, f_3, f_4 ? Même question avec e_2, puis avec e_3 et enfin avec e_4. A-t-on

$$\mathrm{Vect}\langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle = \mathrm{Vect}\langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle\ ?$$

Exercice 11.— Dans l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère les quatre polynômes

$$P_0(X)=1\ ,\ P_1(X)=X-1\ ,\ P_2(X)=(X-1)^2\ ,\ P_3(X)=(X-1)^3\ .$$

Soit F un élément de $\mathbb{R}_3[X]$. Montrer que F peut se mettre sous la forme

$$F=\lambda_0P_0+\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3.$$

Quelles sont les valeurs de $\lambda_0,\ldots,\lambda_3$? Quelle formule retrouve-t-on ?
Que peut-on dire de $\mathrm{Vect}\langle P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$?

Exercice 12.—
1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, considérons les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ a_n(x)=(\cos x)^n \text{ et } b_n(x)=\cos(n.x).$$

Montrer que pour tout n,

$$\mathrm{Vect}\langle a_0,\ldots,a_n\rangle=\mathrm{Vect}\langle b_0,\ldots,b_n\rangle\ .$$

2. On considère maintenant a_n,b_n comme des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, i.e. des éléments du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. La fonction $x\mapsto e^{i100x}$ appartient-elle à $\mathrm{Vect}\langle a_n,\,n\in\{0,\ldots,200\}\rangle$?

3. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $s_n(x)=\sin(n.x)$ et l'on considère le $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$,

$$V_{200}=\mathrm{Vect}\langle b_n,s_n,\,n\in\{0,\ldots,200\}\rangle\ .$$

La fonction $x\mapsto e^{i100x}$ appartient-elle à V_{200} ?

Exercice 13.— Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation (ED) suivante est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et en donner une famille génératrice.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)-2y'(x)+2y(x)=0 \qquad \text{(ED)}$$

Exercice 14.— Montrer que l'ensemble de suites à valeurs réelles vérifiant la récurrence (R) suivante est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et en donner une famille génératrice.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n \qquad \text{(R)}$$

3 Applications linéaires

3.1 Définition-exemples

Définition 10

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application ($\mathbb{K}$)-linéaire si elle *respecte* les combinaisons linéaires, *i.e.*

$$\forall x,y \in E, \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, f(\lambda.x+\mu.y) = \lambda.f(x)+\mu.f(y)$$

1. L'ensemble des applications linéaires $f : E \to F$ est noté $\mathscr{L}(E,F)$.
2. Une application linéaire $f : E \to F$ « préserve » les opérations d'espace vectoriel, i.e les combinaisons linéaires. Plus précisémment
$$f(\sum_{i\in I}\lambda_i.u_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i.f(u_i)$$
3. Un synonyme d'application linéaire est *morphisme* d'espaces vectoriels, l'étymologie de ce mot traduit l'idée de préservation de la forme des expressions.
4. Quand $E = F$, on parle d'*endomorphisme*. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de l'e.v. E.
5. Quand $F = \mathbb{K}$, on parle de *formes linéaires*, on note l'ensemble des formes linéaires $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.

Des exemples : formes linéaires

1. Evaluation d'une fonction en un point.
2. Evaluation d'un polynôme en un point.
3. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ avec un vecteur fixé. (On y consacrera un chapitre entier)
4. Intégrale d'une fonction.
5. Espérance d'une variable aléatoire intégrable.

Des exemples : endomorphismes

1. Application identité i_E, multiplication par un scalaire fixé, $\lambda.i_E$,
2. Transformations de l'espace $\mathbb{R}^n$. Matrices carrées. $X \mapsto A.X$
3. Multiplication par une fonction fixée. Varier la régularité.
4. Changement de variable pour les fonctions de variable réelle.

Des exemples divers

1. L'application nulle $x \in E \mapsto 0_F \in F$ est linéaire.
2. Transformation linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $X \mapsto A.X$ ou $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
3. Dérivation, primitivation.
4. Transformée intégrale.
5. Si $(u_i)_{i\in I}$ famille (finie) de vecteurs de E, on peut considérer
$$(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \mapsto \sum_{i\in I}\lambda_i.u_i \in E$$
.

3.2 Sous-espaces associés à une application linéaire

Le noyau. (en anglais, noyau c'est « kernel »)

Proposition–Définition 11

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le sous-ensemble de E

$$\operatorname{Ker} f := \{x \in E,\, f(x) = 0_F\}$$

est un s.e.v de E appelé le *noyau* de f.

Exemples élémentaires

1. Un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle et réciproquement.
2. Pour l'opération de dérivation sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, le noyau, c'est l'ensemble des fonctions constantes.
3. Pour un système linéaire, le noyau de l'application linéaire associée, c'est l'ensemble des solutions du système homogène. Notation $\operatorname{Ker} A$ où $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
4. L'ensemble des suites vérifiant une certaine relation de récurrence est le noyau d'une certaine a.l. laquelle (cf. exemples introductifs) ?
5. L'ensemble des fonctions vérifiant une certaine équation différentielle linéaire est le noyau d'une certaine a.l.. laquelle ?

Démonstration.

1. Comme f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$ et donc $0_E \in \operatorname{Ker} f$.
2. Soient $x, y \in \operatorname{Ker} f$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, comme f est linéaire,
$$f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y) = \lambda.0_F + \mu.0_F = 0_F$$
et donc $\lambda.x + \mu.y \in \operatorname{Ker} f$
3. $\operatorname{Ker} f$ est donc un s.e.v de E.

□

L'image

Proposition–Définition 12

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le sous-ensemble de F

$$\operatorname{Im} f := \{y \in F,\, \exists x \in E,\, f(x) = y\}$$

est un s.e.v de F appelé l'*image* de f.

Démonstration.

1. $0_F = f(0_E) \in \operatorname{Im} f$, $\operatorname{Im} f \subset F$,
2. Si $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et, par linéarité de f,
$$\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2 = f(\underbrace{\lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2}_{\in E}) \in \operatorname{Im} f.$$
3. $\operatorname{Im} f$ est donc un s.e.v de F.

□

Exemples élémentaires

1. si u et v sont deux vecteurs d'un $\mathbb{R}$-e.v. E, l'image de $f : \mathbb{R}^2 \to E$, $(\lambda, \mu) \mapsto f(\lambda, \mu) = \lambda.u + \mu.v$, c'est $\mathrm{Vect}\langle u, v\rangle$. Ceci se généralise à une famille finie $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E. $f : \mathbb{R}^I \to E$, $f((\lambda_i)_{i\in I}) := \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i$.
2. Si $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ est une forme linéaire, $\mathrm{Im}\, f = \{0\}$ ou $\mathbb{K}$.
3. Pour un système linéaire, l'image de l'application linéaire associée, c'est l'ensemble des seconds membres pour lesquels le système admet au moins une solution. Notation $\mathrm{Im}\, A$ où $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
4. Pour D, l'opération de dérivation sur $\mathscr{D}^1(\mathbb{R})$, l'image, c'est l'ensemble des fonctions admettant une primitive sur $\mathbb{R}$. On sait que $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}\, D$
5. Pour D, l'opération de dérivation sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, l'image, c'est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant une primitive. C'est donc $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

Injectivité, surjectivité

Proposition 13

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
2. f est surjective (sur F) si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.
3. f est un isomorphisme entre E et F si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, f = F$.

Démonstration. Seul le premier point est réellement à démontrer, le deuxième est par définition de la surjectivité, le dernier par caractérisation de la bijectivité comme injection+surjection.

— Si f est injective, comme $f(0_E) = 0_F$, 0_F admet 0_E comme unique antécédent et $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.

— Réciproquement (c'est la nouveauté). Soient x, $y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. On a alors, par *linéarité* de f,

$$f(x-y) = f(x) - f(y) = 0_F$$

donc $x - y \in \mathrm{Ker}\, f$ et donc $x - y = 0_E$, i.e. $x = y$.

□

3.3 Résolution d'équations linéaires

Proposition 14. *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit $y \in F$ et considérons l'équation $(E_y) : f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$, alors*

1. *Si $y \notin \mathrm{Im}\, f$, (E_y) n'a pas de solution.*
2. *Si $y \in \mathrm{Im}\, f$, et x_y est une solution particulière de (E_y) alors l'ensemble des solutions de (E_y) est*

$$S_y = \{x_y + x, x \in \mathrm{Ker}\, f\} =: x_y + \mathrm{Ker}\, f$$

Exemples : matrices et système linéaire. Une EDO linéaire avec second membre.

3.4 Exercices

Exercice 15.—Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires. Pour chaque application linéaire trouvée, déterminer son noyau et son image en en donnant une famille génératrice.
1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (y,x)$.
4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 3x + 5y$.
5. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (-x,y)$.
6. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy$.
7. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$.
8. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto$ le symétrique de (x,y) par rapport à la droite d'équation $x + y - a = 0$
9. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (xy, x, y)$.

Exercice 16.—Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit le $\mathbb{K}$-ev $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ composée des applications $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $u : E \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ définie par

$$\forall f \in E, \quad u(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f''(x) + f'(x) + f(x) \end{array}$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Montrer que par restriction de l'image elle définit un endomorphisme de E.
3. Déterminer son noyau [20].
4. Mêmes questions mais avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercice 17.— Soit le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u : E \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par

$$\forall f \in E, \quad u(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - \cos(x).f(x) \end{array}$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Montrer que par restriction de l'image elle définit un endomorphisme de E.
3. Déterminer son noyau.
4. Montrer [21] qu'elle est surjective.

Exercice 18.—Dans chacun des cas suivants, on définit une application $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$. Déterminer si elle est linéaire ou pas et, en cas de linéarité, déterminer si elle est injective ou non.

1. $u(P) = P'(X) - P(2X)$
2. $u(P) = P(0) + P(1)$
3. $u(P) = P(X)P'(X)$
4. $u(P) = P(X^2)$

Exercice 19.—Soit $n \geqslant 2$ et :

$$u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$$
$$P \mapsto XP(-4) + P(6)$$

1. Montrer que u est un endomorphisme.
2. Déterminer le noyau de u.
3. Déterminer l'image de u.

20. en vous basant sur vos connaissances concernant les EDO linéaires du second ordre
21. en vous basant sur vos connaissances concernant les EDO linéaires du premier ordre

3.5 Opérations : CL/ composition, réciproque

Proposition 15

Si $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ alors l'application $\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2$ définie par

$$\forall x \in E,\, (\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2)(x) = \lambda_1.(f_1(x)) + \lambda_2.(f_2(x))$$

est une application linéaire $E \to F$.

1. On remarque que $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-ev. On n'insiste pas sur ce point.
2. Exemple : Combinaison linéaire de deux évaluations.

Exercice 20.—Soit $m,n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $f_B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ les applications linéaires linéaires canoniquement associées à ces matrices, *i.e.*

$$\forall X \in \mathbb{C}^n,\, f_A(X) = A.X \text{ et } \forall X \in \mathbb{C}^n,\, f_B(X) = B.X$$

On considère l'application linéaire $f = 2.f_A - 3.f_B$. Est-elle associée canoniquement à une certaine matrice ?

Composition

Proposition 16

Si E, F, G sont trois $\mathbb{K}$-e.v., $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$

Proposition 17

Si E, F, G sont trois $\mathbb{K}$-e.v., $f, f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $g, g_1, g_2 \in \mathscr{L}(F,G)$ alors

$$g \circ (\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2) = \lambda_1.(g \circ f_1) + \lambda_2.(g \circ f_2)$$

et

$$(\lambda_1.g_1 + \lambda_2.g_2) \circ f = \lambda_1.(g_1 \circ f) + \lambda_2.(g_2 \circ f)$$

Remarquer que la deuxième règle n'utilise pas le caractère linéaire des f et g's.

Exercice 21.— Soit $m,n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $f_B : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^n$ les applications linéaires linéaires canoniquement associées à ces matrices, *i.e.*

$$\forall X \in \mathbb{C}^n,\, f_A(X) = A.X \text{ et } \forall Y \in \mathbb{C}^p,\, f_B(Y) = B.Y$$

1. Quelle est, si m, n et p sont distincts la seule composition possible entre f_A et f_B ?
2. Cette composée est-elle associée canoniquement à une certaine matrice ? laquelle ?

Composition des endomorphismes

Proposition 18

Si E est un $\mathbb{K}$-e.v., $f,g \in \mathscr{L}(E)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E)$

On peut, dans le cas des endomorphismes, composer un endomorphisme avec lui-même. On note, pour $f \in \mathscr{L}(E)$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ occurences de } f}$. Par convention $f^0 = i_E$, l'application *identité* de E.

Exercice de composition **Exercice 22.—** Pour chacun des espaces $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ ou $E = \mathbb{C}[X]$, on définit les deux endomorphismes $D : u \in E \mapsto D(u) = u' \in E$, et $M : u \in E \mapsto (x \mapsto x.u(x)) \in E$.
1. Calculer $D \circ M$, $M \circ D$ et $D \circ M - M \circ D$.
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, M définit-il, par restriction, un endormorphisme de $\mathbb{C}_d[X]$?
3. Montrer que $M \circ D$ et $D \circ M$ définissent des endormorphismes de $\mathbb{C}_d[X]$.

Exercice : polynômes d'endomorphismes

Définition 19. *Si E est un $\mathbb{K}$-e.v., $f \in \mathscr{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $P = p_0 + p_1.X + \cdots + p_d.X^d$, on note*

$$P(f) = p_0.i_E + p_1.f + \cdots + p_d.f^d$$

Exercice 23.—
1. Montrer les identités suivantes, pour $P,Q \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathscr{L}(E)$,
1.a. $(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$, **1.b.** $(P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$, **1.c.** $(P \circ Q)(f) = P(Q(f))$.
2. Montrer les identités suivantes pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
2.a. $(i_E + f)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k$, **2.b.** $(i_E - f) \circ (i_E + f + \cdots + f^{n-1}) = i_E - f^n$
3. On considère $D : u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mapsto u' \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, $P = X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Calculer $[P(D)](\cos)$.

Réciproque

Proposition 20

Si E, F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est *bijective* alors sa réciproque, $f^{-1} : F \to E$ est *linéaire* : $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$. Dans ce cas, on a

$$f^{-1} \circ f = i_E \text{ et } f \circ f^{-1} = i_F$$

où i_E et i_F sont les endomorphismes *identité* de E et F.

Vocabulaire

1. si $f : E \to F$ est linéaire et bijective, on dit que c'est un *isomorphisme*.
2. si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev et s'il existe $f : E \to F$ un isomorphisme, on dit que E et F sont *isomorphes* en tant que $\mathbb{K}$-ev.
3. si $f : E \to E$ est un endomorphisme, bijectif alors on dit aussi que c'est un *automorphisme* de E. Dans ce cas, f^{-1} est aussi un automorphisme de E.

Démonstration. Soient $y_1, y_2 \in F$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x = f^{-1}(\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2)$ est l'*unique* solution de l'équation d'inconnue $x \in E$,

$$f(x) = \lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2$$

Si $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, on a alors, par linéarité de f,

$$f(\lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2) = \lambda_1.f(x_1) + \lambda_2.f(x_2) = \lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2$$

et l'unicité donne la conclusion tant recherchée...

$$x = \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2$$

i.e.

$$f^{-1}(\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2) = \lambda_1.f^{-1}(y_1) + \lambda_2.f^{-1}(y_2)$$

□

Exercice 24.— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à cette matrice.A quelle condition sur A, f_A est-elle un isomorphisme [22]. Si cette condition est remplie, f_A^{-1} est-elle associée canoniquement à une certaine matrice ?

Exercice 25.— Soit E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions réelles, $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E,\, f(0) = 0\}$. Justifier rapidement que F est un s.e.v de E et montrer que $D : F \to E$ définie par

$$\forall f \in F, D(f) = f'$$

est un isomorphisme. Donner l'expression de l'isomorphisme réciproque.

Exercice 26.—Soit E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et $f^0 = i_E$ l'application identité de E.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} f^n \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$ et $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$.

Exercice 27.— Soient E, F et G trois espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.
1. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
2. Montrer que $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 28.—Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$

Exercice 29.—On définit φ par : pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$: $\varphi(P) = \left(1 - X^2\right) P' + (3X+1)P$.

Exercice 30.—On définit ϕ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\, \phi(P) = (1 - X^2)P' + (3X+1)P$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ (NB : vérifier sa bonne définition)
2. Donner son noyau. L'application ϕ est-elle surjective de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$?

22. automorphisme, en fait vu qu'espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes

Fil rouge : Problème d'interpolation de LAGRANGE

On sait (d'expérience !) que l'indice de réfraction n[23] de certains matériaux dépend de la longueur d'onde λ de l'onde incidente suivant une loi[24] de la forme

$$n = p_0 + p_1 \cdot \frac{1}{\lambda^2} + p_2 \cdot \frac{1}{\lambda^4}$$

où les coefficients réels p_0, p_1, p_2 sont caractéristiques du matériau. On a effectué des mesures, à l'aide d'un goniomètre, pour un certain type de verre, regroupées dans le tableau :

$\lambda\,(nm)$	404,7	434,7	546,1
n	1,540	1,536	1,526

Peut-on, à partir de ces mesures, déterminer les coefficients p_0, p_1, p_2 ? On peut voir cette question comme un problème d'*interpolation* :

On dispose de trois nombres réels distincts z_0, z_1 et z_2 (les carrés des inverses des longueurs d'onde), des trois valeurs de n correspondantes, n_0, n_1 et n_2 et il s'agit de trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$\forall i = 0, 1, 2,\ P(z_i) = n_i$$

En écrivant les choses telles qu'elles viennent, on voit que ce problème se réduit à résoudre le système linéaire d'inconnue (p_0, p_1, p_2),

$$\left\{ \begin{array}{llllll} p_0 & +p_1 . z_0 & +p_2 . z_0^2 & = & n_0 \\ p_0 & +p_1 . z_1 & +p_2 . z_1^2 & = & n_1 \\ p_0 & +p_1 . z_2 & +p_2 . z_2^2 & = & n_2 \end{array} \right.$$

On laisse le lecteur remplacer les paramètres z_i, n_i par leurs valeurs obtenues à partir du tableau et fourrer le système linéaire dans un système de calcul afin d'obtenir, via la résolution par l'algorithme de GAUSS, les valeurs exactes de p_0, p_1 et p_2.

Fil rouge : Polynômes d'interpolation de LAGRANGE Plus généralement, soit $d \in \mathbb{N}^*$, $z_0, z_1, \ldots, z_d$ $d+1$ nombres complexes distincts. Considérons l'application $\Lambda : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}^{d+1}$ définie par

$$\Lambda(P) = (P(z_0), \ldots, P(z_d))$$

C'est une application linéaire. Cette application intervient naturellement dans le problème de l'interpolation polynomiale :

Etant données $d+1$ valeurs $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_d)$, existe-t-il un polynome à coefficients complexes P tel que $\forall i \in \{0, \ldots, d\}, P(z_i) = \alpha_i$ *i.e.* tel que $\Lambda(P) = \alpha$?

On voit que, en fixant le degré a priori du polynôme, ce problème équivaut à résoudre un certain système linéaire. La question est de comprendre ce qu'on peut attendre de la résolution de ce système *d'une manière générale* : Y a-t-il de tels polynômes ? Combien ? Comment différent-ils ? Qu'imposer de plus pour garantir l'unicité d'une solution.

Ce sont des questions liées à l'image $\operatorname{Im} \Lambda$ et au noyau $\operatorname{Ker} \Lambda$....

23. Il s'agit du rapport entre célérité de la lumière dans le vide et vitesse de phase de l'onde lumineuse, grandeur sans dimension

24. dite loi de CAUCHY, *cf.* `https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Cauchy_(optique)`, cette loi est liée à la séparation de la lumière blanche par un prisme