Corrections choisies 11

Variables aléatoires discrètes

Correction Ex.-10

1. L'ensemble des valeurs possibles prises par X est $\{2r, \dots, \dots\}$.

Notons G_n le genre du n -ième panda, plus précisément $G_n = 1$ si c'est un mâle, 0 si c'est une femelle. Les $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille de variables de BERNOULLI de paramètre de succès p . Le nombre de mâles capturés parmi les n premiers pandas est $M_n := \sum_{k=1}^n G_k$, le nombre de femelles est $F_n := n - \sum_{k=1}^n G_k$.

M_n suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$, F_n suit une loi $\mathcal{B}(n, q)$.

— Première méthode. (Fonction de répartition de X)

On a $(X \leq n) = (M_n \geq r) \cap (F_n \geq r)$ et donc

$$(X \geq n) = (M_n \geq r) \cap (n - r \geq M_n) = (r \leq M_n \leq n - r)$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq n) &= \sum_{k=r}^{n-r} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ \mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(X \leq n) - \mathbb{P}(X \leq n-1) \\ &= \sum_{k=r}^{n-r} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - \sum_{k=r}^{n-1-r} \binom{n-1}{k} p^k q^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=r}^{n-r} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-k} + \sum_{k=r}^{n-r} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} - \sum_{k=r}^{n-1-r} \binom{n-1}{k} p^k q^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=r}^{n-r} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-k} + \sum_{k=r-1}^{n-1-r} \binom{n-1}{k} p^{k+1} q^{n-1-k} - \sum_{k=r}^{n-1-r} \binom{n-1}{k} p^k q^{n+1-k} \\ &= \binom{n-1}{n-r} p^{n-r} q^r + \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} \\ &= \binom{n-1}{r-1} (p^{n-r} q^r + p^r q^{n-r}) \end{aligned}$$

— Deuxième méthode. (Par conditionnement.) On calcule $\mathbb{P}(X = n)$ en conditionnant sur le genre G_n du n -ième panda attrapé.

Soit $n \geq 2r$. On a, par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e.i $(G_n = 0), (G_n = 1)$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = n | G_n = 1) \cdot \mathbb{P}(G_n = 1) + \mathbb{P}(X = n | G_n = 0) \cdot \mathbb{P}(G_n = 0)$$

avec $\mathbb{P}(G_n = 1) = p, \mathbb{P}(G_n = 0) = q = 1 - p$.

Or, on a les égalités d'événements (car $n - r \geq r$)

$$(X = n \cap G_n = 1) = (M_n = r \cap F_n = n - r \cap G_n = 1) = (M_n = r \cap G_n = 1) = (M_{n-1} = r - 1 \cap G_n = 1)$$

et

$$(X = n \cap G_n = 0) = (F_n = r \cap M_n = n - r \cap G_n = 0) = (F_n = r \cap G_n = 0) = (F_{n-1} = r - 1 \cap G_n = 0)$$

Les variables aléatoires M_{n-1} et G_n sont indépendantes et donc

$$\mathbb{P}(X = n | G_n = 1) = \mathbb{P}(M_{n-1} = r - 1 | G_n = 1) = \mathbb{P}(M_{n-1} = r - 1) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} \cdot q^{n-1-(r-1)}$$

et

$$\mathbb{P}(X = n | G_n = 1) \cdot \mathbb{P}(G_n = 1) = \binom{n-1}{r-1} p^r \cdot q^{n-r}$$

et de même,

$$\mathbb{P}(X = n | G_n = 0) \cdot \mathbb{P}(G_n = 0) = \binom{n-1}{r-1} q^r \cdot p^{n-r}$$

2. On a $\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$$\sum_{n=2r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \mathbb{P}(X \geq 2r) = 1$$

La vraie question est de savoir si X est presque-sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$, i.e. pourquoi $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$...Il y a quelque chose de non trivial¹ à dire, mais je pense qu'à l'oral, c'est bien de l'admettre et de continuer.

3. On a

$$n \cdot \binom{n-1}{r-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} = r \cdot \binom{n}{r}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_n n \mathbb{P}(X = n)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{n=2r}^{+\infty} n \cdot \binom{n-1}{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= r \cdot \sum_{n=2r}^{+\infty} \binom{n}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 2r \cdot \sum_{n=2r+1}^{+\infty} \binom{n-1}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 2r \cdot \left(\binom{2r}{r} 2^{-2r} + \sum_{n=2(r+1)}^{+\infty} \binom{n-1}{(r+1)-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) \\ &= 2r \cdot \left(\binom{2r}{r} 2^{-2r} + 1 \right) \end{aligned}$$

Pour la dernière identité, on a utilisé le résultat de la question 2 avec r remplacé par $r+1$.

Correction Ex.-14 On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \frac{a}{k^2}$.

1. Si $a > 0$, les p_k sont tous positifs. Par ailleurs, la série (de RIEMANN numéro 2) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge et donc, pour que $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k$ vaille 1, il faut et il suffit que $a = \frac{1}{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}$.

Pour cette valeur de a , $p = (p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est la loi d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

2. On considère X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant pour loi p . X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot p_k = a \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ est (absolument) convergente. Ce n'est pas le cas, il s'agit de la série harmonique et donc X n'admet pas d'espérance (finie)

1. Voici un argument qui permet de se ramener à un schéma de BERNOULLI et d'attendre l'instant du premier succès : On découpe $\mathbb{N}$ en intervalles d'entiers contigus de longueur $2r$ que l'on nomme I_k . En formule, pour $k \geq 1$, $I_k = \{2r.k, \dots, 2r.(k+1) - 1\}$. La probabilité de l'événement E_k : « dans l'intervalle I_k on attrape r femelles et r mâles » est $\binom{2r}{r} p^r \cdot q^r > 0$. La suite des indicatrices de ces événements est une suite de v.a. de BERNOULLI indépendantes et, presque sûrement, il y a un indice $k \geq 1$ tel que E_k a lieu. Dans ce cas, X est bien défini et $X \leq 2r(k+1)$.