Programme de Colles 03

Intégrales généralisées, révisions probabilités

10/10–22/10

PROGRAMME

Probabilités

- Révisions : tout le programme de première année sur les v.a prenant un nombre fini de valeurs. Situations se modélisant grâce à ces outils. Inégalités de MARKOV, BIENAYMÉ–TCHEBYCHEFF, CAUCHY–SCHWARZ.
- Variance, covariance, calcul de droite de régression.

⋆⋆⋆

- Axiomatique : Tribus, probabilités, variables aléatoires ;
- Chaines de MARKOV : mise en place de la matrice de transfert et calcul de la distribution au temps n connaissant la distribution au temps 0. (NB : nous n'avons pas travaillé spécifiquement de méthodes de calcul de puissances de matrices).
- Chaines de MARKOV : simulation informatique ;
- loi uniforme sur $[0,1]$: fonctions d'une ou plusieurs v.a uniformes et formule de transfert ;

Intégrales généralisées

- Intégrale convergente ou divergente sur un intervalle ouvert.
- Exemples élémentaires, fonctions de références.

⋆⋆⋆

- Intégration par parties, changement de variable.
- Le cas des fonctions positives.
- Intégrales absolument convergentes.

QUESTIONS DE COURS

1. Retrouver la formule
$$\hat{Y} = a.X + b \text{ avec } a = \frac{\mathbb{C}ov(X,Y)}{\mathbb{V}(X)},\, b = \mathbb{E}(Y) - a.\mathbb{E}(X)$$
donnant la régression linéaire d'une v.a. réelle Y sur une v.a. X par minimisation de $(a,b) \mapsto \mathbb{E}((Y-(aX+b))^2)$ (On se contente de trouver les points critiques).
2. Retrouver la formule (de statistiques descriptives) :
$$\hat{y} = a.x + b \text{ avec } a = \frac{c_{xy}}{\sigma_x^2},\, b = \overline{y} - a.\overline{x}$$
donnant la régression linéaire d'une série stat. numérique $y = (y_i)_{1\le i\le N}$ sur série stat. numérique $x = (x_i)_{1\le i\le N}$. On pourra procéder en se ramenant au cas probabiliste du point précédent.
3. Calcul numérique : Ecrire une fonction Python/numpy `Regression(x,y)` retournant les coefficients a, b de la régression $\hat{y} = a.x + b$ de y sur x. On pourra supposer que les séries statistiques `x` et `y` sont passées sous forme de tableaux numpy.
4. Enoncé de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (dans le cadre de la première année, on soulève pas la question de l'existence des espérances)
5. Définition du polynôme générateur (notion et terminologie hors-programme) f_X d'une variable aléatoire prenant des valeurs entières et formules :
$$f'(1) = \mathbb{E}(X),\, f''(1) = \mathbb{E}(X.(X-1))$$
6. Enoncé de la définition d'une intégrale convergente ou divergente. Cas élémentaires de référence sous forme d'exercices à savoir refaire.

⋆⋆⋆

7. Enoncé du théorème de comparaison (intégrande positive) ; application couplée à l'usage d'un équivalent ou d'un $o\,()$.
8. Enoncé du critère d'absolue convergence. Exemple d'utilisation élémentaire.

Pour la première semaine, ne sont au programme que les points avant les ⋆⋆⋆.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE : Intégrales généralisées, Variables aléatoires à densité.