Lycée Pierre-Gilles de Gennes **BCPST**
Mathématiques **2022-2023**

Programme de Colles 05

Probabilités : cadre général, v.a. à densité, théorèmes limite
21/11/2022–02/12/2022

PROGRAMME

Probabilités

- Révisions : tout le programme de première année sur les v.a prenant un nombre fini de valeurs.

Probabilités et variables aléatoires réelles à densité

- Densité, formule de transfert, fonction de répartition
- Loi classiques et leurs caractéristiques, espérance, variance, fonction de répartition : uniforme sur un intervalle $\mathscr{U}_{[a,b]}$, exponentielle, $\mathscr{E}(\lambda)$, loi normale $\mathscr{N}\left(m,\sigma^2\right)$.
- Exemples de calculs de la densité de $Y = f(X)$ connaissant la loi de X et la fonction f (cas où f est monotone et lisse ($\mathscr{C}^1$).)
- Utilisation de la formule $X = F_X^{-1}(U)$ pour simuler une v.a X de densité donnée à l'aide de $U \sim \mathscr{U}_{]0,1[}$. Existence de v.a. à fonction de répartition imposée.
- Condition suffisante sur la fonction de répartition d'une v.a. réelle pour que celle-ci soit à densité. Calcul de la densité par dérivation.
- Densité de $\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$ pour X et Y indépendantes, à densité. Extension à des familles de v.a.
- Densité de $X+Y$ pour X et Y indépendantes, à densité. Formule du produit de convolution. Le cas Gaussien.

$\star\star\star$

- Dans le cadre des variables à densité : Inégalité de MARKOV ; inégalité de CAUCHY–SCHWARZ, Variance, covariance, inégalité de BIENAYMÉ–TCHEBYCHEFF ;
- Théorèmes limite :
  - Loi faible des grands nombres, Utilisation(s) en simulation
  - Théorème central limite.

QUESTIONS DE COURS

1. Simulation informatique d'une variable aléatoire à densité connaissant sa fonction de répartition. Exemple à choisir parmi les lois classiques.
2. Simulation informatique d'une variable aléatoire gaussienne à l'aide des fonctions de la bibliothèque `scipy.stats`, Fonction de répartition gaussienne. Utilisation de `norm.rvs`, `norm.cdf`
3. Calcul de la loi d'une v.a. fonction continue, strictement monotone d'une variable uniforme ou de densité connue, sur le modèle de U^2 fait en cours. Méthodes de la fonction de répartition, méthode la formule de transfert générique.
4. Définition d'une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et d'une v.a. X admettant cette densité. Formule de transfert générique.
5. Définition, espérance, variance d'une v.a uniforme sur un intervalle $]a,b[$. Calcul de sa fonction de répartition.
6. Définition, espérance, variance d'une v.a exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calcul de sa fonction de répartition.
7. Démonstration du fait qu'une v.a. exponentielle satisfait la propriété d'absence de mémoire.
8. Définition d'une v.a. normale $\mathscr{N}\left(m,\sigma^2\right)$. Calculs de l'espérance et variance (en se ramenant par i.p.p à l'intégrale gaussienne.) d'une v.a. normale $\mathscr{N}(0,1)$.
9. Calcul des lois de $\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$ où X et Y, à densité, sont indépendantes : Exemple avec $X,Y \sim \mathscr{E}(\lambda)$.
10. Formule du produit de convolution :Loi de la somme de deux v.a. $\mathscr{N}(0,1)$, indépendantes.

$\star\star\star$

11. Formule du produit de convolution :Loi de la somme de deux v.a. uniformes sur $[-1,+1]$, indépendantes.
12. Enoncé et démonstration de l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ dans le cadre des variables à densité. Problème de l'existence des espérances concernées.
13. Enoncé de la loi faible des grands nombres. Preuve dans le cas d'un échantillon d'une v.a. admettant une variance et utilisation de l'inégalité de BIENAYMÉ–TCHEBYCHEFF.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE

- Statistiques, Suites récurrentes, équations différentielles et modélisation