

Programme de Colles 06

Probabilités : v.a. à densité, théorèmes limite ; Statistiques, Suites récurrentes
05/12/2022–16/12/2022

PROGRAMME

Probabilités

— Révisions : tout le programme de première année sur les v.a prenant un nombre fini de valeurs.

Probabilités et variables aléatoires réelles à densité

— Tout le programme, y compris les théorèmes limites. (TCL/LFGN)

Statistiques

— Statistiques d'échantillonnage : Echantillon, Test d'hypothèse statistique, test de conformité d'une moyenne et intervalle de confiance pour la moyenne.

Suites : révisions

- Résolution des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométrique ;
 - résolution d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : principe de superposition ; recherche de suites particulières satisfaisant la récurrence.
 - Sommes de termes consécutifs de telles suites
- ***
- Principes d'étude d'une suite récurrente réelle du type $u_{n+1} = f(u_n)$; notion d'intervalle stable par f .
 - Schéma d'EULER associé à la résolution d'un problème de CAUCHY, *i.e.* une équation différentielle avec condition initiale.

QUESTIONS DE COURS

1. Simulation informatique d'une variable aléatoire à densité connaissant sa fonction de répartition. Exemple à choisir parmi les lois classiques.
2. Simulation informatique d'une variable aléatoire gaussienne ou $\chi^2(d)$ à l'aide des fonctions de la bibliothèque `scipy.stats`. Fonctions de répartition. Utilisation de `norm.rvs`, `norm.cdf`, `chi2.rvs`, `chi2.cdf`
3. Formule du produit de convolution : Loi de la somme de deux v.a. $\mathcal{N}(0, 1)$, indépendantes.
4. Formule du produit de convolution : Loi de la somme de deux v.a. uniformes sur $[-1, +1]$, indépendantes.
5. Enoncé de la loi faible des grands nombres. Preuve dans le cas d'un échantillon d'une v.a. admettant une variance et utilisation de l'inégalité de BIENAYMÉ–TCHEBYCHEFF.
6. Utilisation de la loi des grands nombres pour construire une fonction Python calculant une estimation de la fonction de répartition d'une v.a. réelle X donnée par une fonction Python $X()$ quelconque. Implémentation machine.
7. Enoncé du théorème central limite (les deux versions) ;
8. Mise en oeuvre pratique du test de conformité de la moyenne à une moyenne donnée.

Exercice 1.—Chez le petit lapin, la durée moyenne de gestation est de 30 jours. On étudie un échantillon de 100 familles de gros lapins, pour lesquelles on observe une durée moyenne de gestation de 30,83 jours avec un écart-type de 4,07 jours. Peut-on conclure que la durée de gestation est significativement différente chez les petits et les gros lapins ?

9. **Exercice 2.**—En trouvant trois suites géométriques de raisons distinctes vérifiant la récurrence d'ordre 3

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n,$$

donner une expression pour la suite u vérifiant cette récurrence et vérifiant de plus $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et $u_2 = 14$.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE

— Suites récurrentes, équations différentielles : dynamique des populations, mécanique, cinétique chimique.