Lycée Pierre-Gilles de Gennes **BCPST**
Mathématiques **2022-2023**

Programme de Colles 08

Equations différentielles, nombres complexes et matrices
16/01/2023–28/01/2023

PROGRAMME

Informatique/Calcul scientifique

— Schéma d'EULER et résolution approchée d'un problème de CAUCHY (EDO d'ordre 1 scalaire avec condition initiale).
— Résolution d'un problème de CAUCHY vectoriel avec mise en oeuvre de la fonction `scipy.integrate.odeint`, tracé de la solution.

Equations différentielles ordinaires

— Programme précédent et Systèmes conservatifs.

Nombres complexes : fondamentaux et utilisation en analyse

Vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et matrices : rappels de BCPST1

— Définitions : opérations (somme, produit par un sclaire, produits matrice$\times$ vecteur, matrice$\times$ matrice.
— $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$ lien avec l'application linéaire canoniquement associée à A, liens avec les systèmes linéaires.
— Matrices carrées : exercices d'utilisation d'identités polynomiales pour le calcul de puissances et d'inverse : Binome de NEWTON (au programme) et Identité des séries géométriques (à redémontrer au besoin), polynôme annulant une matrice.

Diagonalisation de matrices : point de vue pratique

— Définition, pour une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), de valeur propre, vecteur propre associé à une valeur propre, spectre et sous-espaces propres. Calculs sur des exemples de petite taille.
— Diagonalisibilité [1] d'une matrice : définition par l'existence d'une base composée de vecteurs propres et validité, dans ce cas, de la formule de diagonalisation $D = P^{-1}.A.P$ par changement de base (explication purement calculatoire de $A.P = D.P$, par calcul sur les colonnes)

QUESTIONS DE COURS

1. Informatique : Simulation informatique d'une résolution d'EDO du premier ordre via la méthode d'EULER (récurrence à savoir écrire). Principe et codage informatique sur un exemple simple d'équation scalaire du premier ordre.
2. Informatique : Résolution numérique en utilisant `odeint` du problème de CAUCHY constitué du système d'équations différentielles $\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = y \\ \frac{dy}{dt} & = -4.x \end{cases}$ et de la condition initiale $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. On illustrera par un graphe des fonctions x et y sur une plage temporelle (intervalle de résolution) couvrant au moins 3 périodes.

   SVP apporter un ordinateur par groupe de colle pour ces exercices.
3. *cf.* Programme précédent : Preuve de la constance de
$$E = r_d(\ln u - u) + r_g(\ln v - v) = \ln\left(u^{r_d}e^{-r_d.u}v^{r_g}e^{-r_g.v}\right)$$
le long d'une solution du système différentiel de LOTKA–VOLTERRA réduit, etc.....
4. Pour n entier naturel ≥ 2. Résolution complète de l'équation $z^n = 1$, $z \in \mathbb{C}$ et représentation graphique des solutions.
5. **Exercice 1.—**Déterminer les racines carrées de $1+i$ de deux façons différentes. Valeur « exacte [2] » de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$
6. **Exercice 2.—**Déterminer, en utilisant l'exponentielle complexe, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto e^{-2t}\cos(t)$.
7. Donner la définition des éléments propres d'une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. On expliquera l'équivalence « λ valeur propre de $M \Leftrightarrow M - \lambda.I_n$ n'est pas inversible ».
8. **Exercice 3.—**Diagonaliser la matrice $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE

— Polynômes. Algèbre linéaire abstraite : définitions fondatrices.

1. Aucun résultat général : les théorèmes du programme concernant ce sujet seront vus en Février
2. En terme d'expression algébrique avec racine carrée, en nombres entiers. Sans ça, une valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ est...$\cos\frac{\pi}{8}$