Programme de Colles 09

Polynômes, Algèbre linéaire abstraite et révisions
30/01/2023–10/02/2023

PROGRAMME

Comme d'habitude, les points après $\star\star\star$ sont pour la 2e semaine.

Informatique/Calcul scientifique

- Etude informatique de l'algorithme du pivot de GAUSS : Cas d'un système à matrice carrée inversible

Vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et matrices : rappels de BCPST1
Diagonalisation de matrices : point de vue pratique

- Définition, pour une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des éléments propres
- Construction d'une matrice diagonalisante.

Polynômes à coefficients réels ou complexes

- Racines d'un polynôme, multiplicité, théorème de D'ALEMBERT–GAUSS.
- Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Fondamentaux d'algèbre linéaire abstraite.

- Définitions d'un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-ev E, d'un sev de E. Exemples (e.v. et s.e.v de fonctions, de suites, de polynômes, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$)
- Intersection de sev.
- Sev engendré par une famille finie de vecteurs, famille génératrice d'un sev. Notation $\text{Vect}\langle u_1,\dots,u_n\rangle$. Ecriture de solutions de problèmes linéaires homogènes variés sous cette forme.

$\star\star\star$

- Application linéaire $E\to F$, (morphismes, endomorphismes, formes linéaires), $\mathscr{L}(E,F),\mathscr{L}(E)$. Exemples variés.
- Opérations sur les applications linéaires, composition, réciproque, notation f^n pour $f\in\mathscr{L}(E), n\in\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$
- Noyau, image : caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.

QUESTIONS DE COURS

1. Informatique : Savoir identifier les différentes étapes dans une fonction Python implémentant le pivot de GAUSS, savoir compléter des fonctions implémentant les opérations élémentaires de GAUSS.

   Il s'agit d'informatique « sur papier », nul besoin de machine.
2. Donner la définition des éléments propres d'une matrice carrée $n\times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. On expliquera l'équivalence « λ valeur propre de $M \Leftrightarrow M-\lambda.I_n$ n'est pas inversible ».
3. **Exercice 1.—**Diagonaliser l'une des matrices $\Delta=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$ ou $\Delta'=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
4. Les racines (complexes) du polynôme $P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}X^k$ sont toutes simples.
5. Factorisation du polynôme $(X+1)^n-1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. (attention, il faut tout refaire à la main, les racines n-ièmes de l'unité ne sont pas au programme de BCPST.)
6. Résolution d'un système linéaire 2×2 à l'aide du déterminant. Formules, formule de l'inverse d'une matrice 2×2 et application sur un exemple.
7. Sur des exemples simples, montrer qu'une partie d'un $\mathbb{K}$-ev E est ou n'est pas un sev de E.
8. Démontrer que l'intersection de deux sev d'un ev E est un sev de E.

   $\star\star\star$
9. Démontrer que l'application $I:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C}\\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t).e^t\,dt\end{array}\right.$ est bien définie, $\mathbb{C}$-linéaire.
10. Si $f\in\mathscr{L}(E,F)$, $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont des sev respectivement de E et F et détermination de ces espaces sur un exemple.
11. Caractérisation de l'injectivité par le noyau nul : démonstration et application à un exemple simple.

PRÉVISIONS POUR LA QUINZAINE SUIVANTE

- Algèbre linéaire : Familles libres, bases, coordonnées, matrices d'applications linéaires, changement de base ; exemples.