

Programme de Colles 10

Algèbre linéaire abstraite, bases et matrices, diagonalisation
13/02/2023–10/03/2023

PROGRAMME

Comme d'habitude, les points après *** sont pour la 2e semaine.

Informatique/Calcul scientifique

- Graphes, implémentation, chaînes de MARKOV, *** parcours en largeur

Diagonalisation de matrices : point de vue pratique

Fondamentaux d'algèbre linéaire abstraite.

cf. Programme précédent

Algèbre linéaire en dimension finie

- Familles libres et bases, dimension. Exemples de bases dans des espaces de fonctions, de polynômes et de matrices.
- Bases en dimension finie. Coordonnées dans une base.
- Détermination de la dimension d'un $\mathbb{K}$ -ev. Arguments de dimension. Rang d'une famille de vecteurs.
- Rang d'une application linéaire, d'une matrice. Liens entre ces différentes notions de rang.
- Inversibilité d'une application linéaire et dimension.

- Matrices d'applications linéaires et d'endomorphismes.
- Matrices de passage, formules de changement de bases, matrices semblables.
- Théorème du rang « abstrait »

Diagonalisation des matrices et des endomorphismes en dimension finie

- Eléments propres d'un endomorphisme, lien avec ceux d'une matrice associée. Diagonalisabilité.
- Valeurs propres d'une matrice et de sa transposée.
- Familles libres et bases obtenues par juxtaposition de familles libres de v.p. associés à des v.p. distinctes.
- Critères de diagonalisabilité : CNS portant sur la somme des dimensions des sev propres ; CS des n valeurs propres distinctes. Le cas des matrices symétriques réelles.

QUESTIONS DE COURS

1. Démontrer que la composée de deux applications linéaire est une application linéaire.
2. Démontrer que l'application réciproque d'un isomorphisme est une application linéaire.
3. Soit $D : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'application linéaire de décalage définie par $D(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $\psi = D^2 - 5.D + 6.i_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$. Montrer que par restriction, D définit un endomorphisme de $\text{Ker } \psi$. Dans l'exemple précédent, déterminer une base de $\text{Ker } \psi$.
4. Démonstration type qu'une famille de vecteurs est libre et application sur un exemple (fonctions, polynômes, etc.).
5. Démonstration du résultat suivant : Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . Si $f(\mathcal{E}) := (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F alors $\mathcal{E}$ est libre dans E .
6. Démonstration du résultat suivant : Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, *injective* et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille *libre* de vecteurs de E . Alors $f(\mathcal{E}) := (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F .

7. Exemple simple de détermination du rang d'une famille de vecteurs d'un ev E via leurs coordonnées dans une base.
8. Construction de matrices d'application linéaire à mettre en oeuvre sur des exemples facilement calculables.
9. Calcul de matrices d'endomorphismes via la formule du changement de base sur des exemples concrets.
10. Mise en place d'une matrice M de chaîne de MARKOV sur un exemple et argument, sur cet exemple, que 1 est valeur propre de cette matrice. Passage à la limite de M^n et détermination de la « loi limite ».
11. Démonstration du fait que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ sont valeurs propres *distinctes* d'un endomorphisme, associées aux vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 alors (v_1, v_2, v_3) est libre.
12. Démonstration du fait que si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ sont valeurs propres *distinctes* d'un endomorphisme (en dimension finie), $\mathcal{V}_1$, une base de l'espace propre associé à λ_1 , $\mathcal{V}_2$, une base de l'espace propre associé à λ_2 , alors $\mathcal{V}_1 \# \mathcal{V}_2$, la famille obtenue par juxtaposition de $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$, est libre dans E .

PRÉVISIONS POUR LA QUINZAINE SUIVANTE

- Séries, Variables aléatoires discrètes.