Programme de Colles 11

Bases, Matrices, Diagonalisation, Séries
13/03/2023–24/03/2023

PROGRAMME

Comme d'habitude, les points après $\star\star\star$ sont pour la 2e semaine.

Informatique/Calcul scientifique

— Graphes, implémentation, chaînes de MARKOV, parcours en largeur

Algèbre linéaire en dimension finie

cf. Programme précédent

Diagonalisation des matrices et des endomorphismes en dimension finie

— *cf.* Programme précédent

$\star\star\star$

— Technique du polynôme annulateur et résultats associés en exercice.
— NB : Le cas des matrices symétriques réelles ne sera traité que dans le chapitre **Produit scalaire sur** $\mathbb{R}^n$.

Séries

— Série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ de terme général « u_n » , Séries convergentes, définitions, divergence grossière.
— Exemples : séries géométriques, séries télescopiques, séries géométriques dérivées $\sum_{n\geq 0} n.q^{n-1}$, $\sum_{n\geq 0} n(n-1).q^{n-2}$,.. séries de t.g. $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$
— Le théorème de comparaison pour les séries à termes ≥ 0 ;
— Exemples de référence : séries géométriques, série harmonique, série de RIEMANN numéro 2 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$;
— Critère de convergence absolue, exemples
— Série exponentielle, convergence et valeur de la somme.

QUESTIONS DE COURS

1. Enoncé et démonstration [1] de la formule de changement de base pour un endomorphisme en dimension finie. Cela inclus la définition correcte de la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ vers une base $\mathscr{B}'$.
2. Enoncé de la formule de changement de base pour un endomorphisme en dimension finie et utilisation sur un exemple simple en dimension 3.
3. Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = f\circ f = 0$.
   (a) Démontrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. En déduire $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.
   (b) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice associée à f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Démonstration du fait que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ sont valeurs propres *distinctes* d'un endomorphisme, associées aux vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 alors (v_1, v_2, v_3) est libre.
5. Démonstration du fait que si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ sont valeurs propres *distinctes* d'un endomorphisme (en dimension finie), $\mathscr{V}_1$, une base de l'espace propre associé à λ_1, $\mathscr{V}_2$, une base de l'espace propre associé à λ_2, alors $\mathscr{V}_1\#\mathscr{V}_2$, la famille obtenue par juxtaposition de $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$, est libre dans E.

$\star\star\star$

6. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $P(M) = 0$ alors les valeurs propres de M sont à rechercher parmi les racines de P. Exemple.
7. Sur un exemple relativement simple, mise en oeuvre du thm de comparaison pour les séries à termes positifs, éventuellement suivi du théorème $ACV \Rightarrow CV$ et éventuellement précédé d'une comparaison asymptotique.
8. Valeurs des sommes de séries géométriques dérivées première et seconde.
9. Valeurs des sommes de la série exponentielle, de $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et de $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

PRÉVISIONS POUR LA DERNIÈRE QUINZAINE

— Variables aléatoires discrètes. Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

1. En notant ${}^{\mathscr{F}}[f]_{\mathscr{E}}$ la matrice de f / bases $\mathscr{E}$ au départ et $\mathscr{F}$ à l'arrivée, utiliser la relation ${}^{\mathscr{G}}[g\circ f]_{\mathscr{E}} = {}^{\mathscr{G}}[g]_{\mathscr{F}}.{}^{\mathscr{F}}[f]_{\mathscr{E}}$ sur la décomposition $f = \mathrm{id}_E \circ f \circ \mathrm{id}_E$