Programme de Colles 12

Variables aléatoires discrètes, Géométrie Euclidienne
27/03/2023–31/12/2023

PROGRAMME

Les points après $\star\star\star$ sont pour les concours.

Informatique/Calcul scientifique

— Algorithme de comptage des mots dans un texte, utilisation de dictionnaires.
— Révisions de BCPST1 : Algorithmes de tri de première année.

Variables aléatoires discrètes

1. Généralités : Formule des probabilités totales dénombrable, v.a. discrètes numériques *a.k.a* variables aléatoires numériques à valeurs dans un ensemble dénombrable, loi, existence d'espérance (intégrabilité) et CVA de la série associée, formule de transfert, existence de variables à loi imposée. Simulation informatique générique de telles variables.
2. Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$, notée $\mathscr{G}(\mathbb{N}^*, p)$. Définition comme loi du rang du premier succès dans un schéma de BERNOULLI i.i.d.. Loi, espérance, variance, formule de transfert.
3. Loi de POISSON de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$, notée $\mathscr{P}(\lambda)$. Présentation comme loi limite de binomiales $\mathscr{B}\left(N, \frac{\lambda}{N}\right)$ avec $N \to +\infty$ et espérance constante, valant λ. Loi, espérance, variance. formule de transfert.

$\star\star\star$

4. Compléments sur les séries ACV : sommation par paquets.
5. Loi de la somme de deux v.a. de POISSON indépendantes.
6. Loi de la somme de deux v.a. géométriques indépendantes.
7. Couples de variables aléatoires à valeurs entières, v.a. à valeurs $\mathbb{N}^2$. Loi, espérance d'une composante, variance, covariance du couple. Lois marginales, loi conditionnelles, critère d'indépendance des composantes.
8. Loi de la somme : cas indépendants (convolution discrète) et non-indépendant par décomposition suivant les valeurs de l'une des composantes.

Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

1. Orthogonalité et théorème de PYTHAGORE. Dessins dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Définitions du produit scalaire et de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, écriture matricielle.
3. Propriétés élémentaires : linéarité, symétrie
4. Inégalités : CAUCHY–SCHWARZ, inégalité triangulaire
5. Vecteurs orthogonaux, vecteurs normés, B.O.N
6. Théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles. Commentaires, détermination d'une B.O.N. de diagonalisation à partir d'une base de diagonalisation. Des vecteurs propres associés à des v.p. distinctes sont orthogonaux.
7. Familles orthogonales, orthonormales, bases. Caractérisations matricielles. Existence d'une BON d'un sev F de $\mathbb{R}^n$.
8. Projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Formule au cas où une BON adaptée à F est connue.
9. La projection orthogonale d'un point sur un sev F réalise la distance du point à F.

QUESTIONS DE COURS

1. Description de la loi, valeurs de l'espérance et de la variance d'une v.a. $\mathscr{G}(\mathbb{N}^*, p)$. Fonctions de répartition et d'anti-répartition.
2. Description de la loi, valeurs de l'espérance et de la variance d'une v.a. $\mathscr{P}(\lambda)$.
3. Enoncé correct et démonstration du fait qu'une binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec n grand et $p = \frac{\lambda}{n}$ est proche, en loi d'une v.a. POISSON $\mathscr{P}(\lambda)$.
4. Simulation informatique d'une variable géométrique (partie entère d'une v.a. exponentielle),
5. Simulation informatique d'une variable de POISSON (par binomiale $\mathscr{B}\left(N, \frac{\lambda}{N}\right)$).

$\star\star\star$

6. Démonstration du fait (stabilité par somme de la loi de POISSON) que si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, X et Y indépendantes alors $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$
7. Vérifier sur un exemple simple qu'une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou une suite « double » $(p_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est la loi d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou d'une v.a. Z à valeurs dans $\mathbb{N}^2$.
8. Calcul sur un exemple simple, pour un couple de variables aléatoires à valeurs $\mathbb{N}$, des lois marginales, des lois conditionnelles et test d'indépendance.
9. Si $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sont valeurs propres *distinctes* d'une matrice symétrique réelle associées respectivement aux vecteurs propres v_1 et v_2 alors v_1 et v_2 sont orthogonaux.
10. Sur un exemple : Etant donnés deux vecteurs u et v dans $\mathbb{R}^n$, non colinéaires, construire une base orthogonale (u, v') de $F = \text{Vect}\langle u, v\rangle$ en choisissant correctement $v' = u - \lambda.v$. En construire une BON.
11. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^n$.

ON SE REVOIT MI-MAI ! TENEZ BON, NE LÂCHEZ RIEN !

"Oh, man! The coffee's cold! They thought of everything!"