Devoir 01

Analyse : fonctions d'une variable réelle
Mercredi 13/09/2023

Partie A

La fonction arcsinus

A.1. Etudier (régularité, dérivée, tableau de variations, graphe) la fonction a définie par

$$\forall t \in \left]-1,+1\right[, \, a(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

A.2. Simplifier, pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$, $a(\sin\theta)$.
A.3. Justifier que la fonction a admet une unique primitive sur l'intervalle $\left]-1,+1\right[$, notée A, vérifiant $A(0)=0$. Justifier que A est impaire.
A.4. Démontrer que A est strictement croissante sur son intervalle de définition et, en majorant l'écriture intégrale [1]

$$A(x) = \int_0^x a(t)\, dt,$$

démontrer la famille d'inégalités :

$$\forall x \in [0,1[, \, 0 \leq A(x) \leq 2(1-\sqrt{1-x})$$

A.5. Démontrer que, lorsque x tend vers 1^-, $A(x)$ admet une limite finie $\ell \in [0,2]$
A.6. Simplifier l'expression de la fonction $\theta \mapsto A(\sin\theta)$ définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$. On pourra calculer (et simplifier) la dérivée de cette fonction.
A.7. Identifier le nombre ℓ.
A.8. Démontrer que la fonction sinus (sin) définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,+1]$ dont, A, prolongée par continuité aux bornes de ce dernier intervalle, est la bijection réciproque.
A.9. Donner le graphe de la fonction A ainsi prolongée.

⋆⋆⋆

La fonction A s'appelle la fonction « arc sinus » et est usuellement notée arcsin. On a les identités :

$$\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right], \, \arcsin(\sin\theta) = \theta,$$

$$\forall t \in [-1,+1], \, \sin(\arcsin(t)) = t,$$

$$\forall t \in \left]-1,+1\right[, \, \arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

⋆⋆⋆

1. utiliser–en le justifiant– le fait que $\sqrt{1-t^2} \geq \sqrt{1-t} > 0$ lorsque $t \in [0,x]$

Partie B
Une intégrale

On devra, dans cette partie, utiliser la fonction arcsin définie dans la partie précédente.

B.1. Recopier les étapes de calcul suivantes en y ajoutant les éléments de rédaction manquants (quantification des variables, justifications attendues par les rapports de concours) :

$$\begin{aligned} I(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt &= \left[t.\sqrt{1-t^2}\right]_0^x + \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &= x.\sqrt{1-x^2} - \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt &= \frac{1}{2}x.\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x) \end{aligned}$$

B.2. Indiquer la nature de la courbe d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ (dans le plan rapporté à un repère orthonormé) et donner l'interprétation géométrique en termes d'aire de l'intégrale calculée dans la question précédente. Traiter le cas particulier $x = 1$.

Partie C
Une application

Une cuve de fioul agricole, cylindrique, de rayon $R > 0$, de longueur $\ell > 0$ est emplie de fioul jusqu'à une hauteur [2] h avec $0 < h < 2R$ (ce que l'on peut voir sur une jauge extérieure). Le volume de fioul est noté $V(h)$.

C.1. Faire un dessin.

C.2. Après avoir analysé l'homogénéité physico-géométrique du problème, exprimer $V(h)$ à l'aide de la fonction I (définie dans la patie précédente), h, R et ℓ.

C.3. Ecrire un programme Python donnant le graphe de $V(h)$ en fonction de h (on pourra graduer l'axe des abscisses à l'aide de « multiples » de R et l'axe des ordonnées à l'aide « multiples » de $\ell.R^2$). Coller ce graphe sur votre copie.

2. L'axe de ce cylindre est forcément parallèlle au sol, pourquoi ?

Correction DM 01

Correction Ex.–1

Partie A
La fonction arcsinus

A.1. Posons $J =]-1,+1[$. Comme

$$\forall t \in J, 0 \leq |t| < 1$$

alors

$$\forall t \in J, t^2 < 1$$

et donc

$$\forall t \in J, 1-t^2 > 0.$$

Par composition des fonctions $\mathscr{C}^1$ (sur leurs intervalles de départ respectifs, indiqués ci-après), $t \mapsto 1-t^2$ sur J à valeurs dans $]0,+\infty[$, $y \mapsto y^{-\frac{1}{2}}$ sur $]0,+\infty[$ (à valeurs dans $]0,+\infty[$), la fonction

$$a : t \mapsto (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

est CC^1 sur J, à valeurs dans $]0,+\infty[$. Comme

$$\frac{d(1-t^2)}{dt} = -2t, \ \frac{dy^{-\frac{1}{2}}}{dy} = -\frac{1}{2}.y^{-\frac{3}{2}}$$

on a,

$$\forall t \in J, a'(t) = -\frac{1}{2}.(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}.(-2t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}^3}$$

Cette fonction a' est clairement impaire sur J ($a'(-t) = \frac{-t}{(1-(-t)^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = -a'(t)$), strictement négative sur $]-1,0[$, strictement positive sur $]0,+1[$.

Au niveau des limites aux bornes du domaine de définition, on a, lorsque $t \to 1^{-1}$, $t^2 \to 1^-$, $1-t^2 \to 0^+$, $\sqrt{1-t^2} \to 0^+$, $a(t) \to +\infty$ et, la fonction a étant clairement paire, lorsque $t \to -1^+$, $a(t) \to +\infty$.

On peut donc résumer ce qui vient d'être fait en un tableau de variations :

t	-1		0		$+1$
$a'(t)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
$a(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de a en Fig. 1 n'apporte guère plus d'informations que ce tableau de variations.

A.2. Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$a(\sin\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\cos\theta}.$$

Dans ce calcul, on a utilisé successivement le fait que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, puis le fait que $\cos\theta > 0$ (car θ est dans l'intervalle indiqué au début).

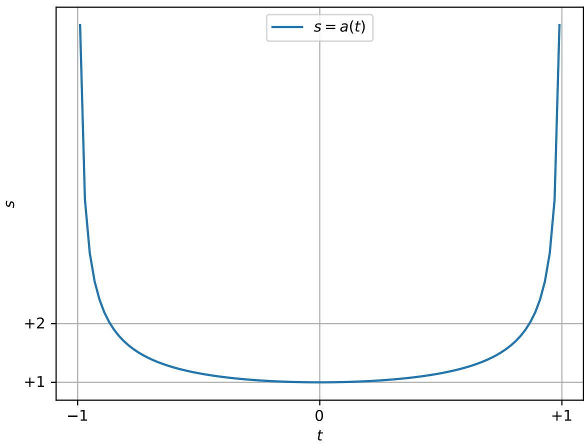

FIGURE 1 – Le graphe de a.

A.3. La fonction a est *continue* sur l'intervalle $J =]-1,+1[$. Elle y admet donc une unique primitive, notée A, vérifiant $A(0) = 0$ (C'est le théorème fondamental de l'Analyse ou une de ses variantes proches). On peut écrire (passage en notation intégrale)

$$\forall x \in J, A(x) = \int_0^x a(t)\ dt$$

Soit $x \in J$ alors $-x \in J$ et on a, par le changement de variable *affine* $s = -t$, $(ds = -dt)$:

$$A(-x) = \int_0^{-x} a(t)\ dt = -\int_0^x a(s)\ ds = -A(x)$$

La fonction A est donc impaire sur l'intervalle J.
A.4. Par essence, la dérivée de A est a qui est clairement strictement postiive sur l'intervalle J. La fonction A est donc strictement croissante sur J.

Par ailleurs, si $x \in J$, $x > 0$, on a

$$\forall t \in [0,x]\,,\, 1-t^2 = (1-t).(1+t) \geq (1-t) > 0$$

et donc par décroissance de $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y}}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, on a

$$\forall t \in [0,x]\,,\, 0 < a(t) \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Par intégration de ces inégalités de fonctions (« croissance de l'intégrale »),

$$0 \leq \int_0^x a(t)\ dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\ dt = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x = 2(1-\sqrt{1-x})$$

Le nombre x étant pris quelconque dans l'intervalle $[0,1[$, on a bien

$$\forall x \in [0,1[\,,\, 0 \leq A(x) \leq 2(1-\sqrt{1-x})$$

A.5. La question précédente montre que la fonction A est croissante sur $[0,1[$ et qu'elle est majorée sur cet intervalle par le nombre 2 (car $\forall x \in [0,1[\,,\, 2(1-\sqrt{1-x}) \leq 2$). Etant croissante est majorée, lorsque x tend vers 1^-, $A(x)$ admet une limite finie ℓ. Ce nombre $\ell \in [0,2]$ par passage à la limite dans la famille d'inégalité précédente.

A.6. Posons, pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, $i(\theta) = A(\sin\theta)$.

Comme $\theta \mapsto \sin\theta$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, à valeurs dans $J =]-1, +1[$ et que A est $\mathscr{C}^1$ sur J, par composition, i est $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[, i'(\theta) = A'(\sin\theta).\cos\theta == a(\sin\theta).\cos\theta$$

En utilisant la relation démontrée en A.2, on a donc

$$\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[, i'(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}.\cos\theta = 1$$

Par intégration et du fait que $i(0) = A(0) = 0$, on a donc

$$\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[, i(\theta) = \theta.$$

A.7. On vient de démontrer que

$$\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[, A(\sin\theta) = \theta$$

et donc, comme lorsque $\theta \to +\frac{\pi}{2}^-$, $x = \sin\theta \to 1^-$ (sans prendre la valeur 1), et que lorsque $x \to 1^-$, $A(x) \to \ell$, on a, en passant l'identité à cette limite

$$\ell = +\frac{\pi}{2}.$$

A.8. On peut prolonger A à l'intervalle $[-1, +1]$ en posant $A(-1) = -\ell = -\frac{\pi}{2}$, $A(+1) = +\ell = +\frac{\pi}{2}$, la fonction obtenue est impaire, continue sur $[-1, +1]$ est vérifie

$$\forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], A(\sin\theta) = \theta$$

Cela démontre que

$$A \circ \sin = \mathrm{id}_{\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]}$$

Par ailleurs, la fonction sinus (sin) est continue, strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. Par le théorème de la bijection continue, elle définit donc une bijection de $\left[-\sin\frac{\pi}{2}, +\sin\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, +1]$.

Notons $\tilde{A} : [-1, +1] \to \left[-\sin\frac{\pi}{2}, +\sin\frac{\pi}{2}\right]$ sa bijection réciproque.

En composant l'identité précédente par $\tilde{A}$ à droite

$$A \circ \sin \circ \tilde{A} = \mathrm{id}_{\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]} \circ \tilde{A},$$

c'est à dire

$$A = \tilde{A}.$$

A.9. Pour construire le graphe de la fonction A ainsi prolongée on construit le graphe de sin et on intervertit abscisses et ordonnées *cf.* Fig. 2.

Partie B

Une intégrale

On devra, dans cette partie, utiliser la fonction arcsin définie dans la partie précédente.

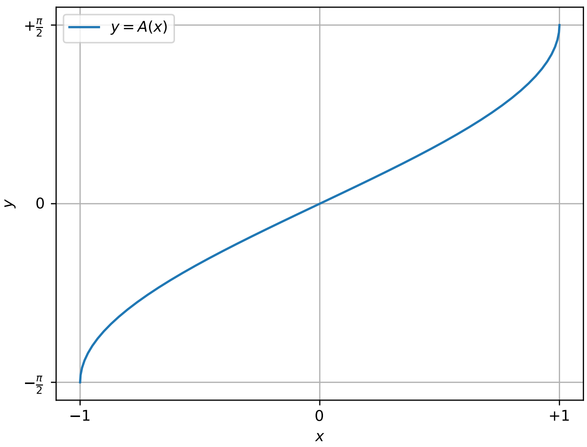

FIGURE 2 – Le graphe de A.

B.1. Recopions ! Soit $x \in]-1,+1[$. Comme pour $x=0$, l'identité est triviale, on peut supposer $x \neq 0$ et on pose $J(x)$ le segment $[0,x]$. En intégrant par parties, on a

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt \quad = \quad \left[t.\sqrt{1-t^2}\right]_0^x + \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Pour cette intégration par parties, on a posé, pour $t \in J(x)$, $u'(t) = 1$ (*i.e.* $u(t) = t$, $v(t) = \sqrt{1-t^2}$, $v'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et les deux fonctions u et v sont clairement $\mathscr{C}^1$ sur $J(x)$ qui est inclus dans l'intervalle $]-1,+1[$.

Le calcul du crochet donne

$$\left[t.\sqrt{1-t^2}\right]_0^x = x.\sqrt{1-x^2}$$

et en écrivant, pour $t \in]-1,+1[$,

$$\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{t^2-1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

on obtient, après intégration de cette identité sur $J(x)$, l'autre partie de l'identité cherchée par linéarité de l'intégrale :

$$I(x) \quad = \quad x.\sqrt{1-x^2} - \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

i.e.

$$I(x) \quad = \quad x.\sqrt{1-x^2} - I(x) + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

En ajoutant $I(x)$ de part et d'autre de cette identité (et en divisant par 2 !), il reste :

$$I(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt \quad = \quad \frac{1}{2}x.\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$$

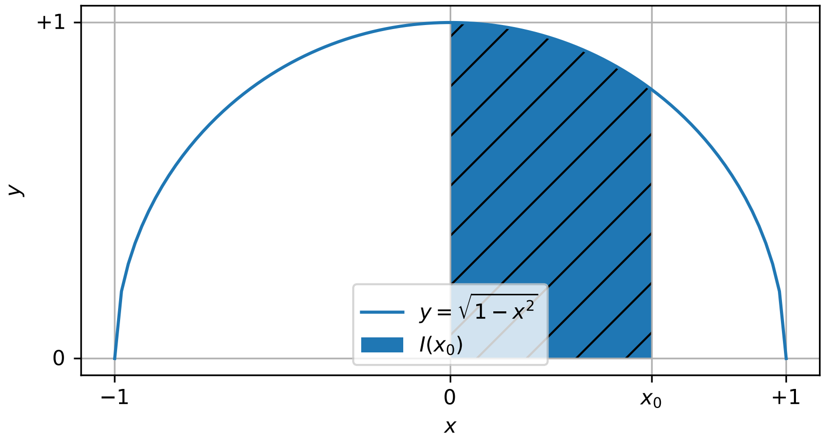

FIGURE 3 – Signification géométrique de $I(x)$.

B.2. La courbe d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ (dans le plan rapporté à un repère orthonormé) est la partie où $x \in [-1,+1]$, $y \geq 0$ de la courbe d'équation $y^2 = 1 - x^2$, cv'est à dire de la partie située dans le demi-plan supérieur du cercle de centre 0 de rayon 1.

L'intégrale calculée dans la partie précédente, lorsque $x > 0$ est l'aire de la partie hachurée sur la figure 3. Lorsque $x = +1$, il s'agit de l'aire du quart de cercle de rayon 1, on doit donc avoir $I(1) = \frac{\pi}{4}$, ce qui est bien le cas avec la formule trouvée en B.1.

Partie C

Une application

C.1. *cf.* Fig. 4.

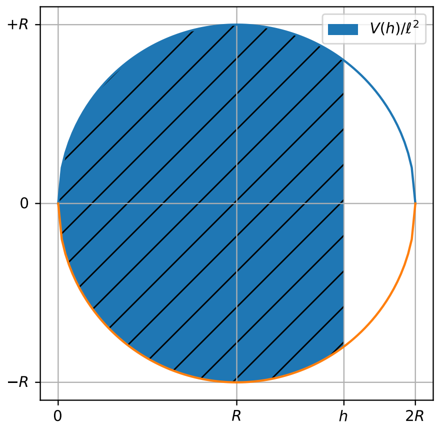

FIGURE 4 – $V(h)$ La cuve vue dans l'axe, attention, l'axe des abscisses est la verticale : tourner le dessin !

.

C.2. On voit sur le dessin (puzzle !) que

$$V(h) = \ell.R^2 \left(2.I(h/R-1) + \frac{\pi}{2}\right)$$

On considère le rapport h/R (adimensionné et compris entre 0 et 2) comme valant $x+1$ par rapport au dessin précédent en Fig. 3. A ce moment, l'aire hachurée, sans compter le demi-cercle de gauche est $2I(x).R^2 = 2.I(h/R-1).R^2$. Il faut encore ajouter l'aire du demi-cercle et multiplier le tout par ℓ pour avoir le volume du cylindre.

C.3. *cf.* Fig. 5.

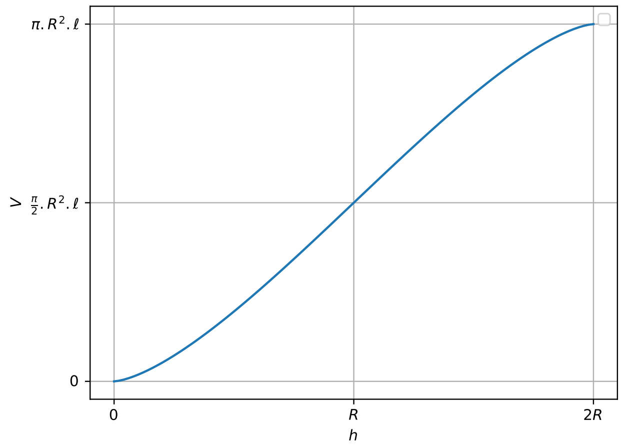

FIGURE 5 – Le volume de fioul en fonction de la hauteur visible.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fig,ax = plt.subplots()
plt.xlabel('$h$'); plt.ylabel('$V$')
plt.xticks([-1,0,+1],['$0$','$R$','$2R$'])
plt.yticks([0,np.pi/2,np.pi],
           ['$0$',r'$\frac{\pi}{2}.R^2.\ell$',r'$\pi.R^2.\ell$'])
x = np.linspace(-1,1,100)
y = x*np.sqrt(1-x*x)+np.arcsin(x) + np.pi/2
plt.plot(x,y)
plt.grid()
plt.legend()
plt.savefig('../figures/graphe-volume.pdf',format='pdf')
plt.show()
```