Devoir 02

Analyse : Fonctions de deux variables réelles, Probabilités « finies »
Mercredi 04/10/2023

Exercice 1.— Fonctions homogènes et relation d'EULER.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, à valeurs réelles.

On dit que f est positivement homogène de degré α (où α est un réel fixé) si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \forall t \in]0,+\infty[, f(t.x,t.y) = t^\alpha.f(x,y).$$

1. Des exemples.
1.a. Montrer qu'une fonction linéaire est positivement homogène de degré 1.
1.b. Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = a.x^2 + 2b.x.y + c.y^2.$$

Montrer que f est fonction positivement homogène de degré α pour un certain α à déterminer.
1.c. Donner un exemple de fonction positivement homogène de degré -2.
1.d. Soit f et g deux fonctions positivement homogènes de degrés respectifs α et β. Montrer que $h = f.g$ est positivement homogène de degré γ pour une valeur de γ à déterminer.
1.e. Soit f une fonction positivement homogène de degré α et β un nombre réel. Montrer que $h = |f|^\beta$ est positivement homogène de degré γ pour une valeur de γ à déterminer.
2. On suppose que f est une fonction positivement homogène de degré α, continue sur tout pavé ouvert de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *à valeurs strictement positives* sur cet ensemble.
2.a. Justifier que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$$

est continue, 2π-périodique, à valeurs dans $]0,+\infty[$.
2.b. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}, (x,y) = (r.\cos\theta, r.\sin\theta) \Rightarrow f(x,y) = r^\alpha.F(\theta)$$

2.c. Démontrer qu'il existe deux constantes strictement positives C_- et C_+ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}, (x,y) = (r.\cos\theta, r.\sin\theta) \Rightarrow C_-.r^\alpha \leq f(x,y) \leq C_+.r^\alpha.$$

2.d. Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = a.x^2 + 2b.x.y + c.y^2.$$

Montrer que si $a > 0$, $b^2 - ac < 0$ alors f est dans les conditions de cette question 2. Qu'en conclure ?
3. On suppose que la fonction f est positivement homogène de degré α, $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Montrer, en considérant (on la dérivera de deux façons différentes et on choisira une valeur de t appropriée) pour un couple $(x_0,y_0)\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donné, la fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t > 0, g(t) = f(t.x_0, t.y_0)$$

que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \alpha.f(x,y) = x.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \qquad \text{(Euler)}$$

4. Réciproquement, on suppose que f est une fonction réelle, $\mathscr{C}^1$ sur tout pavé ouvert de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vérifiant la relation (Euler). Montrer que f est positivement homogène de degré α.
5. (Question ouverte) Dans quel contexte du cours de thermodynamique la relation (Euler) est-elle utilisée ?

Exercice 2.— Coordonnées polaires et Laplacien.

Cet exercice purement calculatoire a pour objet de vous faire travailler la formule de dérivation d'une composée d'une fonction de deux variables par un arc paramétré. Il faut expliquer 'comment' on obtient les formules demandées à partir de cette formule de dérivation d'une fonction d'une seule variable réelle.

— Posons [1] $\Omega = \mathbb{R}^2$. Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (du couple (x,y)), de classe $\mathscr{C}^2$, on définit la fonction Δf, le « Laplacien [2] de f » par la formule :

$$\forall (x,y) \in \Omega,\ (\Delta f)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

— Posons $\mathrm{A} =]0,+\infty[\times \mathbb{R}$. Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, effectuer le changement de variable en coordonnées polaires c'est considérer la fonction $g : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (r,\theta) \in \mathrm{A},\ g(r,\theta) = f(r.\cos\theta, r.\sin\theta).$$

Le but de l'exercice est de déterminer une formule pour le Laplacien Δf en termes de la fonction g et de ses dérivées partielles. On se donne donc f de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, on définit g sur A par la formule proposée.

1. On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ et on considère $h : r \mapsto g(r,\theta) = f(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$. Justifier que h est bien définie, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et donner une formule pour sa fonction dérivée.

Montrer (on se ramènera au calcul fait précédemment sur h) que :

$$\forall (r,\theta) \in A,\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta.\frac{\partial f}{\partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + \sin\theta.\frac{\partial f}{\partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$$

2. Montrer en raisonnant de même, que pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, $r \mapsto \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\begin{aligned}\forall (r,\theta) \in A,\ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) \quad = \quad & \cos^2\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + \cos\theta.\sin\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + \\ & \sin\theta.\cos\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + \sin^2\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r.\cos\theta, r.\sin\theta)\end{aligned}$$

3. Montrer, en raisonnant de même, que pour $r \in]0,+\infty[$ fixé, la fonction $k : \theta \mapsto g(r,\theta) = f(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall (r,\theta) \in A,\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta.\frac{\partial f}{\partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + r.\cos\theta.\frac{\partial f}{\partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$$

4. Montrer, en raisonnant de même, que pour $r \in]0,+\infty[$ fixé, la fonction $\theta \mapsto \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\begin{aligned}\forall (r,\theta) \in A,\ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) \quad = \quad & -r\cos\theta.\frac{\partial f}{\partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) - r.\sin\theta.\frac{\partial f}{\partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) \\ & + r^2\sin^2\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) - r^2\sin\theta.\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) \\ & - r^2.\cos\theta.\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + r^2.\cos^2\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r.\cos\theta, r.\sin\theta)\end{aligned}$$

5. On admet que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur A. Comment choisir $\alpha(r), \beta(r)$ pour que l'on ait :

$$\forall (r,\theta) \in A,\ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \alpha(r).\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \beta(r).\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = (\Delta f)(r.\cos\theta, r.\sin\theta).$$

1. Ω 'Omega', le grand O (fermé) grec
2. C'est une notion fondamentale en physique des phénomènes de diffusion (lois de FICK, FOURIER) ainsi qu'en mécanique des fluides, en électromagnétisme, en mécanique quantique..

Problème III

Dans tout ce problème, pour a et b deux entiers naturels tels que $a \leq b$, on notera $\{a,\ldots,b\}$ l'ensemble de tous les entiers naturels n tels que $a \leq n \leq b$. Par exemple, $\{0,\ldots,3\}$ désigne l'ensemble $\{0,1,2,3\}$. Pour une variable aléatoire réelle X, on notera $\mathbb{E}(X)$ son espérance lorsqu'elle en possède une. Pour deux événements A et B d'un même espace probabilisé, on notera $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A|B)$ respectivement la probabilité de A et la probabilité conditionnelle de A sachant B (si $\mathbb{P}(B) \neq 0$). Le but de ce problème est de définir et d'utiliser dans des cas simples la notion d'espérance conditionnelle, dont la définition dans le cas de variables discrètes est donnée ci dessous et servira dans les parties A, B et C.

Les parties A, B, C sont indépendantes.

Pour n et p deux entiers naturels non nuls, soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs respectivement dans $\{0,\ldots,n\}$ et $\{0,\ldots,p\}$. On suppose que, pour tout $i \in \{0,\ldots,p\}$, $\mathbb{P}(Y=i) \neq 0$. On appelle espérance conditionnelle de X sachant $Y=i$ la quantité

$$\mathbb{E}(X|Y=i) = \sum_{k=0}^{n} k.\mathbb{P}(X=k|Y=i).$$

1. Question préliminaire

Avec les notations de la définition ci-dessus, montrer à l'aide de la formule des probabilités totales, la relation suivante

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{p} \mathbb{E}(X|Y=i)\mathbb{P}(Y=i). \qquad (+)$$

Cette relation, connue sous le nom de formule de l'espérance totale, sera utilisée dans les parties A, B et C de ce problème. Nous y ferons référence sous le nom (+).

Partie A

Etude d'un premier exemple

A.1. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $\{0,\ldots,3\}$. On note M la variable aléatoire dont la valeur est égale au maximum de la valeur de U et de la valeur de V , soit $M = \max(U,V)$.

A.1.a. Donner la loi conjointe du couple (U,V).

A.1.b. Représenter dans un tableau la loi conjointe du couple (U,M). En déduire la loi marginale et l'espérance de M.

A.2. Le but de cette question est de généraliser le résultat de la question A.1. Soit n un entier naturel non nul. U et V désignent désormais deux variables aléatoires réelles discrètes, indépendantes, de même loi uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$. On note alors $M = \max(U,V)$ la variable aléatoire égale à la valeur maximale prise par U et V .

A.2.a. Calculer la valeur de $\sum_{k=i+1}^{n} k$, pour un entier naturel $i < n$.

A.2.b. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A.2.c. Montrer que $\mathbb{E}(M|U=n) = n$.

A.2.d. On considère i un entier naturel tel que $i < n$.

A.2.d.i. Montrer que

$$\mathbb{E}(M|U=i) = i\mathbb{P}(M=i|U=i) + \sum_{k=i+1}^{n} k.\mathbb{P}(M=k|U=i).$$

A.2.d.ii. Montrer que pour $k \in \{i+1,\ldots,n\}$,

$$\mathbb{P}(M=k|U=i) = \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=i+1}^{n} k.\mathbb{P}(M=k|U=i)$$

en fonction de i et n.
A.2.d.iii. Que vaut $\mathbb{P}(M=i|U=i)$?
A.2.e. Calculer $\mathbb{E}(M)$ en fonction de n à l'aide de la relation (+). Ce résultat est-il cohérent avec celui obtenu dans la question A.1 ?

Partie B

Etude d'un second exemple

Etant donné b un entier naturel non nul, on considère une urne contenant b boules blanches. Les autres boules, au nombre de c, sont noires. L'urne contient ainsi $N=b+c$ boules. On tire les boules une à une et sans remise. On s'intéresse au nombre Y_N de boules noires tirées avant d'obtenir la première blanche (l'indice N marque la dépendance de Y par rapport au nombre total de boules dans l'urne avant le premier tirage). On pose $u_N=\mathbb{E}(Y_N)$ et on raisonne par récurrence sur N pour une valeur de b fixée. X_1 désigne la variable de BERNOULLI égale à 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon.
B.1. Quelles sont les valeurs possibles de Y_N ?
B.2. Que vaut $\mathbb{E}(Y_N|X_1=1)$?
B.3. Justifier, pour $i\in\{1,\dots,c\}$, l'égalité $\mathbb{P}(Y_N=i|X_1=0)=\mathbb{P}(Y_{N-1}=i-1)$.
B.4. En déduire que $\mathbb{E}(Y_N|X_1=0)=1+u_{N-1}$.
B.5. Déduire de la relation (+) que pour $N>b$, on a $u_N=(1+u_{N-1})\frac{N-b}{N}$.
B.6. Que vaut u_b ? Déterminer u_{b+1}, u_{b+2} à l'aide de la question précédente.
B.7. Donner $\mathbb{E}(Y_{b+k})$ pour tout k entier naturel.

Partie C

Etude d'un troisième exemple

On s'intéresse maintenant au problème suivant. Pour un examen, une liste de N questions a été fournie aux étudiants pour leurs révisions. Le jour de l'examen, n questions de la liste, choisies aléatoirement, sont posées sous forme de questionnaire à choix multiple (QCM), avec quatre réponses possibles à chaque fois dont une seule est juste. Chaque réponse juste rapporte un point, les réponses fausses rapportent zéro point. Les questions sont indépendantes entre elles.

On s'intéresse ici à un étudiant donné, qui a révisé et connaît la réponse à b questions de la liste. Le jour de l'examen, il se retrouve donc face à n questions, chacune de l'un ou l'autre des deux types suivants :

i) celles qui sont parmi les b qu'il a révisées et dont il connaît la réponse ; on note C la variable aléatoire égale au nombre de ces questions ;
ii) celles qu'il n'a pas révisées, auxquelles il donne une réponse au hasard parmi les quatre fournies (« au hasard » signifiant ici qu'il possède une chance sur quatre de donner la bonne réponse) ; on note D le nombre de ces questions auxquelles l'étudiant répond correctement.

On supposera dans la suite que $1\le n\le b$ et $n\le N-b$. On note Y le nombre total de points obtenus par l'étudiant à son examen. Le but est le calcul de l'espérance de Y.
C.1. Quelle est la loi suivie par C ? En déduire que

$$\mathbb{E}(C)=\frac{nb}{N}.$$

C.2. Soit $k\in\{0,\dots,n\}$. Déterminer la loi conditionnelle de D sachant $[C=k]$. En déduire $\mathbb{E}(D|C=k)$.
C.3. Calculer $\mathbb{E}(D)$ à l'aide de la relation (+), puis $\mathbb{E}(Y)$.

Correction DM 02

Correction Ex.–1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, à valeurs réelles.

On dit que f est positivement homogène de degré α (où α est un réel fixé) si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\, \forall t \in]0,+\infty[,\, f(t.x,t.y) = t^\alpha.f(x,y).$$

1. Des exemples.

1.a. Une fonction linéaire f de deux variables réelles, à valeurs réelles s'écrit, pour un certain couple (a,b) de nombres réels :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, f(x,y) = ax+by$$

On a donc, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, pour $t \in]0,+\infty[$,

$$f(t.x,t.y) = a(t.x)+b(t.y) = t.(ax+by) = t^1.f(x,y)$$

Du fait que (x,y) et t sont quelconques, on en déduit que f est positivement homogène de degré 1.

1.b. Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, f(x,y) = a.x^2+2b.x.y+c.y^2.$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, pour $t \in]0,+\infty[$,

$$f(t.x,t.y) = a(t.x)^2+2b.(t.x).(t.y)+c(t.y)^2 = t^2.(ax^2+2bxy+cy^2) = t^2.f(x,y)$$

Du fait que (x,y) et t sont quelconques, on en déduit que f est positivement homogène de degré $\alpha = 2$.

1.c. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\, f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Cette fonction est bien définie car si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $x^2+y^2 > 0$. Elle vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\, \forall t \in]0,+\infty[,\, f(t.x,t.y) = \frac{1}{(t.x)^2+(t.y)^2} = \frac{1}{t^2\,(x^2+y^2)} = t^{-2}.f(x,y).$$

La fonction f est positivement homogène de degré -2.

1.d. Soit f et g deux fonctions positivement homogènes de degrés respectifs α et β et $h = f.g$.

On a

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\, \forall t \in]0,+\infty[,\, h(t.x,t.y) &= f(t.x,t.y).g(t.x,t.y)\\ &= t^\alpha.f(x,y).t^\beta.g(x,y) = t^{\alpha+\beta}f(x,y).g(x,y) = t^{\alpha+\beta}h(x,y).\end{aligned}$$

Cela montre que h est positivement homogène de degré $\gamma = \alpha+\beta$.

1.e. Soit f une fonction positivement homogène de degré α et β un nombre réel. Soit $h = |f|^\beta$.

On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\, \forall t \in]0,+\infty[,\, h(t.x,t.y) = |f(t.x,t.y)|^\beta = |t^\alpha.f(x,y)|^\beta = t^{\alpha.\beta}|f(x,y)|^\beta = t^{\alpha.\beta}h(x,y).$$

Cela montre que h est positivement homogène de degré $\gamma = \alpha.\beta$.

Noter que le fait que $t > 0$ est utilisé pour affirmer que $|t| = t$.

2. On suppose que f est une fonction positivement homogène de degré α, continue sur tout pavé ouvert de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *à valeurs strictement positives* sur cet ensemble.

2.a. Soit la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$$

Comme cos et sin sont continues sur tout $\mathbb{R}$, que $\gamma = (\cos, \sin)$ est continue, 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (car $\cos^2 + \sin^2 = 1$) et que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la composée $F = f \circ \gamma$ est continue, 2π-périodique.

La 2π-périodicité de la composée, qui est un élément de cours, mérite peut-être un rappel : Si $\theta \in \mathbb{R}$,

$$F(\theta + 2\pi) = f(\cos(\theta + 2\pi), \sin(\theta + 2\pi)) = f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = F(\theta).$$

2.b. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$, on a alors $r > 0$ et, si $(x,y) = (r.\cos\theta, r.\sin\theta)$ alors

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & f(r.\cos\theta, r.\sin\theta) \\ \textbf{[}f\textbf{ homogène de degré }\alpha\textbf{]} & = & r^\alpha.f(\cos\theta, \sin\theta) \\ & = & r^\alpha.F(\theta) \end{array}$$

2.c. La fonction F est continue, 2π-périodique. Par le théorème des bornes atteintes, applicable car F est à valeurs réelles, continue sur le segment $[0, 2\pi]$, il existe $\theta_-, \theta_+ \in [0, 2\pi]$ tels que

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], F(\theta_-) \le F(\theta) \le F(\theta_+)$$

On peut poser $C_- = F(\theta_-)$,$C_+ = F(\theta_+)$ (ce sont deux nombres strictement positifs car F est à valeurs dans $]0,+\infty[$) et, on a par 2π-périodicité :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, C_- \le F(\theta) \le C_+.$$

En reprenant l'identité de la question précédente, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}, (x,y) = (r.\cos\theta, r.\sin\theta) \Rightarrow C_-.r^\alpha \le f(x,y) \le C_+.r^\alpha.$$

2.d. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = a.x^2 + 2b.x.y + c.y^2.$$

On suppose que $a > 0$ et $b^2 - ac < 0$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale) positivement homogène de degré 2 alors il reste à montrer que f est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour conclure que f est dans les conditions de cette question 2.

Utilisons l'astuce de la mise sous forme canonique en considérant à y fixé, $f(x,y)$ comme un trinôme en x. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & a.x^2 + 2b.x.y + c.y^2 \\ & = & a.\left((x + \frac{b}{a}.y)^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}).y^2 \right) \\ & = & a.\left((x + \frac{b}{a}.y)^2 + \frac{(-b^2 + ac)}{a^2}.y^2 \right) \end{array}$$

Comme a est strictement positif, qu'il est en facteur d'une somme de termes positifs (car le « discriminant » $b^2 - ac$ est < 0), on en déduit que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \ge 0$$

et que $f(x,y) = 0$ ssi $x + \frac{b}{a}.y = 0$ et $y^2 = 0$, ce qui équivaut à $(x,y) = (0,0)$. On a donc bien

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}\}, f(x,y) > 0$$

On en conclut qu'il existe deux constantes $C_-, C_+ > 0$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}\}, C_-.(x^2 + y^2) \le f(x,y) \le C_+.(x^2 + y^2)$$

(Notons que $(x,y) = (r.\cos\theta, r.\sin\theta) \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2$.)

3. On suppose que f est une fonction positivement homogène de degré α, $\mathscr{C}^1$ sur (tout pavé ouvert de) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $(x_0,y_0)\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donné et définisssons la fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t > 0,\, g(t) = f(t.x_0,t.y_0)$$

D'une part, par homogénéité (positivement, de degré α) de f

$$\forall t > 0,\, g(t) = f(t.x_0,t.y_0) = t^{\alpha}.f(x_0,y_0)$$

et donc, en dérivant cette fonction puissance, on obtient :

$$\forall t > 0,\, g'(t) = \alpha.t^{\alpha-1}.f(x_0,y_0).$$

D'autre part, par la formule de la dérivée d'une composée d'une fonction de 2 variables réelles par un arc paramétré (en l'occurence $t \mapsto (t.x_0,t.y_0)$) :

$$\forall t > 0,\, g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t.x_0,t.y_0).x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(t.x_0,t.y_0).y_0.$$

et donc, en identiifant ces deux formules, on obtient :

$$\forall t > 0,\, \alpha.t^{\alpha-1}.f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(t.x_0,t.y_0).x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(t.x_0,t.y_0).y_0.$$

En évaluant la formule obtenue en $t = 1$, on obtient

$$\alpha.f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).y_0$$

et, du fait du caractère quelconque de (x_0,y_0), que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\, \alpha.f(x,y) = x.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \tag{Euler}$$

4. Réciproquement, on suppose que f est une fonction réelle, $\mathscr{C}^1$ sur tout pavé ouvert de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vérifiant la relation (Euler).

Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ fixé, on a alors, en appliquant la relation (Euler) en $(x,y) = (t.x_0,t.y_0)$ que

$$\forall t > 0,\, \alpha.f(t.x_0,t.y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(t.x_0,t.y_0).t.x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(t.x_0,t.y_0).t.y_0 = t.\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t.x_0,t.y_0).x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(t.x_0,t.y_0).y_0\right).$$

En posant, $g : t \mapsto f(t.x_0,t.y_0)$, on a donc (*cf.* calcul précédent) :

$$\forall t > 0,\, \alpha.g(t) = t.g'(t)$$

et donc g est solution d'une équation différentielle linéaire homogène que l'on résout assez facilement en :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall t > 0,\, g(t) = C.t^{\alpha}.$$

Il reste à déterminer cette constante en évaluant l'identité précédente en $t = 1$, ce qui donne

$$f(x_0,y_0) = g(1) = C$$

et finalement

$$\forall t > 0,\, g(t) = f(x_0,y_0).t^{\alpha}$$

i.e.

$$\forall t > 0,\, f(t.x_0,t.y_0) = t^{\alpha}.f(x_0,y_0).$$

Comme (x_0,y_0) est quelconque, on en déduit que f est positivement homogène de degré α.

5. (Question ouverte) A vous de savoir ! !

Correction Ex.–2

— Posons[3] $\Omega = \mathbb{R}^2$. Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (du couple (x,y)), de classe $\mathscr{C}^2$, on définit la fonction Δf, le « Laplacien[4] de f » par la formule :

$$\forall (x,y) \in \Omega,\, (\Delta f)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

— Posons $\mathrm{A} =]0,+\infty[\times \mathbb{R}$. Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, effectuer le changement de variable en coordonnées polaires c'est considérer la fonction $g : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (r,\theta) \in \mathrm{A},\, g(r,\theta) = f(r.\cos\theta, r.\sin\theta).$$

Le but de l'exercice est de déterminer une formule pour le Laplacien Δf en termes de la fonction g et de ses dérivées partielles. On se donne donc f de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, on définit g sur A par la formule proposée.

1. On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ et on considère $h : r \mapsto g(r,\theta) = f(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$.

La fonction h est donc composée de la fonction f par l'arc paramétré $\gamma : r \mapsto (r.\cos\theta, r.\sin\theta)$ défini, de classe $\mathscr{C}^1$ (les deux composantes $r \mapsto r.\cos\theta$ et $r \mapsto r.\sin\theta$ sont des fonctions linéaires) sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (la trajectoire est une demi-droite de type Oz, ouverte en $O = (0,0)$). Comme f est supposée $\mathscr{C}^2$ (et donc $\mathscr{C}^1$) sur $\mathbb{R}^2$, la composée h est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec :

$$\forall r > 0,\, h'(r) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \underbrace{\cos\theta}_{\frac{d}{dr}(r.\cos\theta)} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \underbrace{\sin\theta}_{\frac{d}{dr}(r.\sin\theta)} .$$

Pour calculer $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$, on fixe θ et on dérive la fonction d'une variable réelle $r \mapsto g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Cette fonction, c'est h et sa dérivée $h' = \frac{\partial g}{\partial r}(.,\theta)$ vient d'être calculée. On a donc :

$$\forall (r,\theta) \in A,\, \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta.\frac{\partial f}{\partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + \sin\theta.\frac{\partial f}{\partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$$

2. On montre en raisonnant de même, que pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, $r \mapsto \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, en considérant les deux fonctions $h_1 : r \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$ et $h_2 : r \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$ dont les dérivées sont les fonctions vérifiant $\forall r > 0$,

$$\begin{aligned} h_1'(r) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta).\cos\theta + \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta).\sin\theta \\ h_2'(r) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).\cos\theta + \frac{\partial f^2}{\partial y \partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).\sin\theta \end{aligned}$$

On a donc, pour cette valeur de θ :

$$\forall r > 0,\, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos\theta.h_1'(r) + \sin\theta.h_2'(r)$$

et finalement, par substitution :

$$\begin{aligned} \forall (r,\theta) \in A,\, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) &= \cos^2\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + \cos\theta.\sin\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + \\ & \sin\theta.\cos\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + \sin^2\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) \end{aligned}$$

3. Ω 'Omega', le grand O (fermé) grec

4. C'est une notion fondamentale en physique des phénomènes de diffusion (lois de FICK, FOURIER) ainsi qu'en mécanique des fluides, en électromagnétisme, en mécanique quantique..

3. Soit $r \in]0,+\infty[$ fixé, la fonction $k : \theta \mapsto g(r,\theta) = f(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composition de la fonction f à droite par l'arc $\theta \mapsto (r.\cos\theta, r.\sin\theta)$ dont les deux composantes sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}$ et, par la formule de dérvation de telles fonctions :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\, k'(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\underbrace{(-r.\sin\theta)}_{\frac{d}{d\theta}(r.\cos\theta)} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\underbrace{(r.\cos\theta)}_{\frac{d}{d\theta}(r.\sin\theta)}.$$

Comme $\forall \theta \in \mathbb{R}, k'(\theta) = \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$, on a donc

$$\forall (r,\theta) \in A,\, \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta.\frac{\partial f}{\partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + r.\cos\theta.\frac{\partial f}{\partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$$

4. Pour $r \in]0,+\infty[$ fixé, on peut définir les fonctions k_1 et k_2 sur tout $\mathbb{R}$ par les formules : $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} k_1(\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) \\ k_2(\theta) &= \frac{\partial f}{\partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) \end{aligned}$$

De sorte que, comme précédemment, k_1 et k_2 sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} k_1'(\theta) &= -r\sin\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + r.\cos\theta.\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) \\ k_2'(\theta) &= -r\sin\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + r.\cos\theta.\frac{\partial f}{\partial y \partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) \end{aligned}$$

Comme

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\, \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta.k_1(\theta) + r.\cos\theta.k_2(\theta),$$

par dérivée de somme et produit, il vient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\, \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -r\cos\theta.k_1(\theta) - r.\sin\theta.k_2(\theta) - r\sin\theta.k_1'(\theta) + r.\cos\theta.k_2'(\theta),$$

et finalement, par substitution

$$\begin{aligned} \forall (r,\theta) \in A,\, \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= -r\cos\theta.\frac{\partial f}{\partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) - r.\sin\theta.\frac{\partial f}{\partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) \\ &\quad + r^2\sin^2\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) - r^2\sin\theta.\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) \\ &\quad - r^2.\cos\theta.\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) + r^2.\cos^2\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r.\cos\theta, r.\sin\theta) \end{aligned}$$

5. On admet que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur A. Si on prend $\alpha(r) = \frac{1}{r}, \beta(r) = \frac{1}{r^2}$, on voit que dans la combinaison proposée, les dérivées partielles secondes croisées provenant de $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ se compensent (somme nulle) et qu'il en est de même pour les dérivées premières simples provenant de $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$. En facteur de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et de $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, on trouve $\cos\theta^2 + \sin\theta^2 = 1$. Finalement, on a :

$$\forall (r,\theta) \in A,\, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}.\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = (\Delta f)(r.\cos\theta, r.\sin\theta).$$

NB : remarquer, si x, y ont pour unité une longueur, r aussi et l'expression trouvée respecte les homogénéités (il ne manquerait plus que le contraire !)

Correction Ex.–3

1. Question préliminaire

Avec les notations de la définition ci-dessus, montrer à l'aide de la formule des probabilités totales, On a, avec la définition donnée,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p} \mathbb{E}(X|Y=i)\mathbb{P}(Y=i) &= \sum_{i=0}^{p}\left(\sum_{k=0}^{n} k.\mathbb{P}(X=k|Y=i)\right)\mathbb{P}(Y=i) \\
\text{(interversion de sommes finies)} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{p} k.\mathbb{P}(X=k|Y=i)\mathbb{P}(Y=i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k.\left(\sum_{i=0}^{p} \mathbb{P}(X=k|Y=i)\mathbb{P}(Y=i)\right) \\
\text{(probas totales)} &= \sum_{k=0}^{n} k.\mathbb{P}(X=k) \\
\text{(def } \mathbb{E}\text{)} &= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{p} \mathbb{E}(X|Y=i)\mathbb{P}(Y=i). \qquad (+)$$

Partie A

Etude d'un premier exemple

A.1. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $\{0,\ldots,3\}$. On note M la variable aléatoire dont la valeur est égale au maximum de la valeur de U et de la valeur de V , soit $M = \max(U,V)$.

A.1.a. On a, pour $k,\ell \in \{0,\ldots,3\}$, par indépendance, puis définition de la loi uniforme.

$$\mathbb{P}((U,V) = (k,\ell)) = \mathbb{P}(U = k \text{ et } V = \ell) = \mathbb{P}(U = k)\mathbb{P}(V = \ell) = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

A.1.b. M est à valeurs dans $\{0,\ldots,3\}$. Par ailleurs, $M \geq U$. Pour $k,m \in \{0,\ldots,3\}$, $\mathbb{P}(U = k, M = m) = 0$ si $m < k$.

Si $m \geq k$, on a

1. Si $m > k$, $\{U = k, M = m\} = \{U = k, V = m\}$ et donc
$$\mathbb{P}(U = k, M = m) = \mathbb{P}(U = k, V = m) = \frac{1}{16}$$
2. Si $m = k$, $\{U = m, M = m\} = \{U = m, V \leq m\}$ et donc
$$\mathbb{P}(U = k, M = m) = \frac{1}{4}.\frac{m+1}{4}$$

On a donc le tableau suivant

$m \backslash k$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{16}$	0	0	0
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	0
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$

On a donc, en calculant la marginale [5] pour M,

$\mathbb{P}(M=0)$	$\frac{1}{16}$
$\mathbb{P}(M=1)$	$\frac{3}{16}$
$\mathbb{P}(M=2)$	$\frac{5}{16}$
$\mathbb{P}(M=3)$	$\frac{7}{16}$

et l'espérance de M est

$$\mathbb{E}(M) = \frac{3}{16} + 2.\frac{5}{16} + 3.\frac{7}{16} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$$

A.2. Le but de cette question est de généraliser le résultat de la question A.1. Soit n un entier naturel non nul. U et V désignent désormais deux variables aléatoires réelles discrètes, indépendantes, de même loi uniforme sur $\{0,\dots,n\}$. On note alors $M = \max(U,V)$ la variable aléatoire égale à la valeur maximale prise par U et V .

A.2.a. Soit $i < n$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i+1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{i} k \\
&= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(n-i)(n+i+1)}{2}
\end{aligned}$$

A.2.b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n : \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. P_0 est vraie, elle se réduit à $0 = 0$.
2. Supposons P_n vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
(\text{par } P_n) \quad &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) = \frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right) = \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)
\end{aligned}$$

   Ce qui est P_{n+1}.
3. Par récurrence, on a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n.$$

A.2.c. On a, pour $k < n$, $\mathbb{P}(M = k|U = n) = 0$ car $\mathbb{P}(M = k, U = n) = 0$, $\mathbb{P}(M = n|U = n) = 1$ et donc

$$\mathbb{E}(M|U = n) = \sum_{k=0}^{n} k.\mathbb{P}(M = k|U = n) = n.\mathbb{P}(M = n|U = n) = n$$

A.2.d. On considère i un entier naturel tel que $i < n$.

5. Pour chaque ligne du tableau précédent, on fait la somme des termes

A.2.d.i. On a, par la définition de l'espérance conditionnelle que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M|U=i) &= \sum_{k=0}^{n} k.\mathbb{P}(M=k|U=i) \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} k.\mathbb{P}(M=k|U=i) + i\mathbb{P}(M=i|U=i) + \sum_{k=i+1}^{n} k.\mathbb{P}(M=k|U=i)\end{aligned}$$

Comme on a $U \leq M$, si $k < i$, $\mathbb{P}(M=k|U=i) = 0$ et donc

$$\mathbb{E}(M|U=i) = i\mathbb{P}(M=i|U=i) + \sum_{k=i+1}^{n} k.\mathbb{P}(M=k|U=i)$$

A.2.d.ii. Soit $k \in \{i+1,\dots,n\}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M=k|U=i) &= \frac{\mathbb{P}(M=k \text{ et } U=i)}{\mathbb{P}(U=i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\max(U,V)=k \text{ et } U=i)}{\mathbb{P}(U=i)} = \frac{\mathbb{P}(V=k \text{ et } U=i)}{\mathbb{P}(U=i)} \\ \text{(indep. de } U \text{ et } V &= \mathbb{P}(V=k) \\ (V \text{ uniforme}) &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

et donc, par A.2.a,

$$\sum_{k=i+1} k.\mathbb{P}(M=k|U=i) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right)$$

A.2.d.iii.

$$\mathbb{P}(M=i|U=i) = \frac{\mathbb{P}(\max(U,V)=i \text{ et } U=i)}{\mathbb{P}(U=i)}$$

En décomposant suivant le système complet d'événements $(V=\ell), \ell \in \{0,\dots,n\}$, on a, comme $\mathbb{P}(\max(U,V) = i \text{ et } U=i \text{ et } V=\ell) = 0$ si $\ell > i$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max(U,V)=i \text{ et } U=i) &= \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}(\max(U,V)=i \text{ et } U=i \text{ et } V=\ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{i} \mathbb{P}(U=i \text{ et } V=\ell) \\ \text{(loi de } (U,V) &= \frac{i+1}{(n+1)^2} \\ \mathbb{P}(M=i|U=i) &= \frac{i+1}{(n+1)}\end{aligned}$$

A.2.e. En regroupant les résultats des trois questions précédentes, on obtient que pour $i < n$,

$$\mathbb{E}(M|U=i) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right) + i.\frac{i+1}{(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}\left(n(n+1)+i(i+1)\right)$$

Cette relation est aussi vraie pour $i = n$ comme on a pu le voir en A.2.c Comme par la relation (+),

$$\mathbb{E}(M) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}(M|U=i)\mathbb{P}(U=i)$$

en remplaçant (on a $\mathbb{P}(U=i)=\frac{1}{n+1}$), on obtient

$$\mathbb{E}(M)=\frac{1}{2(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n}(n(n+1)+i(i+1))$$

Menons ce calcul au bout. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M) &= \frac{1}{2(n+1)^2}n.(n+1)^2+\frac{1}{2(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n}i^2+\frac{1}{2(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n}i \\
&= \frac{n}{2}+\frac{n(2n+1)}{12(n+1)}+\frac{n}{4(n+1)} \\
&= \frac{6.n.(n+1)+n(2n+1)+3n}{12(n+1)}=\frac{n.(8n+10)}{12.(n+1)}==\frac{n.(4n+5)}{6.(n+1)}
\end{aligned}$$

Dans le cas $n=3$, cela donne $\mathbb{E}(M)=\frac{3\times 34}{12\times 4}=\frac{17}{8}$, ce qui est bien le résultat trouvé en A.1.

Partie B
Etude d'un second exemple

Etant donné b un entier naturel non nul, on considère une urne contenant b boules blanches. Les autres boules, au nombre de c, sont noires. L'urne contient ainsi $N=b+c$ boules. On tire les boules une à une et sans remise. On s'intéresse au nombre Y_N de boules noires tirées avant d'obtenir la première blanche (l'indice N marque la dépendance de Y par rapport au nombre total de boules dans l'urne avant le premier tirage). On pose $u_N=\mathbb{E}(Y_N)$ et on raisonne par récurrence sur N pour une valeur de b fixée. X_1 désigne la variable de BERNOULLI égale à 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon.

B.1. Y_N prend ses valeurs entre 0 (on tire une blanche dès le premier tour) et c (on tire toutes les noires d'abord, et quand elles sont toutes tirées, on est bien forcés de tirer une blanche)

B.2. On a $\mathbb{E}(Y_N|X_1=1)=\sum_{k=0}^{c}k.\mathbb{P}(Y_N=k|X_1=1)$. Comme il a été dit précédemment, sachant $X_1=1$, on a $Y_N=0$ et donc $\mathbb{P}(Y_N=0|X_1=1)=1$, $\mathbb{P}(Y_N=k|X_1=1)=0$ pour $k>0$. Finalement $\mathbb{E}(Y_N|X_1=1)=0$.

B.3. On suppose $c\geq 1$. Soit $i\in\{1,\ldots,c\}$, sachant que $X_1=0$ (et donc qu'on tire une noire au premier tour), le nombre de boules noires tirées avant l'obtention d'une blanche est 1 de plus que le nombre de boules noires tirées avant l'obtention d'une blanche dans une expérience comportant $c-1$ boules noires et b boules blanches, d'où l'égalité $\mathbb{P}(Y_N=i|X_1=0)=\mathbb{P}(Y_{N-1}=i-1)$.

B.4. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_N|X_1=0) &= \sum_{i=0}^{c}i.\mathbb{P}(Y_N=i|X_1=0) \\
&= \sum_{i=1}^{c}i.\mathbb{P}(Y_N=i|X_1=0) \\
\text{(question précédente)} &= \sum_{i=1}^{c}i.\mathbb{P}(Y_{N-1}=i-1) \\
&= \sum_{i=0}^{c-1}(i+1).\mathbb{P}(Y_{N-1}=i) \\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{c-1}i.\mathbb{P}(Y_{N-1}=i)}_{=u_{N-1}}+\underbrace{\sum_{i=0}^{c-1}i.\mathbb{P}(Y_{N-1}=i)}_{=1} \\
&= 1+u_{N-1}
\end{aligned}$$

B.5. Pourvu que $c \geq 1$, *i.e.* $N > b$, par la relation (+), en conditionnant sur les deux valeurs de X_1,

$$\begin{aligned} u_N &= \mathbb{E}(Y_N) = \underbrace{\mathbb{E}(Y_N|X_1=0)}_{1+u_{N-1}}\underbrace{\mathbb{P}(X_1=0)}_{\frac{N-b}{N}}+\underbrace{\mathbb{E}(Y_N|X_1=1)}_{=0}\mathbb{P}(X_1=1) \\ &= (1+u_{N-1})\frac{N-b}{N} \end{aligned}$$

B.6. Si $c=0$, le nombre de boules noires tirées avant obtention de la première blanche est $Y_b = 0$. On a donc $u_b = 0$.

En appliquant la relation de récurrence, on a

$$u_{b+1} = \frac{N-b}{N} = \frac{1}{b+1} \text{ et } u_{b+2} = (1+\frac{N-b}{N})\frac{N-b}{N} = \frac{b+2}{b+1}\frac{2}{b+2} = \frac{2}{b+1}$$

B.7. Posons, pour $k \geq 0$, $v_k = \mathbb{E}(Y_{b+k}) = u_{N+k}$. En réécrivant les relations sur u, on a

$$v_0 = 0 \text{ et } \forall k \geq 0, v_{k+1} = (1+v_k)\frac{b+k+1-b}{b+k+1} = (1+v_k)\frac{k+1}{b+k+1}$$

On a

$$v_1 = \frac{1}{b+1}, v_2 = \frac{b+2}{b+1}\frac{2}{b+2} = \frac{2}{b+1},$$
$$v_3 = \frac{b+3}{b+1}\frac{3}{b+3} = \frac{3}{b+1}$$

A partir de là, il est bien tentant de conjecturer que $v_k = \frac{k}{b+1}$. On a, en supposant ceci au rang k, que

$$v_{k+1} = \frac{b+1+k}{b+1}\frac{k+1}{b+k+1} = \frac{k+1}{b+1}$$

ce qui est la formule au rang $k+1$: Bingo la conjecture ! !

En conclusion, par récurrence, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Y_{b+k}) = v_k = \frac{k}{b+1}$$

Partie C

Etude d'un troisième exemple

On s'intéresse maintenant au problème suivant. Pour un examen, une liste de N questions a été fournie aux étudiants pour leurs révisions. Le jour de l'examen, n questions de la liste, choisies aléatoirement, sont posées sous forme de questionnaire à choix multiple (QCM), avec quatre réponses possibles à chaque fois dont une seule est juste. Chaque réponse juste rapporte un point, les réponses fausses rapportent zéro point. Les questions sont indépendantes entre elles.

On s'intéresse ici à un étudiant donné, qui a révisé et connaît la réponse à b questions de la liste. Le jour de l'examen, il se retrouve donc face à n questions, chacune de l'un ou l'autre des deux types suivants :

i) celles qui sont parmi les b qu'il a révisées et dont il connaît la réponse ; on note C la variable aléatoire égale au nombre de ces questions ;
ii) celles qu'il n'a pas révisées, auxquelles il donne une réponse au hasard parmi les quatre fournies (« au hasard » signifiant ici qu'il possède une chance sur quatre de donner la bonne réponse) ; on note D le nombre de ces questions auxquelles l'étudiant répond correctement.

On supposera dans la suite que $1 \leq n \leq b$ et $n \leq N-b$. On note Y le nombre total de points obtenus par l'étudiant à son examen. Le but est le calcul de l'espérance de Y.

C.1. C est le nombre de questions révisées parmi n questions tirées, **sans remise** dans un réservoir de N questions. La proportion de questions révisées de ce réservoir est $\frac{b}{N}$. C suit donc une loi hypergéométrique. Les hypothèses faites sur n, N et b garantissent que C est à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$. Son espérance est

$$\mathbb{E}(C) = \underbrace{n}_{\text{nbre tirages}} \times \underbrace{\frac{b}{N}}_{\text{prop. de succès}}$$

C.2. Soit $k \in \{0,\dots,n\}$. Sachant $C = k$, il y a donc $n-k$ questions non révisées, avec proba. de bien y répondre $\frac{1}{4}$. Le nombre de bonnes réponses pour ces questions non révisées suit donc d'une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n-k, \frac{1}{4}\right)$. On a donc

$$\mathbb{E}(D|C=k) = \frac{n-k}{4}$$

C.3. Par la relation (+), en conditionnant sur les valeurs de C, on a

$$\mathbb{E}(D) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(D|C=k)\mathbb{P}(C=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{4}\mathbb{P}(C=k)$$

Il s'agit de calculer plus avant cette quantité. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{4}\mathbb{P}(C=k) &= \frac{n}{4}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(C=k) - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} k.\mathbb{P}(C=k)\\ &= \frac{n}{4} - \frac{1}{4}\mathbb{E}(C)\end{aligned}$$

On a $Y = D + C$ et donc

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(D) + \mathbb{E}(C) = \frac{n}{4} + \frac{3}{4}\mathbb{E}(C) = n.(\frac{1}{4} + \frac{3b}{4N})$$

Pour que, en moyenne, il ait la barre de passage à 10/20, *i.e.* $\mathbb{E}(Y) \geq \frac{n}{2}$, il faut donc réviser $b \geq \frac{N}{3}$ questions. Une question intéressante, nécessitant un calcul de variance un peu plus chaud, serait : quel nombre de questions réviser pour que, à 75% de chances, il ait plus que la moyenne ? Par BIENAYMÉ–TCHEBYCHEFF, il s'agit de trouver b pour que

$$\mathbb{E}(Y) - 2\sqrt{\mathbb{V}(Y)} \geq \frac{n}{2}$$