Devoir 03

Probabilités « finies », Intégrales généralisées
Jeudi 19/10/2023

Exercice I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 .

Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches.On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

On note X (ou X_n en dernière partie où on veut marquer la dépendance en n) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1.a. Donner un ensemble–limité par des arguments de bon sens à exposer– contenant toutes les valeurs prises par X. On le notera $X(\Omega)$.

1.b. Pour i un entier entre 1 et n, on note T_i la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée au tirage numéro i est blanche et 0 sinon.

1. Ecrire à l'aide de T_i les évenements B_i : «le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche » et N_i : «le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire »
2. Pour un $k \in X(\Omega)$, écrire à l'aide des T_i (ou des B_i, N_i) l'évenement $\{X = k\}$.

2.a. Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier : $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$.

2.b. Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

2.c. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. Ecrire un script Python complet à propos de ce problème : Ce script doit comporter

1. Une fonction `UnTirage(U)` qui étant donnée une urne encodée par `U` retourne la couleur de la boule tirée et modifie `U` en place en lui retirant la boule tirée.
2. Une fonction `X(n)` qui étant donné un entier `n` retourne une valeur tirée au hasard de X_n suivant le règles annoncées.
3. Une fonction `EsperanceX(n,NS=10000)` qui retourne la moyenne de `NS` tirages de `X(n)`

Ce script doit se conclure par un graphique (à imprimer et coller dans la copie) comportant :

— en abscisses, n, une gamme de valeurs de n, disons de 3 à 30;
— en ordonnées x, la gamme de valeurs des v.a. X_n
— et les graphes $x = \mathbb{E}(X_n)$ (valeur théorique de la question 2.c), $x =$ `EsperanceX(n,NS=100)`, $x =$ `EsperanceX(n,NS=10000)` pour comparaison.

Exercice II

Conditionnement sur les valeurs d'une v.a.

Soit n un entier naturel (non nul, sinon, tout est trivial) et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0,\ldots,n\}$, indépendantes.

1.a. Démontrer : $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y \geqslant k)$.

1.b. On suppose que X est uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$. Démontrer : $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \frac{1}{n+1}\left(1+\mathbb{E}(Y)\right)$.

On pourra écrire $\mathbb{P}(Y \geqslant k) - \mathbb{P}(Y \geqslant k+1) = \mathbb{P}(Y=k)$ pour montrer que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y \geqslant k+1) = \sum_{k=0} k.\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{E}(Y)$.

2. On suppose que X et Y ont même loi.

2.a. Démontrer : $\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} (\mathbb{P}(X=k))^2$.

2.b. Démontrer : $\mathbb{P}(X<Y) = \mathbb{P}(X>Y)$ et que finalement

$$\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} (\mathbb{P}(X=k))^2$$

Exercice III

Une entreprise de construction produit des objets sur lignes de montage A et B.

On suppose que A produit 60% de la production totale et B en produit 40%. De plus :

— La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0,1 .

— la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0,2 .

On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Quelle est la probabilité que cet objet provienne de la ligne A ?

On prendra soin de modéliser ce problème par des variables aléatoires appropriées, en spécifiant leur rôle exact et en, précisant les hypothèses faites sur leur loi. Les évenements d'intérêt doivent être écrits à l'aide de ces variables aléatoires (les « événements » écrits en toutes lettres à l'aide « » sont à proscrire dans les zones de calculs).

On pourra aussi (c'est une façon d'aborder le problème de la définition des v.a. appropriées) composer un script Python permettant une évaluation par simulation de la probabilité cherchée pour finir par comparer résultats numériques et résultats théoriques.

Problème IV

Calcul de l'intégrale de GAUSS

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x \exp(-s^2)\, ds = \int_0^x e^{-s^2}\, ds$$

1. Etude de la fonction f

1.a. Montrer que f est une fonction impaire de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer son sens de variation.

1.b. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ et $f(x) - f(1) \leq e^{-1} - e^{-x}$.

1.c. En déduire que f est majorée sur $\mathbb{R}$ et montrer que f admet une limite finie en $+\infty$. Limite que l'on notera Δ et que l'on ne cherchera pas à calculer.

2.a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour un entier naturel non nul n, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f. Montrer, en raisonnant par récurrence, que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction polynômiale p_n telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\, f^{(n)}(x) = p_n(x).e^{-x^2}.$$

2.b. Donner la parité de p_n.

Soit n, p deux entiers naturels ≥ 1, $n \leq 2p+1$.

2.c. Rappeler le développement limité de $t \mapsto e^t$ en 0 à l'ordre p et donner le développement limité de $s \mapsto e^{-s^2}$ en 0 à l'ordre $2p$.

2.d. En déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre $2p+1$ et une expression explicite de $p_n(0)$ en fonction de n. (On distinguera suivant que n est pair ou impair).

3. Intégrales de WALLIS. Pour un entier naturel n, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx$$

3.a. Calculer W_0 et W_1.

3.b. Montrer que $(W_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante positive.

3.c. (Astucieux) Montrer que pour tout entier n, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

Indication:Ecrire $\cos^{n+2}(x) = \cos^n(x)(1-\sin^2(x))$ et, en intégrant par parties, exprimer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\sin(x).\sin(x)\, dx$ en fonction de W_{n+2}.

3.d. En déduire que la suite $((n+1).W_{n+1}.W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.

3.e. Justifier la famille d'inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n.W_n^2 \leq \frac{\pi}{2} \leq (n+1)W_n^2$$

et en conclure que lorsque $n \to +\infty$, $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

4. Calcul de Δ.

4.a. Montrer que pour tout réel u, on a $e^u \geq 1+u$.

4.b. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $\begin{cases} (1-u)^n \leq e^{-n.u} & \text{si } u \leq 1 \\ e^{-nu} \leq \frac{1}{(1+u)^n} & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$

4.c. En déduire que pour tout entier n non nul, d'une part, $\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt \leq \int_0^1 e^{-nt^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{n}} f(\sqrt{n})$,

4.d. et d'autre part $\frac{1}{\sqrt{n}} f(\sqrt{n}) = \int_0^1 e^{-nt^2}\, dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

4.e. Montrer, en justifiant correctement le changement de variable $t = \sin x$, que $\sqrt{n}.W_{2n+1} \leq f(\sqrt{n})$

4.f. Montrer, en justifiant correctement le changement de variable $t = \tan x$, que $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x)^{2n-2}\, dx$ et que

$\sqrt{n}.W_{2n-2} \geq f(\sqrt{n})$

4.g. Déterminer les limites de $(\sqrt{n}.W_{2n-2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sqrt{n}.W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et conclure quant à la valeur de Δ.

Correction DM 03

Correction Ex.–1 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 .

Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches.On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

On note X (ou X_n en dernière partie où on veut marquer la dépendance en n) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1.a. Au bout de n tirages, vu que ce sont des tirages sans remise, l'ensemble des n boules aura été tiré. Au pire (au plus tard ?) le rang de tirage de la boule noire est donc n, au plus tôt, ce rang est 1. La v.a. X est donc à valeurs dans $\{1,\dots,n\}$ que l'on note $X(\Omega)$.

1.b. Pour i un entier entre 1 et n, on note T_i la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée au tirage numéro i est blanche et 0 sinon.

1. On a
$$B_i = \{T_i = 1\} \text{ et } N_i = \{T_i = 0\}$$
2. Pour un $k \in X(\Omega)$, on a :
$$\{X = k\} = B_1 \cap \dots B_{k-1} \cap N_k$$

2.a. Soit i de $[\![2, n-1]\!]$, sachant $B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}$, la composition de l'urne au tirage i est de $n-1-(i-1) = (n-i)$ boules blanches et de 1 boule noire et donc

$$\mathbb{P}_{B_1\cap\dots\cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$$

2.b. De la même façon,

$$\mathbb{P}_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(N_k) = \frac{1}{n-k+1}$$

On a, pour $k \in X(\Omega)$. $\{X = k\} = B_1 \cap \dots B_{k-1} \cap N_k$ et donc, par la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(N_k) . \mathbb{P}_{B_1\cap\dots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\dots \\
&\quad \mathbb{P}_{B_1\cap\dots\cap B_{i-1}}(B_i)\dots\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\,\mathbb{P}(B_1) \\
&= \frac{1}{n-k+1} . \frac{n-k+1}{n-k+2} \dots . \frac{n-i}{n-i+1} \dots . \frac{n-2}{n-1}\frac{n-1}{n} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

2.c. On reconnaît dans la loi de X la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. On a donc (cours) $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

3.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def UnTirage(U):
    """
    Une liste d'éléments: tire l'un d'entre eux au hasard uniforme,
    l'extrait de U retourne sa valeur
    """
    return U.pop(np.random.randint(len(U)))

def X(n) :
    """
    retourne une valeur de  X_n tirée suivant les règles
    """
    #Compose une urne
    U = [1]*(n-1) + [0] #n-1 blanches, une noire
    compteur = 0
    continuer  = True
    while continuer :
        T = UnTirage(U)
        compteur += 1
        if T == 0:
            continuer = False
    return compteur

def EsperanceX(n , NS = 100):
    """
    Effectue NS simulation de X(n),
    moyenne les résultats et retourne cette moyenne
    """
    E = 0
    for _ in range(NS):
        E += X(n)
    return E/NS

#Partie principale, composition du graphe voulu
nmin = 3 ; nmax = 31
n_range = [ n for n in range(nmin,nmax)]
Es100X = [ EsperanceX(n,NS=100) for n in range(nmin,nmax)]
Es10000X = [ EsperanceX(n,NS=10000) for n in range(nmin,nmax)]
EtX = [ (n+1)/2 for n in range(nmin,nmax)]

plt.subplots()
plt.xlabel('$n$')
plt.ylabel('$x$')
plt.plot(n_range,Es100X,'x',label='$x = EsperanceX(n,NS = 100)$')
plt.plot(n_range,Es10000X,'x',label='$x = EsperanceX(n,NS = 10000)$')
plt.plot(n_range,EtX,'o',label='$x = E(X_n)$',alpha = 0.3)
plt.legend()
plt.grid()
```

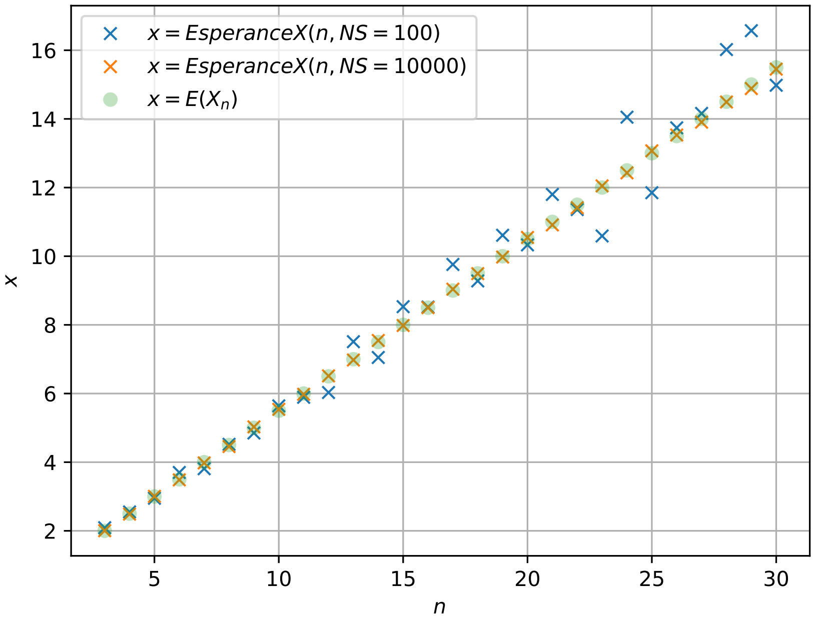

FIGURE 1 – Le graphique demandé : lorsque le nombre de simulations est grand, on ne distingue plus vraiment la différence entre valeur estimée par simulation et valeur théorique.

Correction Ex.–2 Conditionnement sur les valeurs d'une v.a.

Soit n un entier naturel (non nul, sinon, tout est trivial) et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$, indépendantes.

1.a. En conditionnant sur les valeurs de X, c'est à dire en utilisant la formule des probabilités totales avec le s.c.e.i $(\{X=k\}, k\in\{0,\dots,n\}$, on évalue la probabilité de l'événement $X\leqslant Y$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X\leqslant Y) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k \text{ et } Y\geqslant X)\\
[\{X=k\}\cap\{Y\geqslant X\}=\{X=k\}\cap\{Y\geqslant k\}] \quad &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k \text{ et } Y\geqslant k)\\
[\textbf{par indépendance de } X \textbf{ et } Y] \quad &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y\geqslant k)
\end{aligned}$$

Démontrer : $\mathbb{P}(X\leqslant Y)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y\geqslant k)$.

1.b. Si maintenant X est uniforme sur $\{0,\dots,n\}$ (et donc $\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n+1}$ pour $k\in\{0,\dots,n\}$), on a

$$\mathbb{P}(X\leqslant Y)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(Y\geqslant k)$$

On peut décomposer suivant les valeurs prises par Y pour obtenir

$$\mathbb{P}(X\leqslant Y)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=k}^{n}\mathbb{P}(Y=\ell)$$

En intervertissant (interversion « triangle ») ces deux symboles de sommation, il vient

$$\mathbb{P}(X\leqslant Y)=\frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{\ell}\mathbb{P}(Y=\ell)=\frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n}(\ell+1)\mathbb{P}(Y=\ell)$$

et finalement en séparant les sommes et en utilisant la définition de $\mathbb{E}(Y)$

$$\mathbb{P}(X\leqslant Y)==\frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n}\ell\mathbb{P}(Y=\ell)+\frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n}1=\frac{1}{n+1}\left(1+\mathbb{E}(Y)\right).$$

2. On suppose que X et Y ont même loi.

2.a. On peut reprendre le calcul par conditionnement sur les valeurs de X fait en 1.a pour calculer la $\mathbb{P}(X=Y)$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=X)\\
[\{X=k\}\cap\{Y=X\}=\{X=k\}\cap\{Y=k\}] \quad &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=k)\\
[\textbf{par indépendance de } X \textbf{ et } Y] \quad &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k)\\
[X \textbf{ et } Y \textbf{ ont même loi}] \quad &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)^2
\end{aligned}$$

On a donc montré : $\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}(\mathbb{P}(X=k))^2$.

2.b. Si (Z,W) est un couple de v.a. ayant même loi que le couple (X,Y), on a

$$\mathbb{P}(Z<W)=\mathbb{P}(X<Y)$$

Comme X et Y ont même loi et sont indépendantes, le couple (Y,X) a même loi que le couple (X,Y) et doncr : $\mathbb{P}(X<Y)=\mathbb{P}(X>Y)$.

On a du fait que $\{X<Y\}$, $\{X=Y\}$, $\{Y<X\}$ forme un système complet d'événements mutuellement incompatibles :

$$1=\mathbb{P}(X<Y)+\mathbb{P}(X=Y)+\mathbb{P}(Y<X)$$

Par symétrie

$$1=2\mathbb{P}(X<Y)+\mathbb{P}(X=Y)$$

et finalement (car $\mathbb{P}(X<Y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathbb{P}(X=Y)$)

$$\mathbb{P}(X\leqslant Y)=\mathbb{P}(X<Y)+\mathbb{P}(X=Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbb{P}(X=Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(\mathbb{P}(X=k))^2$$

Correction Ex.–3 Une entreprise de construction produit des objets sur lignes de montage A et B.

On suppose que A produit 60% de la production totale et B en produit 40%. De plus :

— La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0,1 .

— la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0,2 .

On tire un objet au hasard, X ; cet objet à deux caractéristiques :

— sa chaine de provenance "ligne" L pouvant valoir A ou B

— s'il est defectueux ou pas "defaut" D pouvant valoir vrai ou faux.

On cherche à évaluer la probabilité $\mathbb{P}(L=A|D=True)$

On sait que :

$$\mathbb{P}(L=A)=0.6,\ \mathbb{P}(L=B)=0.4,\ \mathbb{P}(D=True|L=A)=0.1,\ \mathbb{P}(D=True|L=B)=0.2$$

On utilise donc la formule de BAYES (ou plutôt, on la retrouve)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L=A|D=True) &= \mathbb{P}(L=A \text{ et } D=True)/\mathbb{P}(D=True)\\
\mathbb{P}(L=A \text{ et } D=True) &= P(D=True|L=A)\mathbb{P}(L=A)=0.1*0.6=0.06\\
\mathbb{P}(D=True) &= \mathbb{P}(D=True|L=A)\mathbb{P}(L=A)+\mathbb{P}(D=True|L=B)\mathbb{P}(L=B)\\
&= 0.06+0.2*0.4=0.06+0.08=0.14\\
\mathbb{P}(L=A|D=True) &= 0.06/0.14=0.4285714285714285
\end{aligned}$$

On propose un script calculant ceci numériquement (par simulation sur un grand nombre de tirages)

```
#Ex 3 du dm: à déplacer dans le répertoire de l'exo
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

A = 0
B = 1
#proba de provenir de A, de B
prov = [0.6, 0.1]
#proba d'être defectueux sachant que l'on vient de A, de B
defectueux = [ 0.1, 0.2 ]

def X() :
    """
```

```python
    retourne la provenance de l'objet , s'il est defectueux ou pas
    """
    #X = ligne, defaut  = L,D
    u = np.random.rand()
    if u  <= prov[A]:
        ligne = A
    else :
        ligne = B
    v = np.random.rand()
    if v  <= defectueux[ligne]: #defaut = int(v  <= defectueux[ligne])
        defaut = 1
    else :
        defaut = 0
    return ligne,defaut

#On cherche à évaluer la probabilité de provenir de la ligne A
#sachant que l'on est défectueux
NS = 100000
compteur_A_defaut = 0
compteur_defaut = 0
for _ in range(NS) :
    ligne,defaut = X()
    compteur_defaut += defaut
    compteur_A_defaut += (ligne == A)*defaut
    #(ligne == A) est un booleen qui s'évalue à 1 ou 0 ds ce type d'operation

print("Sur", NS, "essais : proportion de A sachant qu'il y a un defaut",
      compteur_A_defaut/compteur_defaut  )
```

Correction Ex.–4 On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x \exp(-s^2)\, ds = \int_0^x e^{-s^2}\, ds$$

1. Etude de la fonction f

1.a. f est la primitive s'annulant en 0 de la fonction paire $\phi : s \mapsto e^{-s^2}$, continue sur $\mathbb{R}$. C'est donc une fonction impaire [1] de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^{-x^2}$$

La fonction f' est donc strictement positive ($f'(x)$ est l'exponentielle d'un nombre réel) et f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1.b. Soit $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq x$, on a alors successivement

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & x^2 \\ -x & \geq & -x^2 \\ e^{-x} & \geq & e^{-x^2}\text{(croissance de exp)} \end{array}$$

Si $x \geq 1$, on a donc que pour tout $s \in [1,x]$, $e^{-s^2} \leq e^{-s}$ et donc, par croissance de l'intégrale

$$\int_1^x e^{-s^2}\, ds \leq \int_1^x e^{-s}\, ds$$

i.e. , après calculs,

$$f(x) - f(1) \leq e^{-1} - e^{-x}$$

1.c. On a donc, pour $x \in [1,+\infty[$,

$$f(x) \leq f(1) + e^{-1} - e^{-x} \leq f(1) + e^{-1}$$

Comme f est croissante, cette inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui montre que f est majorée (remarquer que le membre de droite ne dépend pas de x).

f est donc croissante et majorée, elle admet une limite finie en $+\infty$ par le théorème de la limite monotone. On note cette limite Δ.

$$\Delta = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-s^2}\, ds$$

2. 2.a. Comme $s \mapsto -s^2$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynomiale) et que exp est $\mathscr{C}^\infty$, la composée, qui n'est autre que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En posant $\forall x \in \mathbb{R}$, $p_1(x) = 1$, p_1 est polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(1)}(x) = \phi(x) = p_1(x).e^{-x^2}.$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition

$$H_n : \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = p_n(x).e^{-x^2}$$

où p_n est une certaine fonction polynomiale.

1. On peut l'annoncer comme cela (programme) ou alors le montrer rapidement par exemple par chgt de variable linéaire $s = -t$, $ds = -dt$ dans l'intégrale définissant $f(-x)$: pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \int_0^{-x} e^{-s^2}\, ds = -\int_0^x e^{-t^2}\, dt = -f(x)$$

— On vient de vérifier que H_1 est vraie.
— Supposons H_n vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, par dérivation de produit et de composée, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\, f^{(n+1)}(x) = p_n(x).(-2x).e^{-x^2} + p_n'(x).e^{-x^2} = p_{n+1}(x)e^{-x^2}$$

où on a posé, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$p_{n+1}(x) = p_n(x).(-2x) + p_n'(x)$$

p_n étant polynômiale, il est clair que l'expression définissant p_{n+1} montre que p_{n+1} est polynomiale. On a donc montré que H_{n+1} est vraie.
— Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, H_n \text{ est vraie.}$$

2.b. $f^{(n)}$ est impaire si n est pair, paire si n est impair. Ceci est du au fait que la dérivée d'une fonction paire est impaire et la dérivée d'une fonction impaire est paire. Comme $p_n = f^{(n)}.\phi$ et que la fonction ϕ est paire, p_n est impaire si n est pair, paire si n est impair.

Soit n, p deux entiers naturels ≥ 1, $n \leq 2p+1$.

2.c. On a

$$\begin{aligned} e^{-s^2} &= 1 - s^2 + \frac{(-s^2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-s^2)^p}{p!} + o\left(s^{2p}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k!} s^{2k} + o\left(s^{2p}\right) \end{aligned}$$

2.d. Et, donc, par intégration des développements limités,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x e^{-s^2}\, ds \\ &= f(0) + \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1} + o\left(x^{2p+1}\right) \end{aligned}$$

On a par ailleurs $f(0) = 0$ et, par la formule de TAYLOR–YOUNG, comme $f^{(n)}(0) = p_n(0)$, que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{2p+1} \frac{p_n(0)}{n!} x^n + o\left(x^{2p+1}\right)$$

On en déduit, par unicité des DL que, pour n pair, $p_n(0) = 0$ et que pour n impair, $n = 2k+1$, $\frac{p_n(0)}{n!} = \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$, *i.e.*

$$p_{2k+1}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!}$$

3. Intégrales de WALLIS.

Pour un entier naturel n, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx$$

3.a. On a

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \\ W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \end{aligned}$$

3.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$0 \leq \cos^{n+1} x \leq \cos^n x$$

car $0 \leq \cos x \leq 1$ et donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x \, dx = W_{n+1} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = W_n$$

et donc

$$0 \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Comme n est quelconque, $(W_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante positive.

3.c. On a

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos^2 x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x . \sin x . \sin x \, dx \end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, on a

$$\cos^n x . \sin x = -\frac{1}{n+1} \frac{d}{dx} (\cos^{n+1} x) \text{ et } \frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$$

Sachant que les fonctions $x \mapsto \cos^{n+1} x$ et $x \mapsto \sin x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la formule d'intégration par parties s'applique pour donner

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x . \sin x . \sin x \, dx &= \left[-\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x . \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x \, dx \\ &= 0 + \frac{1}{n+1} W_{n+2} \end{aligned}$$

On a donc $W_{n+2} = W_n - \frac{1}{n+1} W_{n+2}$ et, en multipliant par $n+1$ et en passant les W_{n+2} du même côté, on obtient que

$$(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$$

3.d. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons l'hypothèse de récurrence

$$H_n : (n+1) W_n . W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

— On a déjà démontré H_0 en 3.a

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que H_n est vrai. Comme on a $(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$, en multipliant par W_{n+1} chaque membre, on obtient

$$(n+2) W_{n+2} . W_{n+1} = (n+1) W_n . W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

et ceci montre que H_{n+1} est vraie.

— Par récurrence, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) W_n . W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

3.e. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$ par décroissance de la suite W. En multipliant par $(n+1)W_n$ (qui est ≥ 0, on obtient

$$0 \leq (n+1)W_{n+1}.W_n \leq (n+1)W_n^2$$

Comme le terme central vaut $\frac{\pi}{2}$, on a donc une inégalité cherchée.

De même, si $n \geq 1$, on a $0 \leq W_n \leq W_{n-1}$ et en multipliant par $n.W_n$, on obtient

$$0 \leq n.W_n^2 \leq n.W_n.W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$$

En remarquant que cette inégalité est aussi vraie (trivialement) pour $n = 0$, on a en résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n.W_n^2 \leq \frac{\pi}{2} \leq (n+1)W_n^2$$

En réécrivant ceci, puis en passant à la racine carré, on a, pour $n \geq 1$,

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{2n}{\pi}.W_n^2 \leq 1$$

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{W_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \leq 1$$

Les deux termes extrêmes tendent vers 1 et le théorème des « gendarmes » implique que $\frac{W_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \to 1$, ce qui est exactement

$$W_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

4. Calcul de Δ.

4.a. Posons, pour $u \in \mathbb{R}$, $g(u) = e^u - (1+u)$. La fonction g ainsi définie est de classse $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall u \in \mathbb{R}, g'(u) = e^u - 1, g''(u) = e^u$$

On connait le signe de $e^u - 1$ suivant les valeurs de u. ($e^u - 1 < 0$ pour $u > 0$, $e^u - 1 > 0$ pour $u > 0$ et vaut 0 pour $u = 0$.) On en déduit le tableau de variations de g et le fait que g est décroissante strictement sur $]-\infty, 0]$, croissante strictement sur $[0, +\infty[$. g admet donc un minimum strict en 0 et celui ci vaut $g(0) = 0$. En conclusion

$$\forall u \in \mathbb{R}, 1+u \leq e^u$$

4.b. Soit n un entier naturel non nul.

— Si $u \leq 1$, on a, en appliquant l'inégalité de la question précédente pour $u \leftarrow -u$ que $0 \leq 1-u \leq e^{-u}$. On peut prendre la puissance n de cette inégalité de nombres positifs pour obtenir

$$(1-u)^n \leq e^{-n.u}$$

— Si $u \geq 0$, on a $0 < 1+u \leq e^u$. On peut « prendre l'inverse » pour obtenir $0 < \frac{1}{e^u} \leq \frac{1}{1+u}$ (la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$). On peut prendre la puissance n de cette inégalité de nombres positifs pour obtenir

$$e^{-nu} \leq \frac{1}{(1+u)^n}$$

4.c. Soit $n \in \mathbb{N}*$, par le changement de variable linéaire bijectif, $s = \sqrt{n}t$, $ds = \sqrt{n}dt$, $t = 1, s = \sqrt{n}/t = 0, s = 0$, on a

$$\int_0^1 e^{-nt^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-s^2}\, ds = \frac{1}{\sqrt{n}} f(\sqrt{n})$$

En prenant $u = t^2$ dans la première des inégalités précédentes, on a que pour tout $t \in [0,1]$, $u = t^2 \leq 1$ et

$$(1-t^2)^n \leq e^{-n.t^2}$$

En intégrant, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \leq \int_0^1 e^{-nt^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} f(\sqrt{n}).$$

4.d. De même, en prenant $u = t^2$ dans la deuxième des inégalités précédentes, on a que pour tout $t \in [0,1]$, $u = t^2 \geq 0$ et

$$\frac{1}{(1+t^2)^n} \geq e^{-n.t^2}$$

En intégrant, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 e^{-nt^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} f(\sqrt{n}) \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} \, dt.$$

4.e. Effectuons le changement de variable $t = \sin x$ dans l'intégrale, on a $dt = \cos x \, dx$, lorsque $x = 0$, $t = 0$, lorsque $x = \frac{\pi}{2}$, $t = 1$ et donc, comme $x \mapsto t = \cos x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, à image dans $[0,1]$ et que $t \mapsto (1-t^2)^n$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[0,1]$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^n \cos x \, dx \quad = \quad \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$$

i.e. , en utilisant $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$,

$$\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \quad = \quad W_{2n+1}$$

On a donc, en utilisant l'inégalité de 4.c

$$\sqrt{n}.W_{2n+1} \leq f(\sqrt{n})$$

4.f. Sur le même modèle, effectuons le changement de variable $t = \tan x$ dans l'autre intégrale, on a $dt = (1+\tan^2 x) \, dx =$, lorsque $x = 0$, $t = 0$, lorsque $x = \frac{\pi}{4}$, $t = 1$ et donc, comme $x \mapsto t = \tan x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, à image dans $[0,1]$ et que $t \mapsto (1+t^2)^{-n}$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[0,1]$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)^{-n}(1+\tan^2 x) \, dx \quad = \quad \int_0^1 (1+t^2)^{-n} \, dt$$

Sachant que $(1+\tan^2 x)^{-1} = \cos^2 x$, on a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x)^{2n-2} \, dx \quad = \quad \int_0^1 (1+t^2)^{-n} \, dt$$

Comme dans l'intégrale de droite, l'intégrande est positive et que $\frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{4}$, on a

$$\sqrt{n} W_{2n-2} \geq f(\sqrt{n})$$

4.g. On a, lorsque $n \to +\infty$,

$$\sqrt{n} W_{2n-2} \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et de même pour $\sqrt{n}.W_{2n+1}$. On en déduit que $(\sqrt{n}.W_{2n-2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sqrt{n}.W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite commune $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et, par le théorème des gendarmes, ceci est aussi la limite de $f(\sqrt{n})$ lorsque $n \to +\infty$. Comme Δ est la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$, Δ est aussi la limite de $f(\sqrt{n})$ lorsque $n \to +\infty$ et donc, par unicité de la limite,

$$\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En résumé, avec le vocabulaire des intégrales généralisées, on a démontré que

$$\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et donc que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$$

Ce qui est un résultat à retenir ! ! !