

Devoir 04

Chaînes de MARKOV, Intégrales généralisées
Vendredi 10/11/2023

Dans le problème suivant, il est question de fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ où I est un intervalle réel. Les notions—limites, continuité, classe \mathcal{C}^n de régularité, dérivée, intégrale—développées dans le cours pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles s'étendent verbatim à ces fonctions par « linéarité ».

En effet, une telle fonction est caractérisée par ses parties réelle et imaginaire, *i.e.* les deux fonctions f_r et f_i , définies sur I , à valeurs réelles, telles que pour tout $x \in I$, $f(x) = f_r(x) + i.f_i(x)$.

On a noté i le nombre complexe bien connu tel que $i^2 = -1$.

Avec cette convention :

- La fonction f est dite continue sur I si chacune des fonctions f_i et f_r l'est ;
- La fonction f est dite de classe \mathcal{C}^1 ($\mathcal{C}^2, \dots, \mathcal{C}^\infty$) sur I si chacune des fonctions f_i et f_r l'est et on a comme formule de définition pour la dérivée :

$$\forall x \in I, f'(x) := f'_r(x) + i.f'_i(x)$$

- De manière analogue, si a et b sont deux points de I , on définit l'intégrale définie de f sur le segment $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f_r(x) dx + i \int_a^b f_i(x) dx$$

Bien évidemment, la notion d'intégrale généralisée se définit de manière analogue, sous réserve de convergence de chacune des intégrales incriminées. Le théorème convergence absolue implique convergence est valable pourvu que l'on remplace la valeur absolue par le module.

- Comme formule fondamentale de dérivation, la fonction exponentielle « complexe » se dérive comme d'habitude. Si $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ et si l'on définit la fonction $e_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, e_\alpha(t) = e^{\alpha.t} = e^{at} . (\cos(bt) + i . \sin(bt)),$$

alors la fonction e_α est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, e'_\alpha(t) = \alpha . e^{\alpha.t} = (a + ib) . e^{at} . (\cos(bt) + i . \sin(bt)).$$

- Plus généralement, si $\phi : I \rightarrow \mathbb{C}$ ($\phi = \phi_r + i\phi_i$) est classe \mathcal{C}^∞ alors $e_\phi : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, e_\phi(t) = e^{\phi(t)} = e^{\phi_r(t)} . (\cos(\phi_i(t)) + i \sin(\phi_i(t)))$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur I avec

$$\forall t \in I, e'_\phi(t) = \phi'(t) . e^{\phi(t)}.$$

Problème I

Les intégrales de FRESNEL

$$F_C = \int_0^{+\infty} \cos(u^2) du \text{ et } F_S = \int_0^{+\infty} \sin(u^2) du$$

sont des intégrales rencontrées dans la théorie physique de la diffraction. L'objet du présent problème est de calculer leur valeur.

1. Nature de ces intégrales.

1.a. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ converge.

1.b. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{3/2}} dt$ est convergente.

1.c. En déduire la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$.

Indication: Faire une intégration par parties en la justifiant proprement.

1.d. Déduire de 1.d. la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(u^2) du$ et conclure quant à la convergence de F_S .

Indication: Faire un changement de variables en le justifiant proprement.

1.e. Indiquer brièvement les étapes menant à la preuve de la convergence de l'intégrale F_C .

2. Un calcul intermédiaire.

Soit i le nombre complexe bien connu vérifiant $i^2 = -1$. On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + i} du.$$

2.a. Démontrer que l'intégrale I est (absolument) convergente.

2.b. Soit A et B les parties réelle et imaginaire de I . Montrer, par le changement de variable $x = \frac{1}{u}$ que $A = -B$.

2.c. En écrivant $\frac{1}{u^2+i} = \frac{u^2-i}{u^4+1}$, montrer que

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+1} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^4+1} du$$

2.d. Effectuer, en le justifiant pleinement, le changement de variable $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (u - \frac{1}{u})$ dans l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1} du$$

et en déduire que $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Conclure sur la valeur de I .

Indication: Calculer d'abord $1+t^2$ en fonction de u

3. Calcul de F_S et F_C .

3.a. On pose

$$F_E = F_C - i.F_S = \int_0^{+\infty} e^{-i.u^2} du$$

Par la question 1, cette intégrale est convergente, sans être absolument convergente. On va démontrer que

$$F_E = \sqrt{\pi} \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (1-i)$$

Sachant cela, donner les valeurs de F_C et F_S .

3.b. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(u^2+i).t^2}}{u^2+i} du$$

lorsque cette intégrale est convergente.

Justifier que cette formule définit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Que vaut $f(0)$?

3.c. Montrer que

$$\forall t \in]0, +\infty[, \int_0^{+\infty} e^{-u^2 \cdot t^2} du = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \frac{1}{t}$$

3.d. Montrer que

$$\forall t \in]0, +\infty[, |f(t)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-u^2 \cdot t^2} du$$

et en déduire la limite de $|f(t)|$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

3.e. On peut démontrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ avec

$$\forall t > 0, f'(t) = -2t \cdot e^{-it^2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u^2 \cdot t^2} du = -\sqrt{\pi} \cdot e^{-it^2}$$

Argumenter en faveur de cette formule de dérivation au niveau de calculs purement formels.

3.f. Pour $t > 0$, calculer $\int_0^t e^{-iu^2} du$ en fonction de $f(t)$ et $f(0)$, en déduire que

$$F_E = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot f(0)$$

et conclure.

Exercice II

Partie A

Développement d'un module traitant les chaînes de MARKOV

On se propose dans cette partie de développer un module Python nommé `markov.py` permettant de traiter les chaînes de MARKOV d'un point de vue générique.

Utiliser le script `markov.py`.

On considère une matrice carrée A de taille $L \times L$, matrice de transition pour une chaîne de MARKOV, *i.e.*, dont les entrées $a_{ij}, 0 \leq i \leq L-1, 0 \leq j \leq L-1$ sont positives et vérifient

$$\forall j \in \{0, \dots, L-1\}, \sum_{i=0}^{L-1} a_{i,j} = 1$$

A une telle matrice, étant donnée une configuration de départ $X_0 \in \{0, \dots, L-1\}$, on associe une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ (toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) à valeurs dans $\{0, \dots, L-1\}$ vérifiant, pour tout $i, j \in \{0, \dots, L-1\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $X_n = j$ alors $X_{n+1} = i$ avec probabilité $a_{i,j}$.

A.1.a. Compléter, dans le script `markov.py`, la fonction Python `N(p)` dont l'argument `p` est un `ndarray` unidimensionnel $p = [p_0, \dots, p_{L-1}]$, *i.e.* $L = p.shape[0]$ retournant un entier compris entre 0 et $L-1$, avec, pour $k \in \{0, \dots, L-1\}$,

$$\mathbb{P}(N(p) = k) = p_k$$

Exécutez le script¹ Vous devez obtenir, dans ce répertoire, un fichier `test.pdf` et vous devez avoir affiché à l'écran une image similaire à celle de la figure 1. Si ce n'est pas le cas, c'est que vous vous êtes trompé dans l'écriture : trouvez les erreurs et recommencez (c'est une boucle `while(nemarchepas): corriger; tester personnelle.`)

A.1.b. Décrire le fonctionnement de la fonction `X(n, A, x)` écrite dans le script `markov.py`.

On rappelle que la notation `A[:, j]` où `A` est un `ndarray` bidimensionnel « fabrique » le `ndarray` unidimensionnel contenant la colonne `j` de la matrice `A`.

1. avec le répertoire de travail qui devrait être par défaut le répertoire du script.

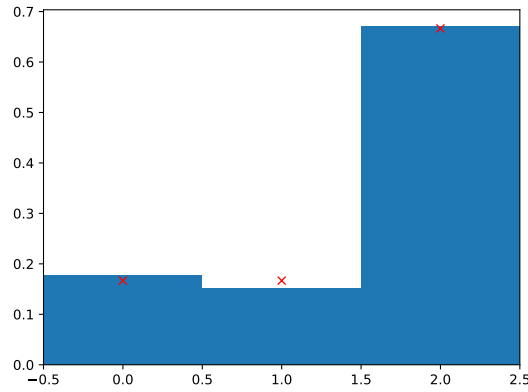


FIGURE 1 – Le résultat du test de markov . py.

A.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = L - 1) \end{pmatrix}$$

A.2.a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = A.P_n$$

A.2.b. Expliquer ce que fait la fonction ComparaisonGraphique du module et notamment ce qui est fait dans les deux boucles for. Que signifient les croix rouges, les barres bleues du graphique 1 ?

Partie B Application

Une urne contient trois boules (de billard), indistinguables au touché, pouvant être de trois couleurs Rouge (R), Orange (O) ou Vert (V). Le jeu est le suivant :

- on démarre, à l'instant 0 avec l'urne contenant les trois couleurs (urne notée ROV) ;
- d'un instant n sur le suivant $n + 1$, on tire l'une des trois boules,
 - Si on tire une verte (V), on la remplace par une orange (O),
 - Si on tire une orange (O), on la remplace par une rouge (R)
 - Si on tire une rouge (R), on remplace toutes les boules par des vertes (V)

B.1.a. Combien y-a-t'il de configurations de l'urne possibles ? On convient de noter dans la suite une telle configuration par un acronyme de trois lettres décrivant le contenu de l'urne. Par exemple, "VOR" est la configuration où l'urne contient trois boules de trois couleurs R, O et V, "VVR" est la configuration avec deux boules V et une boule R.

B.1.b. Compléter le diagramme de la figure 2 en y plaçant les probabilités de passage d'une configuration à l'autre. Y-a-t'il des transitions manquantes ? Compléter au besoin.

B.2. On cherche à évaluer, partant de la position VOR à l'instant 0 la probabilité de se trouver dans chacune des configurations à l'instant $n = 10$.

Utiliser le script urne3couleurs . py.

B.2.a. Quelle est la logique de la construction de la matrice A ? Pourquoi définit-on les variables VOR,VVV,etc... ?

B.2.b. Compléter l'assignation des valeurs dans la matrice A.

B.3.a. Imprimer le résultat de l'exécution du script, contenu dans le fichier urne3couleurs . pdf.

B.3.b. Quelle est la configuration dans laquelle on a le plus de chance de se trouver à l'instant $n = 10$? Avec quelle probabilité ?

B.3.c. Quelle est la configuration dans laquelle on a le moins de chance de se trouver à l'instant $n = 10$? Avec quelle probabilité ?

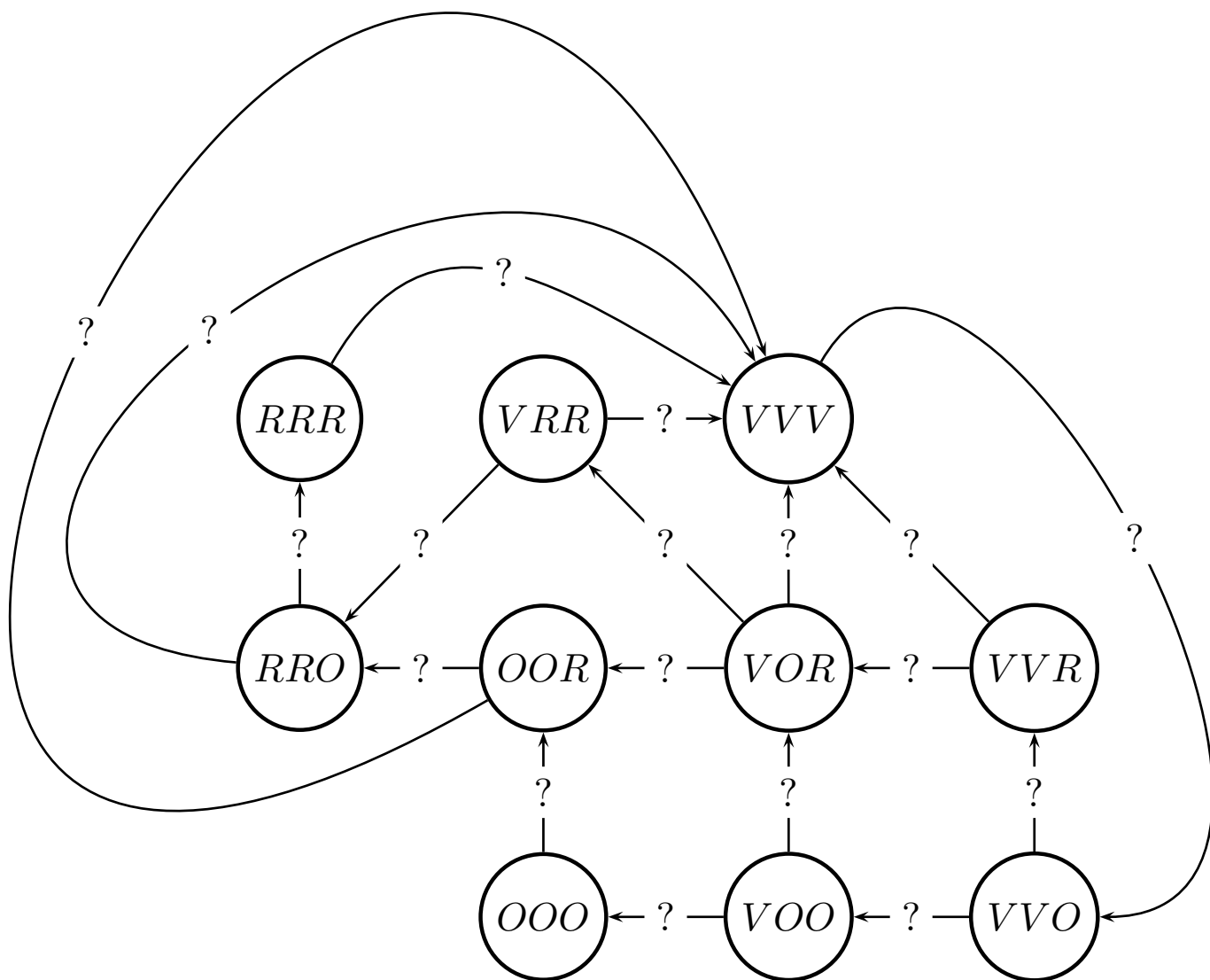


FIGURE 2 – Graphe des transitions

Correction DM 04

Correction Ex.-1

1. Nature de ces intégrales. 1.a. Il s'agit de refaire la démonstration que l'on a vue pour les intégrales de RIEMANN. $t \mapsto t^{-\frac{3}{2}}$ est clairement continue sur $[1, +\infty[$.

Soit $X > 1$, destiné à tendre vers $+\infty$ en fin de calcul. On a

$$\int_1^X \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \left[-2t^{-\frac{1}{2}} \right]_1^X = -2X^{\frac{1}{2}} + 2$$

$X \xrightarrow{+\infty} 2$

et donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ converge et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt = 2$$

1.b. On cherche à appliquer le théorème de comparaison pour les intégrandes positives.

On a clairement $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{3/2}}$ continue sur $[1, +\infty[$. Par ailleurs, du fait que

$$\forall t \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos t \leq 1$$

on déduit que

$$\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq \frac{1-\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ est convergente, le théorème de comparaison pour les intégrandes positives permet de conclure que $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ est *convergente* et que (non demandé)

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt \leq 2 \times 2 = 4$$

1.c. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Soit $X \in [1, +\infty[$ (destiné à tendre vers $+\infty$ à la fin). On a, en intégrant par parties

$$\int_1^X \underbrace{\sin t}_{f'(t)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}}}_{g(t)} dt = \left[(1-\cos t) \frac{1}{\sqrt{t}} \right]_1^X + \frac{1}{2} \int_1^X (1-\cos t) \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$$

Les fonctions $f : t \mapsto 1 - \cos t$ et $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[1, X]$, ce qui justifie l'i.p.p.

Maintenant, lorsque $X \rightarrow +\infty$,

$$\left[(1-\cos t) \frac{1}{\sqrt{t}} \right]_1^X \rightarrow -(1-\cos(1))$$

car $(1-\cos X) \frac{1}{\sqrt{X}} \rightarrow 0$ du fait du caractère borné du numérateur et de la limite infinie du dénominateur.

$$\int_1^X (1 - \cos t) \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt \rightarrow \int_1^{+\infty} (1 - \cos t) \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$$

du fait du caractère convergent de cette intégrale (question 1.c).

— $\int_1^X \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ admet donc une limite finie et finalement, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

On aurait pu faire l'i.p.p directement sur l'intervalle $[1, +\infty[$ en analysant les limites du crochet et de l'intégrale généralisée dans cette i.p.p. généralisée.

1.d. Posons dans l'intégrale précédente $t = u^2$, $u = \sqrt{t} = \phi(t)$.

La fonction ϕ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, +\infty[$, strictement monotone. Par ailleurs $\phi(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et $\phi(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 1$. On a $du = \phi'(t) dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ et donc, par le théorème du changement de variable, $\int_1^{+\infty} \underbrace{\sin t}_{\phi'(t)} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ et $\int_1^{+\infty} \sin(u^2) du$ sont de même nature, i.e. convergentes par ce qui a été fait précédemment.

Considérons l'intégrale F_S . Son intégrande $u \mapsto \sin(u^2)$ est clairement continue sur $[0, +\infty[$, par CHASLES et la convergence de $\int_1^{+\infty} \dots du$, l'intégrale définissant F_S est convergente.

1.e. Concernant la convergence de l'intégrale F_C , on s'intéresse à la convergence de $\int_1^{+\infty} \cos(u^2) du$, ce qui, par le changement de variables de 1.e se ramène à la question de la convergence de $\int_1^{+\infty} \cos t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$, la même i.p.p. que celle faite en 1.c permet de se ramener à la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1+\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$, qui est convergente par application du théorème de comparaison (comme en 1.b).

2. Un calcul intermédiaire.

2.a. L'intégrande $u \mapsto \frac{1}{u^2+i}$ est \mathcal{C}^0 sur $[0, +\infty[$: il s'agit d'une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} . On a

$$\forall u \in [0, +\infty[, \left| \frac{1}{u^2+i} \right| = \frac{1}{|u^2+i|} = \frac{1}{\sqrt{u^4+1}}$$

et, comme $u^4+1 \geq u^4 > 0$,

$$\forall u \in [1, +\infty[, \left| \frac{1}{u^2+i} \right| \leq \frac{1}{u^2}$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du \stackrel{\text{limites}}{=} \left[-\frac{1}{u} \right]_1^{+\infty} = 1$ est convergente, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+i} du$ est ACV par le théorème de comparaison et donc CV par le théorème ACV \Rightarrow CV. Par CHASLES,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+i} du \text{ est convergente.}$$

2.b. Appliquons à I le changement de variable $x = \frac{1}{u}$, \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, strictement décroissant, avec $u \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty, u \rightarrow +\infty, x \rightarrow 0, du = -\frac{1}{x^2} dx$ pour obtenir que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+i} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{-2}+i} \frac{1}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+ix^2} dx = \frac{1}{i} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-i} dx = i\bar{I}$$

On a donc

$$A + iB = \frac{1}{i}(A - iB) = -iA - B$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire de cette égalité, on a $A = -B$.

2.c. En écrivant $\frac{1}{u^2+i} = \frac{u^2-i}{(u^2+i)(u^2-i)} = \frac{u^2-i}{u^4+1}$, on a

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+1} du - i \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^4+1} du$$

et donc

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+1} du, B = - \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^4+1} du$$

et donc

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+1} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^4+1} du = -B$$

2.d. Effectuons le changement de variable $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (u - \frac{1}{u})$ dans l'intégrale

$$2A = \int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1} du$$

On a $t = \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (u - \frac{1}{u})$. Etudions la fonction ϕ ainsi définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On a

- ϕ est \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle considéré. On a
- $\forall u > 0, \phi'(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \frac{1}{u^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{u^2+1}{u^2} > 0$
- La fonction ϕ est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- Au niveau des limites :
 - Lorsque $u \rightarrow +\infty, \frac{1}{u} \rightarrow 0$ et donc $t = \phi(u) \rightarrow +\infty$;
 - lorsque $u \rightarrow 0^+, \frac{1}{u} \rightarrow +\infty$ et donc $t = \phi(u) \rightarrow -\infty$;
- Par ailleurs, $1+t^2 = 1 + \phi(u)^2 = 1 + \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u})^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^4+1}{u^2}$

et donc

$$2A = \int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1} du = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{u^2}{u^4+1}}_{\frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2}} \cdot \underbrace{\frac{u^2+1}{u^2}}_{\sqrt{2} \cdot \phi'(u)} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

Comme, au sens des limites,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

il vient $2A = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, i.e. $A = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. On a donc, vu que $I = A \cdot (1-i)$,

$$I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

3. Calcul de F_S et F_C .

3.a. Si

$$F_E = F_C - i \cdot F_S = \int_0^{+\infty} \cos(u^2) - i \cdot \sin(u^2) du = \int_0^{+\infty} e^{-i \cdot u^2} du$$

et que

$$F_E = \sqrt{\pi} \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (1-i)$$

Alors en identifiant parties réelle et imaginaire dans cette identité, il vient

$$F_C = F_S = \sqrt{\pi} \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

3.b. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(u^2+i) \cdot t^2}}{u^2+i} du.$$

Pour justifier que cette formule définit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, il suffit de vérifier que pour $t \in \mathbb{R}$, quelconque, cette intégrale est convergente. Soit $t \in \mathbb{R}$.

— L'intégrande $u \mapsto \frac{e^{-(u^2+i).t^2}}{u^2+i}$ est bien continue sur $[0, +\infty[$ (cf. 2.a et le fait que $u \mapsto e^{-(u^2+i).t^2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur cet intervalle).

— On a

$$\forall u \geq 0, \left| \frac{e^{-(u^2+i).t^2}}{u^2+i} \right| = \frac{e^{-u^2.t^2}}{|u^2+i|} \leq \frac{1}{\sqrt{u^4+1}}$$

On a vu (cf. 2.a) que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u^4+1}} du$ est convergente et donc par le théorème de comparaison, l'intégrale d'intérêt est absolument convergente et donc convergente par le théorème ACV \Rightarrow CV.

— Le caractère quelconque de $t \in \mathbb{R}$ donne la bonne définition de f sur tout \mathbb{R} .

On a

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(u^2+i).0}}{u^2+i} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+i} du = I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i)$$

3.c. Soit $t \in]0, +\infty[$. Il s'agit de se ramener à l'intégrale gaussienne usuelle (dont la valeur est connue par le cours) par le changement de variable affine $x = \sqrt{2}.u.t$, $du = \frac{1}{\sqrt{2}.t} dx$, bornes identiques :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2.t^2} du = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2}.u.t)^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}.t} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}.x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}.t} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \frac{1}{t}$$

3.d. Soit $t \in]0, +\infty[$. On a l'inégalité

$$\forall u \geq 0, \left| \frac{e^{-(u^2+i).t^2}}{u^2+i} \right| = \frac{e^{-u^2.t^2}}{|u^2+i|} \leq \frac{e^{-u^2.t^2}}{\sqrt{u^4+1}} \leq e^{-u^2.t^2}$$

Par inégalité triangulaire pour les intégrales, on a donc

$$0 \leq |f(t)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-u^2.t^2} du = \sqrt{\pi} \frac{1}{2t}$$

et ceci est valable pour tout $t > 0$. Comme $\frac{1}{t} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, alors, par le théorème des gendarmes, $|f(t)| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

3.e. On peut démontrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ avec

$$\forall t > 0, f'(t) = -2t.e^{-it^2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u^2.t^2} du = -\sqrt{\pi}.e^{-it^2}$$

Cette formule est celle qui doit sortir si on applique le principe général d'additivité de la dérivation : la dérivée d'une somme est la somme des dérivées (somme \sim intégrale), i.e. le fait que

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} F(u,t) du \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial t}(u,t) du$$

sont souvent égales dans la pratique.

Ici $F(u,t) = \frac{e^{-(u^2+i).t^2}}{u^2+i}$ et $\frac{\partial F}{\partial t}(u,t) = -2.t.e^{-(u^2+i).t^2} = -2.t.e^{-i.t^2}.e^{-u^2.t^2}$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial t}(u,t) du = -2.t.e^{-i.t^2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u^2.t^2} du$$

3.f. Par les deux questions précédentes, on a

$$\forall t > 0, f'(t) = -2.t.e^{-i.t^2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u^2.t^2} du = -2.t.e^{-i.t^2} \cdot \sqrt{\pi} \frac{1}{2t} = -\sqrt{\pi}.e^{-i.t^2}$$

Pour $t > 0$, on peut intégrer cette égalité et obtenir

$$\int_0^t e^{-iu^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f(0) - f(t))$$

et, en passant à la limite lorsque $t \rightarrow +\infty$, puisque par 3.d $f(t) \rightarrow 0$, il vient

$$F_E = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-iu^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot f(0).$$

Comme $f(0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i)$, on a donc

$$F_E = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i),$$

ce qui était la valeur annoncée en 3.a.

Correction Ex.-2

Partie A

Développement d'un module traitant les chaînes de MARKOV

A.1.a. Il s'agit de la méthode de simulation vue en cours/TD Info.

```
#La fonction tirant une v.a. discrete étant connue sa loi
def N(p):
    """
    retourne l'entier k entre 0 et p.shape[0]-1 avec probabilité p[k]
    p est un ndarray 1-dimensionnel
    """
    u=np.random.rand()
    q=0.0
    for k in range(p.shape[0]):
        q+=p[k]
        if u<= q:
            return k
    #si p est un vecteur de probabilité, \sum_k p[k]=1, on n'arrive pas là
    return -1
```

A.1.b. La fonction $X(n, A, x)$ retourne une valeur simulée (obtenue par tirage au sort, en respectant la règle donnée par A) de X_n partant de $X_0 = x$. Pour calculer la configuration X_{k+1} à partir de X_k , on utilise la fonction N avec $p = A[:, j]$ où j est la valeur de X_k . Le ndarray 1-dimensionnel $A[:, j]$ contient le vecteur des probabilités d'aller en i , partant de j . Il s'agit donc bien du tirage au sort avec la loi imposée par A.

A.2.a. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $i \in \{0, \dots, L-1\}$, en appliquant la formule des probabilités totales (version proba. conditionnelles) avec le s.c.e.incompatibles $(X_n = 0), (X_n = 1), \dots (X_n = L-1)$, on obtient

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{L-1} \mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = j) \mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{j=0}^{L-1} a_{i,j} \mathbb{P}(X_n = j)$$

Ceci se réécrit matriciellement

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = A.P_n$$

A.2.b. Dans la fonction ComparaisonGraphique, deux choses sont calculées (une par boucle for) puis représentées graphiquement sur le même graphique :

- Première boucle `for s in range(NS)`. On effectue NS simulations de tirage, *i.e.* on itère NS fois l'expérience de calcul d'une valeur de X_n partant du $X_0 = x_0$ donné et on stocke ces valeurs dans une liste. L'histogramme de cette liste de valeurs est ensuite tracé. (Barres bleues, commande `plt.hist`).
- Deuxième boucle `for k in range(n)`. On calcule, par récurrence, le produit matriciel $\underbrace{A \dots A}_{n \text{ fois}} \cdot P_0 = A^n \cdot P_0$. Il s'agit donc du calcul exact du vecteur P_n . Noter la construction de P_0 où on place un 1 à l'emplacement correspondant à la configuration de départ. Les croix rouges sont la représentation graphique de ce vecteur P_n .

La fonction `ComparaisonGraphique` représente donc,

- en barres bleues, les fréquences d'apparition de chaque configuration (au bout de n étapes de "jeu" partant de x_0) pour un grand nombre (NS) d'expériences ;
- en croix rouges, les probabilités (exactes) d'être en chaque configuration (au bout de n étapes de "jeu" partant de x_0).

Il est moral que chaque barre bleue soit à peu près à hauteur de la croix rouge correspondante si l'on fait un grand nombre d'expériences (la fréquence observée doit se rapprocher de la probabilité théorique).

Partie B Application

B.1.a. Il y a 10 configurations possibles, ce qui avec la logique indiquée (et, pour être systématique, en utilisant l'ordre V,O,R sur les lettres) donne

$VVV, VVO, VVR, VOO, VOR, VRR, OOO, OOR, ORR, RRR$

B.1.b. *cf.* Fig. 3. Non, il ne manquait pas de flèches.

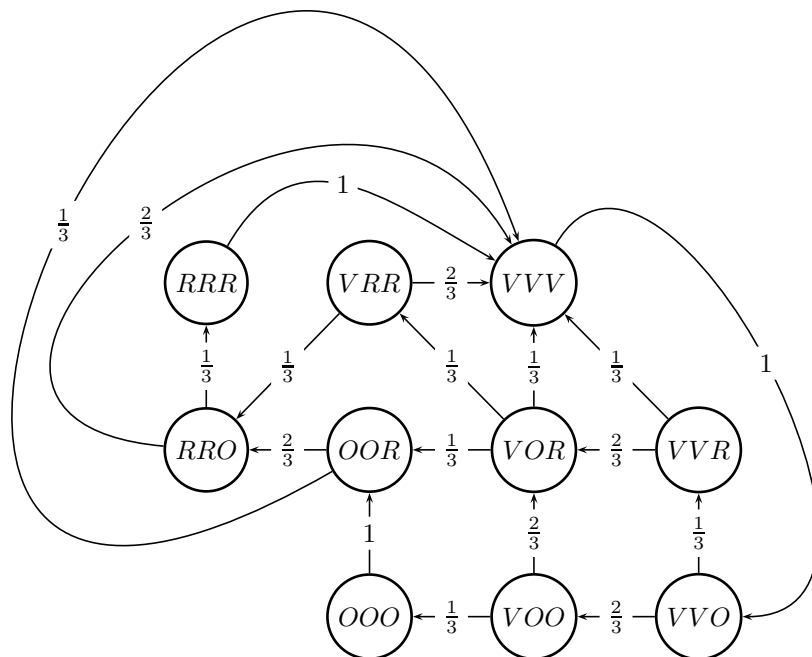


FIGURE 3 – Graphe des transitions

B.2.a. On définit les variables VOR, VVV , etc. afin de pouvoir faire facilement la correspondance entre les numéros de lignes et colonnes de la matrice A et les configurations associées. Par exemple, la ligne $A[OOR, VOR] = 1/3$ est la traduction du fait que $\mathbb{P}(X_{n+1} = OOR | X_n = VOR) = 1/3$. OOR , resp. VOR est le bon numéro de ligne, resp. de colonne de la matrice A .

La matrice A est remplie de zéros avant ces assignations. De la sorte, il ne reste plus qu'à y placer les probabilités de transition non nulles, *i.e.* les flèches montrées sur le diagramme de la figure 3.

B.2.b. Voir le script ci-dessous

```
#codage des 10 états par nombres entre 0 et 9, pour mieux s'y retrouver
RRR=0 ; VRR=1 ; VVV=2
RRO=3 ; OOR=4 ; VOR=5 ; VVR=6#VVR$
OOO=7 ; VOO=8 ; VVO=9
#etablissement de la matrice de transition
A=np.zeros((10,10))
A[VVO,VVO]=2/3 ; A[VVR,VVO]=1/3 ; A[VOR,VOO]=2/3 ; A[OOO,VOO]=1/3
A[OOO,OOO]=1 ;
A[VVV,VVR]=1/3 ; A[VOR,VVR]=2/3
A[OOO,VOR]=1/3 ; A[VVV,VOR]=1/3 ; A[VRR,VOR]=1/3
A[VVV,VRR]=2/3 ; A[RRO,VRR]=1/3
A[RRR,RRO]=1/3 ; A[VVV,RRO]=2/3
A[VVV,RRR]=1
A[RRO,OOO]=2/3 ; A[VVV,OOO]=1/3
A[VVO,VVV]=1
```

B.3.a. cf. Fig. 4.

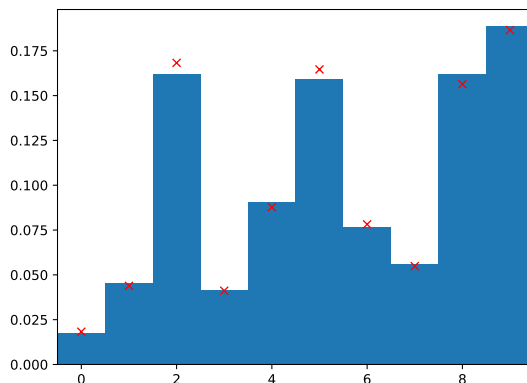


FIGURE 4 – Le résultat de l'exécution du script, contenu du fichier urne3couleurs.pdf.

B.3.b. La lecture de la figure 4 nous apprend que la configuration dans laquelle on a le plus de chance de se trouver à l'instant $n = 10$ est la configuration numéro 9, *i.e.* la VVO. L'affichage du programme

Vecteur de probabilités à l'instant $n= 10$

```
P_n= [0.01828989 0.04389575 0.16826703 0.04115226 0.0877915 0.16460905
0.0781893 0.05486968 0.1563786 0.18655693]
```

montre que le calcul exact confirme la simulation.

B.3.c. De même, la configuration la moins probable à l'instant $n = 10$ est (sans ambiguïté) la configuration numéro 0, *i.e.* la configuration "RRR".

On peut aussi essayer avec $n = 100$, on peut alors voir que sur le long terme, des configurations deviennent pratiquement équiprobables.