Devoir 05

Intégrales généralisées, variables à densité, couples
Jeudi 30/11/2023

Exercice I

1. Justifier, sans chercher à calculer sa valeur, de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

On note α sa valeur et on admet que $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
2. On pose $f(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{(1+x^2)^2}1\!\!1_{\{x>0\}}$. Justifier que f est une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Justifier que X admet une espérance et donner la valeur de son espérance.
4. Soit $Y = X^2 + 1$.
4.a. Justifier que Y admet une espérance et donner la valeur de son espérance.
4.b. Justifier que Y est une variable aléatoire réelle à densité et en donner une densité.

Exercice II

Lois logistiques et log-logistiques

On définit les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par les formules

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \text{ et } \forall X \in [0,+\infty[,\ g(X) = \frac{X}{(1+X)^2}$$

1. Etude succincte de la fonction f et graphe.
1.a. Dresser le tableau de variations de g en y faisant apparaitre limites et extrema.
1.b. Tracer le graphe de g.
1.c. En déduire, sans calculs supplémentaires, le tableau de variations et le graphe de f.
1.d. Montrer que f est paire.
1.e. Calculer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
1.f. Déterminer un nombre réel a pour que $a.f$ soit une densité de probabilité.

⋆⋆⋆

Au niveau vocabulaire, l'*intégrabilité* d'une variable aléatoire réelle est le fait que celle-ci admet une espérance. Ainsi les locutions « X admet une espérance » et « X est intégrable » sont synonymes.
2. On considère dorénavant une variable aléatoire réelle X de densité $a.f$.
2.a. Déterminer F la fonction de répartition de X.
2.b. Montrer que F établit une bijection $\mathbb{R} \to]0,1[$ et proposer une fonction Python `VaLogistique()` simple permettant de simuler informatiquement la variable X.

On rappelle que la fonction `random.rand()` du module `numpy` retourne un nombre réel aléatoire uniforme sur $]0,1[$.
3.a. Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ est convergente.
3.b. En justifiant soigneusement de l'intégrabilité de X, c'est à dire de l'absolue convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$, déterminer son espérance.
3.c. Montrer, *sans chercher à la calculer*, que la variance de X existe. Sa valeur est $\mathbb{V}(X) = \frac{\pi^2}{3}$.

4. Soit $\mu \in \mathbb{R}$, $s > 0$. On pose $Z = s.X + \mu$.
4.a. Déterminer espérance et variance de Z en fonction de μ et s.
4.b. Déterminer une densité de Z.
5. On pose $Y = e^X$.
5.a. Donner une densité de Y.
5.b. La variable aléatoire Y est-elle intégrable ? Si oui, donner son espérance.
5.c. Proposer une fonction Python, la plus simple possible `VaLogLogistique()` permettant de simuler la variable Y.

Problème III

Rappels de notation : Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle, définie sur Ω,

- si X admet une espérance, on note celle-ci $\mathbb{E}(X)$;
- si X admet une variance, on note celle-ci $\mathbb{V}(X)$;
- si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, x un nombre réel, Y une variable aléatoire, on note $\{X \in I\}$, resp. $\{X < x\}$, resp. $\{X \leq Y\}$ l'évenement « X appartient à I », resp. X est strictement inférieur à x », resp. X est inférieur à Y », c'est à dire l'élément de $\mathscr{T}$ défini par
$$\{X \in I\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}, \text{ resp.} \{X < x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\},$$
$$\text{resp.} \{X \leq Y\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < Y(\omega)\};$$
d'autres variantes naturelles de cette notation sont utilisées dans le problème ;
- la probabilité d'un évenement $A \in \mathscr{T}$ est notée $\mathbb{P}(A)$; la notation $\mathbb{P}(\{X \in I\})$, et d'autres variantes voisines sont simplifiées en enlevant les accolades, par exemple
$$\mathbb{P}(\{X \in I\}) = \mathbb{P}(X \in I);$$
- si A et B sont deux événements, $\mathbb{P}(B > 0)$, on note $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité conditionnelle, sachant B, de A ; la notation alternative $\mathbb{P}(A|B)$ est autorisée aux candidats qui le souhaitent ;

Partie A
Calcul d'une probabilité

A.1. Soit X une variable aléatoire réelle à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.
A.1.a. Soit $y \in \mathbb{R}$, quelle est la valeur de de $\mathbb{P}(X = y)$?
A.1.b. Si Y est une variable aléatoire réelle ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, quelle est la valeur de $\mathbb{P}(X = Y)$?
A.1.c. Donner une variable aléatoire réelle Y, à densité, telle que $\mathbb{P}(X = Y) > 0$.

⋆⋆⋆

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, à densité et *indépendantes*. On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y. On suppose que Y est à valeurs positives et possède une densité f_Y dont la restriction à $[0, +\infty[$ est continue sur cet intervalle.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $H(x) = \mathbb{P}(\{X \leq Y\} \cap \{Y < x\})$.
A.2.a. Que vaut $H(0)$?
A.2.b. Montrer que H est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ qui admet une limite finie en $+\infty$.
A.2.c. En utilisant le système dénombrable, complet, d'évenements mutuellement incompatibles $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{n \leq Y < n+1\}$ et l'axiome d'additivité dénombrable satisfait par $\mathbb{P}$, montrer que la suite $(H(n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\mathbb{P}(X \leq Y)$ et en déduire que $\lim_{x\to+\infty} H(x) = \mathbb{P}(X \leq Y)$.

A.3. Soit (u,v) un couple de réels positifs tels que $u < v$.
A.3.a. Montrer que $H(v)-H(u) = \mathbb{P}(\{X \leq Y\} \cap \{u \leq Y < v\})$ puis que :

$$F_X(u)\frac{F_Y(v)-F_Y(u)}{v-u} \leq \frac{H(v)-H(u)}{v-u} \leq F_X(v)\frac{F_Y(v)-F_Y(u)}{v-u}.$$

A.3.b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, H est dérivable en x et $H'(x) = F_X(x)f_Y(x)$.
A.3.c. En conclure que pour tout x réel positif, $H(x) = \int_0^x F_X(t)f_Y(t)\,dt$.
A.4. Montrer que $\mathbb{P}(X \leq Y) = \int_0^{+\infty} F_X(t)f_Y(t)\,dt$.
A.5. En utilisant la fonction $K : x \mapsto \mathbb{P}(\{X < Y\} \cap \{Y \leq x\})$, on montrerait de même et nous l'admettrons que :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_0^{+\infty} F_X(t)f_Y(t)\,dt = \mathbb{P}(X \leq Y). \qquad (+)$$

Que peut-on en déduire pour $\mathbb{P}(X = Y)$?
A.6. Application aux lois exponentielles

On suppose que U et V sont deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ, réels strictement positifs.

Soit θ un nombre réel positif ou nul.
A.6.a. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $X = U - \theta$.
A.6.b. En déduire que pour tout $\theta \geq 0$,

$$\mathbb{P}(U - \theta \leq V) = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda.\theta}. \qquad (*)$$

Partie B

Une compétition entre deux groupes

Dans toute la suite du sujet, on désigne par p un réel de l'intervalle $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
On modélise une compétition entre deux groupes d'individus A et B avec les règles suivantes :

— Le groupe A doit résoudre une suite de problèmes $(P_k)_{k\geq>1}$ dans l'ordre des indices. Au temps $t = 0$, le groupe commence la résolution du problème P_1, ce qui lui prend un temps représenté par la variable aléatoire X_1. Une fois P_1 résolu, le groupe aborde immédiatement le problème P_2, et on note X_2 le temps consacré à la résolution de P_2 par le groupe A, et ainsi de suite.

  Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire donnant le temps consacré à la résolution du problème P_k par le groupe A.

— De même, le groupe B doit résoudre dans l'ordre une suite de problèmes $(Q_k)_{k\geq 1}$; la résolution du premier problème Q_1 commence au temps $t = 0$ et on note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire donnant le temps consacré par le groupe B à la résolution du problème Q_k.

— À ce jeu est associé un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ sur lequel sont définies les suites de variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ et $(Y_k)_{k\geq 1}$, et on fait les hypothèses suivantes :
  — pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit la loi exponentielle de paramètre p, notée $\mathscr{E}(p)$, et Y_k suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(q)$;
  — pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_k$ sont indépendantes.

— On établit alors la liste de tous les problèmes résolus dans l'ordre chronologique où ils le sont par les deux groupes. En cas de simultanéité temporelle de la résolution par les deux groupes d'un de leurs problèmes, on placera d'abord le problème résolu par À dans la liste puis celui résolu par B.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n, la variable aléatoire de BERNOULLI indicatrice de l'événement :

  « le n-ème problème placé dans la liste est un problème résolu par le groupe A ».

  Par exemple, si la liste des cinq premiers problèmes résolus est $(P_1, P_2, Q_1, P_3, Q_2)$ alors $U_1 = 1$, $U_2 = 1$, $U_3 = 0$, $U_4 = 1$ et $U_5 = 0$.

— Pour tout $n \geq 0$, on note aussi S_n la variable aléatoire donnant le nombre de problèmes qui ont été résolus par A présents dans la liste des n premiers problèmes résolus avec la convention particulière que S_0 vaut toujours 0.

B.1.a. Que représente la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k$?
B.1.b. On suppose que, pour une expérience aléatoire menée, $X_1 = 5$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$, $X_4 = 2$, $Y_1 = 2$, $Y_2 = 2$, $Y_3 = 4$, $Y_4 = 2$, $Y_5 = 3$. Déterminer alors $U_1, \dots, U_8$. Peut-on aussi en déduire la valeur de U_9 ?

⋆⋆⋆

Dans les questions B.2 et B.3, on démontre par récurrence sur $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(U_n = 1) = p$.
B.2.a. Montrer que $\mathbb{P}(U_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 \leq Y_1) = p$. On pourra utiliser la relation (*) démontrée en question A.6.b pour des valeurs de θ, λ, μ adéquates.
B.2.b. *Loi conditionnelle, sachant* $\{U_1 = 1\}$, de $Y_1 - X_1$.
B.2.b.i. Montrer que pour tout réel $x < 0$, $\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_1 - X_1 \leq x) = 0$.
B.2.b.ii. Soit x un réel positif ou nul. Établir :

$$\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_1 - X_1 \leq x) = \frac{1}{p}\mathbb{P}(X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x),$$

puis calculer $\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_1 - X_1 \leq x)$.
B.2.c. On peut interpréter ce résultat en disant que la *loi conditionnelle, sachant* $\{U_1 = 1\}$, de $Y_1 - X_1$ est une loi exponentielle. Quel est son paramètre ?

Par analogie ou symétrie, quelle est la loi conditionnelle, sachant $\{U_1 = 0\}$, de $X_1 - Y_1$? (on n'attend pas une démonstration précise mais un argument de bon sens pour justifier le résultat proposé)
B.2.d. Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(\{Y_1 - X_1 \leq x\} \cap \{Y_2 \leq y\}) = \mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_1 - X_1 \leq x).\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_2 \leq y).$$

On traduit ce fait en disant que, conditionnellement à l'événement $\{U_1 = 1\}$, *i.e.* pour le probabilité $\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}$, les variables $Y_1 - X_1$ et Y_2 sont indépendantes.

On peut démontrer de même que, conditionnellement à l'événement $\{U_1 = 1\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$, les variables aléatoires $X_2, \dots, X_k$, $Y_1 - X_1$, $Y_2, \dots, Y_k$ sont indépendantes, et par symétrie, que conditionnellement à l'événement $\{U_1 = 0\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$, les variables aléatoires $X_2, \dots, X_k$, $X_1 - Y_1$, $Y_2, \dots, Y_k$ sont indépendantes.
B.3. Conclusion du calcul de la loi de U_n.
B.3.a. On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente que :

$$\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(U_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(U_n = 1) \text{ et } \mathbb{P}_{\{U_1=0\}}(U_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(U_n = 1).$$

B.3.b. Conclure sur la valeur de $\mathbb{P}(U_n = 1)$ où n est un entier naturel quelconque.
B.4. On montrerait aussi par récurrence, et nous l'admettrons, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $U_1, \dots, U_n$, sont mutuellement indépendantes. En déduire la loi de S_n et en donner espérance et variance.

Partie C
Simulations informatiques

C.1. Rappeler la méthode de simulation informatique d'une variable aléatoire exponentielle X de paramètre $\lambda > 0$ ayant à disposition une variable aléatoire uniforme U sur l'intervalle $]0,1[$ et écrire une fonction Python `Exp(lambada=1)` retournant une valeur aléatoire tirée suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda =$ `lambada`.

NB :

— On rappelle que, après importation du module `numpy` par une ligne de la forme `import numpy as np`, la fonction Python `np.random.rand()` retourne une valeur aléatoire floattante tirée suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.

— Le mot `lambda` est un mot réservé du langage Python, ce qui explique notre choix du nom `lambada` pour désigner le paramètre nommé avec valeur par défaut de cette fonction.

C.2. Compléter (recopier sur la copie en remplaçant les `....` par les instructions adéquates) le script Python suivant pour qu'il simule le jeu et, pour n, p donnés, la fonction `SuiteU` retourne, en liste, un tirage au sort des valeurs de $U_1, U_2, \ldots, U_n$ suivant les règles décrites en introduction de la partie B :

```
def SuiteU(n,p):
    """
    Retourne un tirage au sort, dans les règles, des v.a U_1,...,U_n
    en une liste (attention au décalage d'indice) U[0] = U_1...
    """
    q = 1 -p
    X = []
    Y = []
    for k in range(n):
        X.append(....)
        Y.append(....)
    Sx = 0
    Sy = 0
    U = [] #U est la liste vide
    for k in range(n):
            if Sx + X[-1]  < Sy + Y[-1]  :
                Sx = Sx + X.pop()
                U.append(....)
            else :
                Sy = Sy + Y.pop()
                U.append(....)
    return U
```

NB : On rappelle que :

— On peut utiliser la fonction `Exp` développée à la question précédente.

— `[]` est une liste vide

— Si `L` est une liste, l'expression `L[-1]` s'évalue en la dernière valeur située en fin de la liste `L`;

— Si `L` est une liste, l'instruction `L.append(x)` ajoute la valeur de `x` en fin de la liste `L`;

— Si `L` est une liste, l'instruction `L.pop()` retire et retourne la valeur située en fin de la liste `L`;

C.3. On fixe des valeurs de n et p. La figure 1 montre l'histogramme d'un grand nombre de valeurs de S_n tirées au sort suivant les règles indiquées, *i.e.* après tirage au sort d'une liste de valeurs de U_1,...,U_n par la fonction `SuiteU`, on calcule la somme de ces valeurs.

En justifiant votre réponse, donner des possibilités raisonnables pour les valeurs de n et p.

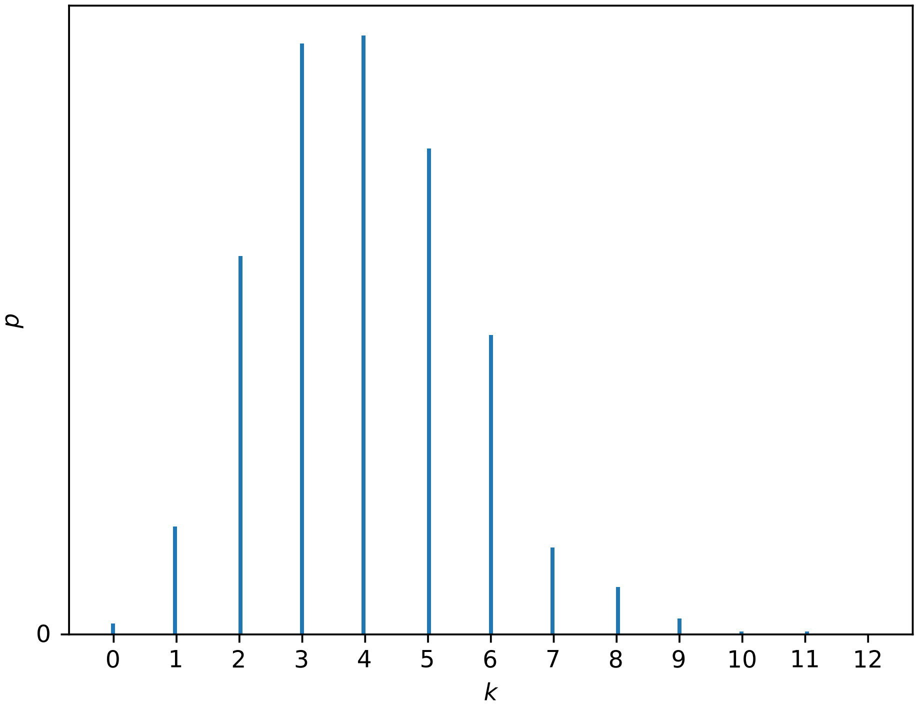

FIGURE 1 – Histogramme de 1000 valeurs simulées de S_n. Que valent n et p ?

Correction DM 05

Correction Ex.–1
1. On considère l'intégrale généralisée

$$\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

L'intégrande est la fonction g définie par

$$\forall x \in [0,+\infty[\,,\ g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

La fonction g est clairement positive et continue sur $[0,+\infty[$
On a

$$\forall x \in [1,+\infty[\,,\ 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{x^4}$$

et l'intégrale du membre de droite,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3},$$

est convergente. Le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées à intégrande positive implique que $\int_1^{+\infty} g(x)\ dx$ est convergente, et CHASLES nous assure que $\int_0^{+\infty} g(x)\ dx$ est convergente (et vaut donc un certain nombre α.
On admet que $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
2. On pose $f(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathbb{1}_{\{x>0\}}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, elle est positive et d'intégrale (convergente) valant 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{1}{(1+x^2)^2}\ dx = \frac{\alpha}{\alpha} = 1.$$

f est donc une densité de probabilité (sur $\mathbb{R}$).
3. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Le fait que X admette une espérance est équivalent à la convergence absolue de l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{x}{(1+x^2)^2}\ dx.$$

L'intégrande est positive et donc la convergence absolue requise est la convergence de cette dernière intégrale et l'espérance de X, la valeur de celle-ci. On a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{x}{(1+x^2)^2}\ dx &= \frac{1}{\alpha}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

On en conclut que X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \frac{2}{\pi}$.

4. Soit $Y = X^2 + 1$.

4.a. Y est une v.a. positive, l'existence de l'espérance, (resp. sa valeur) est la question de la convergence (absolue) de l'intégrale, (resp. la valeur de)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+1).f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{x^2+1}{(1+x^2)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\alpha}\left[\arctan x\right]_0^{+\infty} \\
(\arctan(x) \overset{x\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}) &= \frac{1}{\alpha}\frac{\pi}{2} = 2
\end{aligned}$$

et donc Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) = 2$.

4.b. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $h(Y)$ une v.a. admettant une espérance. On a (toutes les intégrales écrites sont ACV, cette propriété étant conservée par changement de variable généralisé.)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(Y)) &= \mathbb{E}(h(X^2+1)) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} h(x^2+1)\frac{dx}{(1+x^2)^2} \\
\text{(chgt de var } y = x^2+1\text{, justifié en fin de calcul)} &= \frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty} h(y)\frac{dy}{(2\sqrt{y-1})y^2} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(y).\frac{1}{2\alpha.\sqrt{y-1}y^2}1\!\!1_{\{y>1\}}\,dy
\end{aligned}$$

La variable aléatoire Y est une variable aléatoire réelle à densité, une densité en est la fonction

$$y \mapsto \frac{1}{2\alpha.\sqrt{y-1}y^2}1\!\!1_{\{y>1\}}.$$

Il reste à justifier le changement de variable, la fonction $\phi : x \mapsto y = x^2+1$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, y est strictement croissante et définit une bijection $]0,+\infty[\to]1,+\infty[$, de bijection réciproque $\psi : y \mapsto x = \sqrt{y-1}$.

On a par ailleurs, $dy = 2.x.dx$ et donc $dx = \frac{1}{2\sqrt{y-1}}\,dy$.

Correction Ex.–2 On définit le fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

1. Etude succincte de la fonction f et graphe.

On définit la fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par la formule

$$\forall X \in [0,+\infty[,\ g(X) = \frac{X}{(1+X)^2}$$

1.a. Le numérateur de la fraction g ne s'annulant pas sur $[0,+\infty[$, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle et

$$\forall X \in [0,+\infty[,\ g'(X) = \frac{(1+X)^2 - X.2(1+X)}{(1+X)^4} = \frac{1-X}{(1+X)^3}$$

Le signe de g' est clair

1. Pour $X \in]0,1[$, $g'(X) > 0$ et g est strictement croissante sur cet intervalle.
2. Pour $X \in]1,+\infty[$, $g'(X) < 0$ et g est strictement décroissante sur cet intervalle.

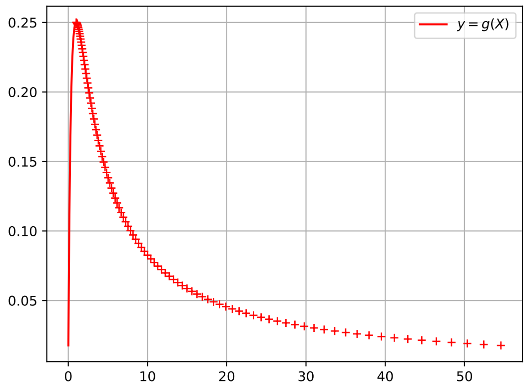

FIGURE 2 – Le graphe de g

Par ailleurs, (pour la deuxième limite, on utilise les règles bien connues sur les limites à l'infini de fractions rationnelles)

$$\lim_{X\to 0} g(X) = 0 = \lim_{X\to+\infty} g(X)$$

Finalement g admet un maximum en 1 et celui-ci vaut $g(1) = \frac{1}{4}$.

On laisse au lecteur le soin de tracer le tableau de variations de g sur ces indications complètes.

1.b. On peut alors tracer le graphe de g, à la main ou par exemple via son grapheur favori ou via un petit script Python.

1.c. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(e^{-x})$, $x \mapsto X = e^{-x}$ est une bijection décroissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, le tableau de variations de f se déduit de celui de g. f a pour limite 0 en $\pm\infty$, f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$, strictement décroisssante sur $]0,+\infty[$ et admet un maximum de $\frac{1}{4}$ en 0. Le graphe de f se déduit de celui de g via un changement de variable (axe des abscisses)

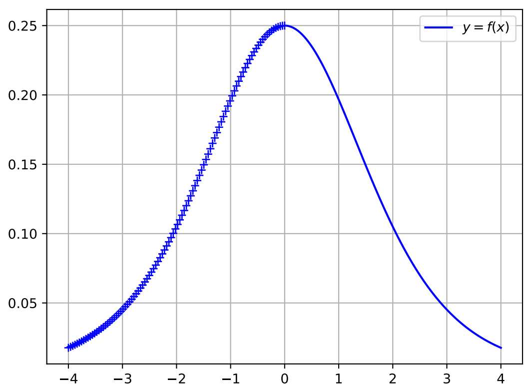

FIGURE 3 – Le graphe de f

1.d. Le domaine de définition de f est symétrique par rapport à l'origine et, si $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^{2x}e^{-x}}{(e^x(e^{-x}+1))^2} = \frac{e^{2x}e^{-x}}{e^{2x}(e^{-x}+1)^2} = f(x)$$

1.e. En posant $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -e^{-x}.\left(-\frac{1}{(1+e^{-x})^2}\right) = f(x)$$

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
1.f. La fonction f est une fonction continue, positive sur $\mathbb{R}$. Pour que $a.f$ soit une densité de probabilité, il suffit que

$$a.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Or, avec la primitive calculée précédemment, on a, pour $X > 0$,

$$\int_0^{+X} f(x)\,dx = [F(x)]_0^{+X} = \frac{1}{1+e^{-X}} - \frac{1}{2} \overset{X\to+\infty}{\to} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-X}^{0} f(x)\,dx = [F(x)]_{-X}^{0} = -\frac{1}{1+e^{X}} + \frac{1}{2} \overset{X\to+\infty}{\to} 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

et il suffit de prendre $a = 1$.
2. On considère dorénavant et dans toute la suite du problème, une variable aléatoire réelle X de densité f.
2.a. F, la fonction de répartition de X, est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

2.b. F est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée (par quasi-définition) $f > 0$. F est donc, continue, strictement croissante et définit, par le théorème de la bijection continue, une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{-\infty} F, \lim_{+\infty} F[=]0,1[$.

Calculons sa bijection réciproque : Soit $y \in]0,1[$. L'équation $F(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ équivaut successivement à

$$1+e^{-x} = \frac{1}{y},\ e^{-x} = \frac{1-y}{y},\ x = \ln\frac{y}{1-y} = \ln\left(\frac{1}{1-y} - 1\right) = F^{-1}(y)$$

Le code Python suivant permet de simuler informatiquement la variable X (On suppose que la bibliothèque `numpy` a été importée sous le nom `np` comme c'est l'usage).

```
def VaLogistique() :
    return np.log(1/(1-np.random.rand())-1)
```

3. 3.a. L'intégrande de $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ est $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

Il s'agit clairement d'une fonction continue sur $]0,+\infty[$, *positive*. On est donc en position d'appliquer le théorème de comparaison pour prouver la convergence de cette intégrale.

On a, pour $x > 0$, $e^{-x} > 0$, $1+e^{-x} \geq 1$, $\frac{1}{(1+e^{-x})^2} \leq 1$ et donc,

$$\forall x \in]0,+\infty[, 0 \leq xf(x) \leq xe^{-x}$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ est convergente [1] ; en effet, soit $X > 0$ destiné à tendre vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^X \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{e^{-x}}_{g'(x)}\,dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^X + \int_0^X e^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^X + 1 - e^{-X} \\ &\overset{X\to+\infty}{\to} 1\end{aligned}$$

1. On peut aller plus vite pour ce point en signalant qu'il s'agit de l'espérance d'une v.a. $\mathscr{E}(1)$ intégrabilité et valeur de l'espérance sont des éléments de cours.

L'ipp est justifiée par le fait que les fonctions f et g définies par $f(x) = x$ et $g(x) = -e^{-x}$ ($f'(x) = 1$, $g'(x) = e^{-x}$) sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, X]$. La limite $Xe^{-X} \to 0$ est obtenue par « croissances comparées ».

Par le théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ est convergente et $0 \leq \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx \leq 1$.

3.b. L'intégrabilité de X (et donc l'existence de son espérance) est équivalente à la convergence absolue de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\,dx$$

i.e. la convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\,dx.$$

Ceci est équivalent à la convergence de chacune des intégrales

$$\int_0^{+\infty} |x|f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx \text{ et } \int_{+\infty}^{0} |x|f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx$$

et, par parité de f, ceci équivaut à la convergence de

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$$

déjà établie. X est donc intégrable.

On a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = 0$$

par convergence de l'intégrale et imparité de l'intégrande.

3.c. La variance de X existe si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$

est convergente. Ceci équivaut, par parité de l'intégrande, à la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$

On a, par la même majoration que dans la question 3.a,

$$\forall x > 0,\, 0 \leq x^2 f(x) \leq x^2 e^{-x}$$

Nous allons montrer [2], par une ipp, que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx$ est convergente et l'application du théorème de comparaison pour les intégrales généralisées à intégrande positive montre donc que $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ et convergente et finalement que X admet une variance.

Soit $X > 0$ destiné à tendre vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^X \underbrace{x^2}_{f(x)}\underbrace{e^{-x}}_{g'(x)}\,dx &= \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^X + \int_0^X 2xe^{-x}\,dx \\ &\overset{X\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}\,dx = 2\end{aligned}$$

L'ipp est justifiée par le fait que les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -e^{-x}$ ($f'(x) = 2x$, $g'(x) = e^{-x}$) sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, X]$. La limite $X^2 e^{-X} \to 0$ est obtenue par « croissances comparées ». On a utilisé la convergence de $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1$ déjà démontrée.

2. On peut aller plus vite pour ce point en signalant qu'il s'agit de l'espérance du carré d'une v.a. $\mathscr{E}(1)$ dont l'intégrabilité et valeur de l'espérance sont des éléments de cours via variance et formule de KOENIG–HUYGHENS.

4. Soit $\mu \in \mathbb{R}$, $s > 0$. On pose $Z = s.X + \mu$.
4.a. On a, par linéarité de l'espérance, que

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(s.X + \mu) = s.\mathbb{E}(X) + \mu = \mu$$

Sur un modèle similaire, en appliquant les règles $\mathbb{V}(Z + \text{cste}) = \mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{V}(\text{cste}.Z) = \text{cste}^2\mathbb{V}(Z)$,

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(s.X + \mu) = \mathbb{V}(s.X) = s^2\mathbb{V}(X) = \frac{\pi^2}{3}.s^2$$

4.b. Déterminons une densité en établissant la formule de transfert générique pour Z. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $h(Z)$ est intégrable. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(Z)) &= \mathbb{E}(h(s.X + \mu)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s.x + \mu) f(x)\, dx \\ \text{(chgt de var. affine } z = sx + \mu,\ dz = s.dx) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(z) \frac{1}{s}.f\left(\frac{z-\mu}{s}\right)\, dz \end{aligned}$$

On reconnait ici qu'une densité de Z est la fonction

$$z \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{s}.f\left(\frac{z-\mu}{s}\right) = \frac{1}{s}.\frac{e^{-\frac{z-\mu}{s}}}{(1 + e^{-\frac{z-\mu}{s}})^2}$$

5. On pose $Y = e^X$.
5.a. Calculons une densité de Y en cherchant la formule de transfert générique pour Y. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $h(Y)$ est intégrable. On a (toutes les IG écrites sont ACV)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(Y)) &= \mathbb{E}(h(e^X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(e^x) f(x)\, dx \\ \text{(chgt de var. non linéaire, } \mathscr{C}^1\text{, strict. monotone } y = e^x,\ x = \ln y) &= \int_0^{+\infty} h(y) f(\ln y)\, \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Or, pour $y > 0$ $f(\ln y) = \frac{1}{y(1+\frac{1}{y})^2}$ et donc, après simplification, une densité de Y est donnée par la fonction

$$y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{(1+y)^2} 1\!\!1_{\{y>0\}}$$

5.b. La variable aléatoire positive Y est intégrable si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{y}{(1+y)^2}\, dy$ est (A)CV. On a, pour $\Upsilon > 0$, destiné à tendre vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\Upsilon} \frac{y}{(1+y)^2}\, dy &= \int_0^{\Upsilon} \frac{y+1}{(1+y)^2}\, dy - \int_0^{\Upsilon} \frac{1}{(1+y)^2}\, dy \\ &= [\ln(1+y)]_0^{\Upsilon} + \left[\frac{1}{1+y}\right]_0^{\Upsilon} = \ln(1+\Upsilon) + \frac{1}{1+\Upsilon} - 1 \\ &\overset{\Upsilon \to +\infty}{\to} +\infty \end{aligned}$$

Ceci montre que Y n'est pas intégrable.
5.c. Le code Python suivant permet de simuler informatiquement la variable Y. (On suppose pour le deuxième que l'on a construit la fonction Python de la question 2.b).

```
def VaLogLogistique() :
    return np.exp(VaLogistique())
```

Correction Ex.–3

Partie A

Calcul d'une probabilité

A.1. Soit X une variable aléatoire réelle à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.
A.1.a. Soit $y \in \mathbb{R}$, d'après le cours, la valeur de de $\mathbb{P}(X = y)$ est 0.
A.1.b. Soit Y une variable aléatoire réelle ne prenant qu'un nombre fini de valeurs $y_1 < \cdots < y_K$. En utilisant la formule des probabilités totales et le s.c.e.i $\{Y = y_1\}, \ldots, \{Y = y_K\}$ et la question précédente, on obtient

$$0 \leq \mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(X = y_k \text{ et } Y = y_k) \leq \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(X = y_k) = 0.$$

A.1.c. En posant $X = Y$, la variable aléatoire réelle Y est à densité et $\mathbb{P}(X = Y) = 1 > 0$.

Voici une variante plus compliquée, nécessitant un calcul pour démontrer que Y à densité : on prend $Y = |X|$. On a alors $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X \geq 0)$ et $\mathbb{P}(X = -Y) = \mathbb{P}(X \leq 0)$, comme $\mathbb{P}(X \geq 0) + \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X \geq 0) + \mathbb{P}(X < 0) = 1$, l'un des deux nombres $\mathbb{P}(X = Y)$ ou $\mathbb{P}(X = -Y)$ est > 0.
A.2.a. On a posé pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $H(x) = \mathbb{P}(\{X \leq Y\} \cap \{Y < x\})$ et donc

$$H(0) = \mathbb{P}(\{X \leq Y\} \cap \{Y < 0\}).$$

Or Y est supposée à valeurs positives et donc $\{Y < 0\}$, et *a fortiori* $\{X \leq Y\} \cap \{Y < 0\}$ est l'événement impossible, de probabilité nulle. On a donc

$$H(0) = 0.$$

A.2.b. Si $x < x'$, on a l'inclusion d'événements $\{Y < x\} \subset \{Y < x'\}$ car on a l'implication :

$$\forall y \geq 0, y < x \Rightarrow y < x'$$

Par conjonction, on a aussi l'inclusion d'événements

$$\{X \leq Y\} \cap \{Y < x\} \subset \{X \leq Y\} \cap \left\{Y < x'\right\}$$

Par croissance de $\mathbb{P}$, il vient donc

$$\mathbb{P}(\{X \leq Y\} \cap \{Y < x\}) \leq \mathbb{P}(\{X \leq Y\} \cap \left\{Y < x'\right\})$$

i.e.

$$H(x) \leq H(x').$$

La fonction H est donc une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$. Cette fonction est majorée par 1 (toute probablité est un nombre positif inférieur à 1) et donc, par le théorème de la « limite en croissant », H admet une limite finie en $+\infty$.
A.2.c. Soit le système d'évenements $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \{n \leq Y < n+1\}$. Ce système est

— dénombrable car indexé par $\mathbb{N}$;
— complet car Y étant à valeurs positives, l'évenement « $\exists n \in \mathbb{N}, n \leq Y < n+1$ » est certain ;
— composé d'évenements mutuellement incompatibles car si $n \neq n'$, la conjonction d'événements $n \leq Y < n+1$ et $n' \leq Y < n'+1$ est impossible.

On a par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \{Y < n+1\} \setminus \{Y < n\}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(B_n \cap \{X \leq Y\}) = H(n+1) - H(n)$$

Par l'axiome d'additivité dénombrable satisfait par $\mathbb{P}$, on a

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(B_n \cap \{X \leq Y\})$$

Comme, pour $N \in \mathbb{N}$, par télescopie et $H(0) = 0$,

$$\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(B_n \cap \{X \leq Y\}) = \sum_{n=0}^{N} H(n+1) - H(n) = H(N+1)$$

Il vient que $\lim_{N \to +\infty} H(N+1) = \mathbb{P}(X \leq Y)$. Par unicité de la limite (*i.e.* caractérisation séquentielle), comme $x_N = N+1 \overset{N \to +\infty}{\to} \infty$,

$$\lim_{x \to +\infty} H(x) = \lim_{N \to +\infty} H(N+1) = \mathbb{P}(X \leq Y).$$

A.3. Soit (u, v) un couple de réels positifs tels que $u < v$.
A.3.a. Comme en question A.2.a, on a

$$\{u \leq Y < v\} \cup \{0 \leq Y < u\} = \{0 \leq Y < v\}$$

et cette réunion est disjointe. Par conjonction avec l'événement $\{X < Y\}$, on a donc

$$(\{u \leq Y < v\} \cap \{X < Y\}) \cup (\{0 \leq Y < u\} \cap \{X < Y\}) = \{0 \leq Y < v\} \cap \{X < Y\}$$

En appliquant $\mathbb{P}$ à cette identité d'événements, par additivité de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(\{u \leq Y < v\} \cap \{X < Y\}) + \mathbb{P}(\{0 \leq Y < u\} \cap \{X < Y\}) = \mathbb{P}(\{0 \leq Y < v\} \cap \{X < Y\})$$

i.e.

$$\mathbb{P}(\{u \leq Y < v\} \cap \{X < Y\}) + H(u) = H(v)$$

et donc $H(v) - H(u) = \mathbb{P}(\{X < Y\} \cap \{u \leq Y < v\})$.

On remarque maintenant l'inclusion d'événements

$$\{X \leq u\} \cap \{u \leq Y < v\} \subset \{X \leq Y\} \cap \{u \leq Y < v\} \subset \{X \leq v\} \cap \{u \leq Y < v\}$$

Car pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a les implications

$$(x \leq u) \text{ et } (u \leq y < v) \Rightarrow (x \leq y) \text{ et } (u \leq y < v)$$

et

$$(x \leq y) \text{ et } (u \leq y < v) \Rightarrow (x \leq v) \text{ et } (u \leq y < v)$$

En appliquant la croissance de $\mathbb{P}$ a cette double inclusion, on obtient que

$$\mathbb{P}(\{X \leq u\} \cap \{u \leq Y < v\}) \leq \mathbb{P}(\{X \leq Y\} \cap \{u \leq Y < v\}) \leq \mathbb{P}(\{X \leq v\} \cap \{u \leq Y < v\})$$

et enfin, par indépendance de X et Y, on obtient

$$\mathbb{P}(X \leq u) . \mathbb{P}(u \leq Y < v) \leq \mathbb{P}(\{X \leq Y\} \cap \{u \leq Y < v\}) \leq \mathbb{P}(X \leq v) . \mathbb{P}(u \leq Y < v)$$

On reconnait (et on utilise pour cela le fait que pour une variable aléatoire à densité telle que Y, en notant F_Y sa fonction de répartition, on a $F_Y(v) = \mathbb{P}(Y \leq v) = \mathbb{P}(Y < v)$ et, si $u < v$, $F_Y(v) - F_Y(u) = \mathbb{P}(u \leq Y < v)$) que ceci se réécrit (après division par $v - u > 0$) en :

$$F_X(u) \frac{F_Y(v) - F_Y(u)}{v - u} \leq \frac{H(v) - H(u)}{v - u} \leq F_X(v) \frac{F_Y(v) - F_Y(u)}{v - u}.$$

A.3.b. Soit $x \in [0,+\infty[$. Dans l'inégalité de la question précédente, fixons $u = x$ et laissons v tendre vers $u = x$ par valeurs supérieures. Les termes aux deux extrémités de l'inégalité ont même limite commune $F_X(x).F_Y'(x) = F_X(x).f_Y(x)$. Ceci est vrai car d'une part F_X est continue en x (X est à densité) et donc $F_X(v) \to F_X(x)$ et d'autre part car la densité f_Y de Y est continue sur tout $\mathbb{R}^+$ et en particulier en x (ce qui assure la dérivabilité de F_Y en x et l'identité $F_Y'(x) = f_Y(x)$). On obtient donc, par le théorème des gendarmes que H est dérivable en x à droite (existence de la limite du taux d'accroissement) et que cette dérivée à droite vaut

$$H_d'(x) = F_X(x).f_Y(x)$$

En échangeant les rôles de u et v (on fixe $v = x > 0$ et on laisse u tendre vers $v = x$ par valeurs inférieures), on obtient la dérivabilité à gauche de H en tout $x > 0$ avec

$$H_g'(x) = F_X(x).f_Y(x) = H_d'(x)$$

On vient donc d'obtenir que H est dérivable en tout $x > 0$ (et dérivable à droite en 0) avec

$$\forall v \in [0,+\infty[\,, H'(x) = F_X(x).f_Y(x).$$

A.3.c. La fonction $H' = F_X.f_Y$ est égale sur $[0,+\infty[$ à une fonction qui par hypothèse (et opération de produit) est continue sur cet intervalle. H est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle et, par le théorème fondamental de l'intégration (de l'Analyse ?) pour tout x réel positif,

$$H(x) = \int_0^x F_X(t)f_Y(t)\,dt.$$

A.4. En prenant la limite lorsque $x \to +\infty$, la question A.2.c et la définition de l'intégrale généralisée apparaissant à droite montrent que cette intégrale est convergente et

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \lim_{x\to+\infty} H(x) = \int_0^{+\infty} F_X(t)f_Y(t)\,dt.$$

A.5. Si on admet que la même technique donne aussi que :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_0^{+\infty} F_X(t)f_Y(t)\,dt = \mathbb{P}(X \leq Y). \tag{+}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X \leq Y) - \mathbb{P}(X < Y) = 0.$$

A.6. Application aux lois exponentielles

On suppose que U et V sont deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ, réels strictement positifs.

Soit θ un nombre réel positif ou nul.

A.6.a. Soit F_X la fonction de répartition de la variable aléatoire $X = U - \theta$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(U - \theta \leq x) = \mathbb{P}(U \leq x + \theta)$$

et donc, en reprenant la formule de la fonction de répartition d'une variable exponentielle de paramètre λ,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\theta \\ 1 - e^{-\lambda.(x+\theta)} & \text{si } x \geq -\theta \end{cases}$$

A.6.b. Soit $\theta \geq 0$. Par la formule +, il vient, en remplaçant f_Y par la densité exponentielle (on remarque que si $t \geq 0$ et $\theta \geq 0$ alors $t \geq -\theta$) :

$$\mathbb{P}(U - \theta \leq V) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda.(t+\theta)}).\mu.e^{-\mu.t}\,dt = \int_0^{+\infty} \mu.e^{-\mu.t}\,dt - e^{-\lambda.\theta}.\int_0^{+\infty} .\mu.e^{-(\mu+\lambda).t}\,dt$$

et donc (en reconnaissant par exemple l'intégrale d'une densité $\mathscr{E}(\lambda+\mu)$, $\int_0^{+\infty} e^{-(\mu+\lambda).t}\,dt = \frac{1}{\lambda+\mu}$)

$$\mathbb{P}(U - \theta \leq V) = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}.e^{-\lambda.\theta}. \tag{*}$$

Partie B

Une compétition entre deux groupes

B.1.a. La variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k$ représente la durée mise par le groupe A pour résoudre ses n premiers problèmes, *i.e.* vu l'ordonnancement et le démarrage à $t=0$, l'instant auquel le problème numéro n du groupe A est résolu.
B.1.b. On suppose que, pour une expérience aléatoire menée, $X_1=5, X_2=2, X_3=3, X_4=2, Y_1=2, Y_2=2, Y_3=4, Y_4=2, Y_5=3$. On peut déterminer les instants de résolution des problèmes P_1,..,P_4 et Q_1,...,Q_5 que l'on résume dans le tableau 1.

Pb.	P_1	P_2	P_3	P_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
Instant th.	$\sum_{k=1}^{1} X_k$	$\sum_{k=1}^{2} X_k$	$\sum_{k=1}^{3} X_k$	$\sum_{k=1}^{4} X_k$	$\sum_{k=1}^{1} Y_k$	$\sum_{k=1}^{2} Y_k$	$\sum_{k=1}^{3} Y_k$	$\sum_{k=1}^{4} Y_k$	$\sum_{k=1}^{5} Y_k$
Calcul	5	7	10	12	2	4	8	10	13

TABLE 1 – Instants de résolution de chaque problème.

En classant les colonnes suivant la dernière ligne en croissant, on obtient le tableau 2.

Instant	2	4	5	7	8	10	10	12	13
Pb.	Q_1	Q_2	P_1	P_2	Q_3	P_3	Q_4	P_4	Q_5

TABLE 2 – Instants de résolution de chaque problème, classés.

On en déduit alors les valeurs cherchées des variable U sur cette expérience dans le tableau 3.

BERNOULLI : P : 1 ou Q : 0 ?	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8
Valeur	0	0	1	1	0	1	0	1

TABLE 3 – Qui a résolu le pb. k

On peut noter que l'on ne connait pas l'instant de résolution de P_5, il peut-être entre ceux de P_4 et Q_5 ou supérieur à celui de Q_5. Ces deux cas donnent une valeur différente pour U_9.
B.2. Loi de U_n

Dans cette question, on démontre par récurrence sur $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(U_n = 1) = p$.
B.2.a. Si on comprend le problème modélisé, l'événement $\{U_1 = 1\}$ est l'évenement « le groupe A résout son premier problème avant le groupe B » et, vu les temps de résolution de ces problèmes, il s'agit de l'événement $\{X_1 \leq Y_n\}$.

Grâce à la relation (*) démontrée en question A.6.b pour $\theta = 0$, $\lambda = p$, $\mu = q$, on a :

$$\mathbb{P}(U_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 \leq Y_n) = 1 - \frac{q}{p+q} = 1 - q = p.$$

B.2.b. *Loi conditionnelle, sachant* $\{U_1 = 1\}$, de $Y_1 - X_1$.
B.2.b.i. Soit $x < 0$. Si l'événement $\{U_1 = 1\}$ a lieu, alors forcément $X_1 < Y_1$ et donc, si $x < 0$, $Y_1 - X_1 \leq x$ devient impossible. Cela se traduit en événements par l'égalité

$$\{U_1 = 1\} \cap \{Y_1 - X_1 \leq x\} = \emptyset$$

En en prenant la probabilité,

$$\mathbb{P}(\{U_1 = 1\} \cap \{Y_1 - X_1 \leq x\}) = 0$$

et donc, comme $\mathbb{P}(U_1 = 1) = p > 0$,

$$\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_1 - X_1 \leq x) = \frac{\mathbb{P}(\{U_1 = 1\} \cap \{Y_1 - X_1 \leq x\})}{\mathbb{P}(U_1 = 1)} = 0$$

B.2.b.ii. Soit x un réel positif ou nul. On a l'égalité d'événements :

$$\{U_1 = 1\} \cap \{Y_1 - X_1 \leq x\} = \{X_1 \leq Y_1\} \cap \{Y_1 \leq X_1 + x\} = \{X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x\}$$

et donc

$$\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_1 - X_1 \leq x) = \frac{\mathbb{P}(\{U_1 = 1\} \cap \{Y_1 - X_1 \leq x\})}{\mathbb{P}(U_1 = 1)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x)}{p}.$$

Comme, par (*), (démontrée en question A.6.b, utilisée comme en question B.2.a avec $\theta = x$, $\lambda = q$, $\mu = p$, puis avec $\theta = 0$, $\lambda = q$, $\mu = p$)

$$\mathbb{P}(Y_1 \leq X_1 + x) = 1 - \frac{p}{p+q} e^{-q.x} \text{ et } \mathbb{P}(Y_1 < X_1) = 1 - \frac{p}{p+q} = q$$

et donc ($p + q = 1$)

$$\mathbb{P}(X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x) = \mathbb{P}(Y_1 \leq X_1 + x) - \mathbb{P}(Y_1 < X_1) = 1 - q - p.e^{-q.x} = p.(1 - e^{-q.x})$$

et finalement

$$\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_1 - X_1 \leq x) = \frac{\mathbb{P}(X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x)}{p} = (1 - e^{-q.x})$$

B.2.c. Si on interpréte ce résultat en disant que la *loi conditionnelle, sachant* $\{U_1 = 1\}$, de $Y_1 - X_1$ est une loi exponentielle. Son paramètre est q car la fonction $x \mapsto \mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_1 - X_1 \leq x)$ est, par les formules précédemment démontrées, la fonction de répartition d'une variable exponentielle $\mathscr{E}(q)$.

En échangeant les rôles des groupes A et B (ce qui revient à échanger les variables X_1 et Y_1, p et q et à considérer $U_1' = 1 - U_1$, on obtient que la loi conditionnelle, sachant $\{U_1 = 0\}$ ($= \{U_1' = 1\}$), de $X_1 - Y_1$ est une loi exponentielle $\mathscr{E}(p)$.

B.2.d. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, par B.2.b.i, $\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_1 - X_1 \leq x) = 0$ et donc

$$0 = \mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(\{Y_1 - X_1 \leq x\} \cap \{Y_2 \leq y\})$$

et

$$0 = \mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_1 - X_1 \leq x).\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_2 \leq y)$$

et donc l'égalité cherchée est vraie. Il en est de même pour le cas où $y < 0$ car $\mathbb{P}(\{Y_2 \leq y\}) = 0$.

On peut donc se restreindre au cas où $x, y \geq 0$. Procédons comme en B.2.b.ii.

On a l'égalité d'événements :

$$\{U_1 = 1\} \cap \{Y_1 - X_1 \leq x\} \cap \{Y_2 \leq y\} = \{X_1 \leq Y_1\} \cap \{Y_1 \leq X_1 + x\} = \{X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x\} \cap \{Y_2 \leq y\}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(\{Y_1 - X_1 \leq x\} \cap \{Y_2 \leq y\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{U_1 = 1\} \cap \{Y_1 - X_1 \leq x\} \cap \{Y_2 \leq y\})}{\mathbb{P}(U_1 = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x\} \cap \{Y_2 \leq y\})}{p}. \end{aligned}$$

Par indépendance (pour la probabilité $\mathbb{P}$) des v.a. X_1, Y_1, Y_2, on a donc

$$\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(\{Y_1 - X_1 \leq x\} \cap \{Y_2 \leq y\}) = \frac{\mathbb{P}(X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x}{p}.\mathbb{P}(\{Y_2 \leq y\}).$$

Finalement, comme U_1 et Y_2 sont indépendantes pour la probabilité $\mathbb{P}$, (lemme des coalitions : U_1 ne dépend que de X_1, Y_1 et les v.a. X_1, Y_1, Y_2 sont indépendantes pour la probabilité $\mathbb{P}$), on a $\mathbb{P}(\{Y_2 \leq y\}) = \mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(\{Y_2 \leq y\})$ et donc

$$\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(\{Y_1 - X_1 \leq x\} \cap \{Y_2 \leq y\}) = \mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_1 - X_1 \leq x).\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(\{Y_2 \leq y\}).$$

Comme, par (*), (démontrée en question A.6.b, utilisée comme en question B.2.a avec $\theta = x$, $\lambda = q$, $\mu = p$, puis avec $\theta = 0$, $\lambda = q$, $\mu = p$)

$$\mathbb{P}(Y_1 \leq X_1 + x) = 1 - \frac{p}{p+q} e^{-q.x} \text{ et } \mathbb{P}(Y_1 < X_1) = 1 - \frac{p}{p+q} = q$$

et donc ($p + q = 1$)

$$\mathbb{P}(X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x) = \mathbb{P}(Y_1 \leq X_1 + x) - \mathbb{P}(Y_1 < X_1) = 1 - q - p.e^{-q.x} = p.(1 - e^{-q.x})$$

et finalement

$$\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(Y_1 - X_1 \leq x) = \frac{\mathbb{P}(X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x)}{p} = (1 - e^{-q.x})$$

B.3.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On remarque que le procédé de calcul des variables $U_1, \ldots, U_n$ montre qu'il existe des fonctions (tout à fait déterministes) $f_1, \ldots, f_n$ telles que

$$U_1 = f_1(X_1, Y_1), \ldots, U_n = f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$$

On remarque que, et c'est conséquence du fait que le scénario de calcul des variables $U_1, \ldots, U_n$, à partir de l'instant $t = 0$ permet de calculer les variables $U_2, \ldots, U_{n+1}$ à partir de l'instant où le premier problème a été résolu,

— pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}$, les v.a. $X'_1 = X_2$,..., $X'_n = X_{n+1}$, $Y'_1 = Y_1 - X_1$, $Y'_2 = Y_2$,..,$Y'_n = Y_n$,... ont la même distribution jointe que les v.a. $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ pour la probabilité $\mathbb{P}$, *i.e.* ces variables sont indépendantes et suivent la loi $\mathscr{E}(p)$ pour les X', la loi $\mathscr{E}(q)$ pour les Y'

Sur l'événement $\{U_1 = 1\}$, on a

$$U'_1 = f_1(X'_1, Y'_1) = U_2, \ldots, U'_n = f_n(X'_1, Y'_1, \ldots, X'_n, Y'_n) = U_{n+1}$$

— pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\{U_1=0\}}$, les v.a. $X''_1 = X_1 - Y_1$, $X''_2 = X_2$,..., $X''_n = X_n$, $Y''_1 = Y_2$,..,$Y''_n = Y_{n+1}$,... ont la même distribution jointe que les v.a. $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ pour la probabilité $\mathbb{P}$. Sur l'événement $\{U_1 = 0\}$, on a

$$U''_1 = f_1(X''_1, Y''_1) = U_2, \ldots, U''_n = f_n(X''_1, Y''_1, \ldots, X''_n, Y''_n) = U_{n+1}$$

On en déduit que $\mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(U_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(U_n = 1)$ et que $\mathbb{P}_{\{U_1=0\}}(U_{n+1} = 1)$.

B.3.b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient alors, par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e.i $\{U_1 = 0\}, \{U_1 = 1\}$ que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}_{\{U_1=1\}}(U_{n+1} = 1).\mathbb{P}(U_1 = 1) + \mathbb{P}_{\{U_1=0\}}(U_{n+1} = 1).\mathbb{P}(U_1 = 0) \\ &= \mathbb{P}(U_n = 1).\left(\mathbb{P}(U_1 = 1) + \mathbb{P}(U_1 = 0)\right) \\ &= \mathbb{P}(U_n = 1). \end{aligned}$$

Sachant que $\mathbb{P}(U_1 = 1) = p$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(U_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(U_n = 1)$, on en déduit, par une récurrence évidente, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(U_n = 1) = p.$$

B.4. Si nous admettons, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$, sont mutuellement indépendantes, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ et on a $\mathbb{E}(S_n) = n.p$, $\mathbb{V}(S_n) = n.p(1-p)$.

Partie C
Simulations informatiques

C.1. La fonction de répartition d'une variable aléatoire exponentielle X de paramètre $\lambda > 0$ est la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda.x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Une telle variable X est presque sûrement à valeurs dans $]0, +\infty[$. Pour $u \in]0,1[$, résolvons l'équation $u = F(x)$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$. On a

$$u = F(x) \Leftrightarrow u = 1 - e^{-\lambda.x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda}.\ln(1-u)$$

Si on a disposition une variable aléatoire U, uniforme sur l'intervalle $]0,1[$, la variable aléatoire $X = -\frac{1}{\lambda}.\ln(1-U)$ est exponentielle de paramètre λ.

On peut remarque que $V = 1 - U$ est aussi une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $]0,1[$ et donc la variable aléatoire $X = -\frac{1}{\lambda}.\ln(U)$ est aussi exponentielle de paramètre λ.

Comme `np.random.rand()` retourne une valeur aléatoire tirée suivant la loi uniforme sur $]0,1[$, la fonction Python `Exp(lambada=1)` du script suivant retourne une valeur aléatoire tirée suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda =$ `lambada`.

```
def Exp(lambada=1):
    """
    Retourne une valeur aléatoire suivant une loi Exponentielle
    de paramètre lambada (NB lambda est un mot réservé du langage Python
    """
    return -np.log(np.random.rand())/lambada
```

C.2. Il s'agit de faire des tirages des X et Y suivant les lois exponentielles adhoc puis de placer 0 ou 1 suivant le groupe complétant le problème à l'instant courant.

```
def SuiteU(n,p):
    """
    Retourne un tirage au sort, dans les règles, des v.a U_1,...,U_n
    en une liste (attention au décalage d'indice) U[0] = U_1...
    """
    q = 1 -p
    X = []
    Y = []
    for k in range(n):
        X.append(Exp(lambada = p))
        Y.append(Exp(lambada = q))
    Sx = 0
    Sy = 0
    U = [] #U est la liste vide
    for k in range(n):
            if Sx + X[-1]  < Sy + Y[-1]  :
                Sx = Sx + X.pop()
                U.append(1)
            else :
                Sy = Sy + Y.pop()
                U.append(0)
    return U
```

C.3. La valeur de n se lit sur l'axe des abscisses, comme valeur maximale prise par ces valeurs parce que l'on croit que l'auteur est honnête et à représenté toute la gamme de valeurs possibles et seulement celle-ci. Ici il est probable que $n = 12$. Ensuite $n.p$ est l'espérance de S_n. Sur l'histogramme, l'espérance s'évalue en repérant où est « centré » l'histogramme. Ici, $np = 4$ semble correct et donc $p = 1/3$ est raisonnable. Ce sont les valeurs effectivement utilisées.

Attn, ce genre de raison est au doigt mouillé : en témoigne la figure 4 où l'histogramme superposé au premier est calculé pour $n = 24$ et $p = 1/6$ (et donc $n.p = 4$) mais dont les abscisses ont été tronquées à l'ensemble $\{0,\ldots,12\}$. Les deux graphiques sont difficilement qualitativement distinguables.

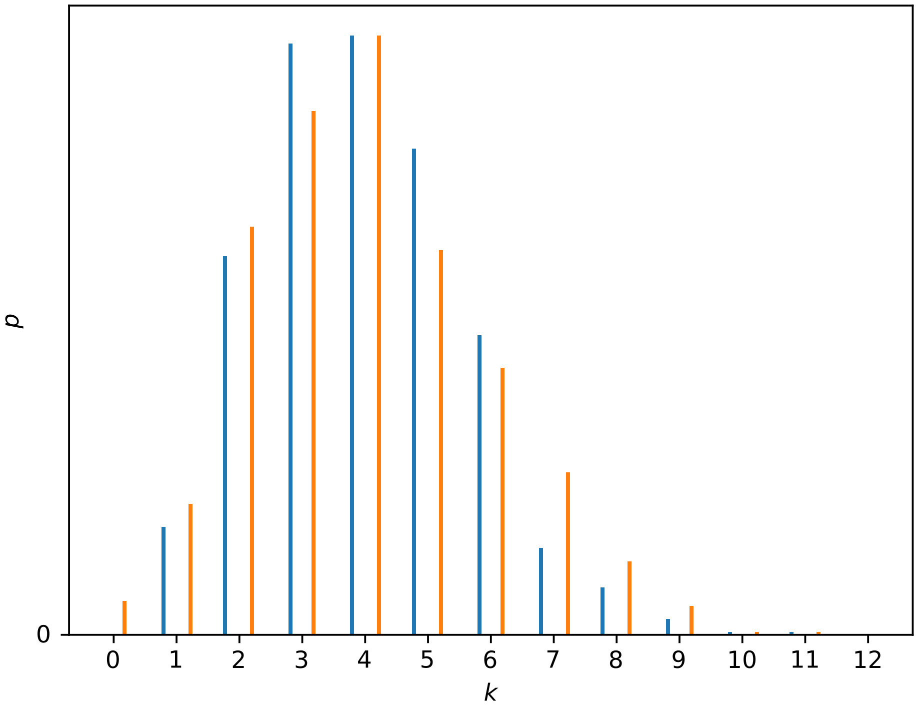

FIGURE 4 – Deux histogrammes : l'un représentant présentant la répartition de 1000 valeurs simulées de S_n pour $n = 24$ et $p = 1/6$ et l'autre idem pour $n = 12$ et $p = 1/3$.