

## Devoir 08

Couples de v.a. discrètes / EDO / Suites récurrentes  
Mercredi 31/01/2024

### Exercice I

Soient  $\lambda \in ]0, +\infty[$ ,  $X$  et  $Y$  deux v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $Z = (X, Y)$ , telles que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Z = (i, j)) = \mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = a \cdot \frac{\lambda^{i+j}(i+j)!}{i!j!}$$

1. A quelle condition sur  $\lambda$  et pour quelle valeur de  $a$  en fonction de  $\lambda$  a-t-on une loi conjointe d'un couple de variables aléatoires ?

Indication: On pourra sommer sur les paquets diagonaux  $A_k = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, i + j = k\}$ .

On suppose dorénavant que ces conditions sur  $\lambda$  et  $a$  sont réalisées.

2. On pose  $W = 2^{X+Y}$ . A quelle condition sur  $\lambda$ ,  $W$  admet-elle une espérance ? Quelle est éventuellement sa valeur ?

3. On donne la formule, généralisation des formules donnant les valeurs des séries géométriques dérivées première et seconde :

$$\forall q \in ]-1, +1[, \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{\ell=k}^{+\infty} \ell \cdot (\ell - 1) \cdot (\ell - k + 1) \cdot q^{\ell-k} = \frac{k!}{(1-q)^{k+1}}$$

*i.e.*

$$\forall q \in ]-1, +1[, \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \cdot q^{\ell-k} = \frac{1}{(1-q)^{k+1}}$$

3.a. Déterminer la loi de  $X$ , celle de  $Y$ . On pourra identifier que  $X + 1$  ( $Y + 1$ ) suit une loi géométrique sur  $\mathbb{N}^*$  dont on précisera le paramètre.

3.b. Donner leurs espérances et leurs variances.

3.c. Les variables  $X$  et  $Y$  sont elles indépendantes ?

3.d. Si non, donner les lois conditionnelles de  $Y$  connaissant la valeur de  $X$ .

4. On pose  $S = X + Y$ .

4.a. Donner la loi de  $S$ .

4.b. Donner les lois conditionnelles de  $X$  sachant la valeur de  $S$ .

# Problème

Ce problème se compose de 3 parties largement indépendantes.

- On appelle vecteur, dans cet énoncé, un élément de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ , on identifie les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  avec les matrices réelles 2 lignes  $\times$  1 colonne. Les produits matriciels sont autant que possible marqué du symbole  $\cdot$ , la notation  $M^\top$  désigne la transposée de la matrice  $M$ .
- La partie B est consacrée à l'informatique. Une annexe en fin de sujet décrit quelques instructions Python.
- Les variables aléatoires de la partie C sont toutes définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Un industriel cherche à optimiser son processus de cuisson des petits pois dans une cuve chauffée. Le cahier des charges demande à ce que les petits pois cuisent 10 minutes à une température comprise entre  $90^\circ\text{C}$  et  $92^\circ\text{C}$ .

L'industriel utilise la puissance de chauffe pour commander les températures.

On suppose que la température des petits pois et la température de l'eau de la cuve sont uniformes et que la cuisson peut donc être modélisée par le système d'équations différentielles  $(E_c)$  suivant :

$$m_1 C_1 \frac{dT_1}{dt} = h_1 S_1 (T_2 - T_1) \quad \text{et} \quad m_2 C_2 \frac{dT_2}{dt} = h_1 S_1 (T_1 - T_2) + h_2 S_2 (T_\infty - T_2) + u \quad (E_c)$$

où

- $t$  désigne le temps, mesuré en secondes (s ou, à condition de changer les unités des autres quantités, en minutes) à partir d'un instant initial  $t_0 = 0$ ,
- $m_1$  et  $m_2$  sont les masses respectives des petits pois et de l'eau dans la cuve (en kg),
- $C_1$  et  $C_2$  sont les capacités thermiques massiques respectives du petit pois et de l'eau (en  $\text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$ ),
- $h_1$  et  $h_2$  sont les coefficients de transfert thermique entre l'eau et les petits pois d'une part, et entre l'eau et l'extérieur d'autre part (en  $\text{W m}^{-2}\text{K}^{-1}$ ),
- $S_1$  et  $S_2$  sont respectivement la surface totale des petits pois et la surface d'échange entre l'eau et l'extérieur (en  $\text{m}^2$ ),
- $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_\infty$  sont les températures respectives des petits pois, de l'eau et de l'extérieur (en K ou  $^\circ\text{C}$ )
- et  $u$  est la puissance de la résistance chauffante utilisée pour chauffer la cuve (en W).

Cette puissance de chauffe  $u$  constitue le moyen d'action de l'industriel sur les températures  $T_1$  et  $T_2$  et est donc appelée la **commande**.

On suppose que toutes ces quantités sont constantes au cours du temps, en dehors des températures  $T_1$  et  $T_2$  (qui sont des fonctions définies, de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ ). En particulier, la température extérieure est constante et vaut  $20^\circ\text{C}$ .

On note  $x_1 = T_1 - T_\infty$  et  $x_2 = T_2 - T_\infty$ .

## Partie A

### Modélisation et commande du processus

**A.1.** Établir les équations différentielles vérifiées par  $x_1$  et  $x_2$  et les écrire sous la forme :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, u) \quad \text{et} \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, u).$$

On explicitera  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ ,  $b$  un vecteur tels que, en posant  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}$ , on ait :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + u \cdot b, \quad (E'_c)$$

**Dans la suite, pour les applications numériques, en supposant le temps  $t$  mesuré en minutes, en ayant ajusté correctement les unités, on prendra :**

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

**A.2.** On suppose qu'il existe deux réels  $a$  et  $c$  tels que  $A \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + u.b = 0$ .

**A.2.a.** Montrer qu'alors  $a = c$ .

**A.2.b.** Interpréter.

**A.2.c.** Calculer la valeur de  $u$  si on considère que  $a = 72$  et  $c = 72$ .

**A.3.** Vérifier que  $A = P.D.P^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ .

**A.4.** Soit  $x$  une solution de  $(E'_c)$ . On définit

$$z = P^{-1}.x, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z \text{ et } \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \end{pmatrix}.$$

**A.4.a.** Montrer que  $\frac{dz}{dt} = P^{-1} \cdot \frac{dx}{dt}$ .

**A.4.b.** En déduire que  $\frac{dz}{dt} = D.z + u.\beta$ , où  $\beta$  est un vecteur à expliciter.

**A.4.c.** On suppose que  $T_1(0) = 20^\circ\text{C}$  et  $T_2(0) = 92^\circ\text{C}$ . Calculer  $z(0)$ .

**A.4.d.** Expliciter  $z$  en supposant que  $u = 16$ .

**A.4.e.** En utilisant la relation  $x = P.z$ , montrer que pour tout réel positif  $t$ , on a :

$$\begin{cases} x_1(t) &= 72 - 40e^{-t} - 32e^{-10t} \\ x_2(t) &= 72 - 32e^{-t} + 32e^{-10t} \end{cases}.$$

**A.5.a.** Étudier sur  $\mathbb{R}_+$  la fonction  $x_2$  définie à la question A.4.e. Tracer sa courbe représentative.

*On fera figurer sur le graphique les éléments importants : tangentes aux points significatifs, asymptotes...*

**A.5.b.** Donner une interprétation du comportement de la fonction  $x_2$ .

**A.5.c.** On définit  $t_R = \min \{t \geq 0 ; \forall t' \geq t, T_2(t') \geq 90^\circ\text{C}\}$ .

Que représente cet instant  $t_R$ ? Le placer sur la courbe représentative de  $x_2$ . On rappelle que  $x_2 = T_2 - T_\infty$ .

**A.5.d.** Montrer que  $\ln(16)$  minutes est une bonne approximation de  $t_R$ .

## Partie B

### Étude informatique des commandes

Cette partie consiste à mettre en place des programmes informatiques en lien avec la partie A.

Les programmes sont à rédiger en langage Python. On considère que le module numpy est importé via `import numpy as np`.

Avant chaque fonction ou algorithme écrit, on écrira brièvement le raisonnement suivi et la formule qu'il est censé calculer.

### Recherche du minimum d'une fonction

Soit  $f : t \mapsto 72 - 32e^{-t} + 32e^{-10t}$ .

**B.1.** Écrire une fonction Python d'en-tête `f(t)` prenant en entrée  $t$  (un réel) et qui renvoie la valeur de  $f(t)$ .

**B.2.** On définit la fonction Python d'en-tête `minimum_f(N)` prenant en entrée  $N$  (un entier) par le code (incomplet) suivant :

```
def minimum_f(N):
    Lt1 = np.linspace(0, 5, N)
    Ly1 = []
    for k in range(0, N):
        Ly1.append(f(Lt1[k]))
    ...
    ...
    return ...
```

Décrire en quelques mots ce que contiennent les variables `Lt1` et `Ly1` à l'issue de la boucle `for`.

**B.3.** Compléter sur la copie (avec autant de lignes que nécessaire) la fonction `minimum_f` pour qu'elle renvoie une liste composée des deux éléments suivants :

- une valeur approchée  $m$  du minimum de  $f$  sur  $[0, 5]$  ;
- le temps  $t_m$  en lequel cette valeur approchée est atteinte (c'est-à-dire  $m = f(t_m)$ ).

*On veillera à n'écrire qu'une seule boucle après la boucle `for` déjà présente et à ne pas utiliser la commande `min`.*

**B.4.** On teste la fonction `minimum_f` sur différentes valeurs de  $N$ . Voici les résultats obtenus (tronqués à 4 chiffres après la virgule) :

- pour  $N_1 = 20$ , la fonction donne  $m_1 = 49.7070$  et  $t_{m_1} = 0.2631$  ;
- pour  $N_2 = 20\,000$ , la fonction donne  $m_2 = 49.7012$  et  $t_{m_2} = 0.2557$ .

Il y a une différence entre  $t_{m_1}$  et  $t_{m_2}$ .

**B.4.a.** Cette différence était-elle prévisible et à quoi est-elle due ?

**B.4.b.** Est-ce  $t_{m_1}$  ou  $t_{m_2}$  qui devrait être le plus proche de la valeur exacte cherchée ?

### Recherche du point d'annulation d'une fonction : Méthode de NEWTON.

Pour une fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  donnée, avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on s'intéresse à la résolution approchée de l'équation  $F(x) = 0$ . On suppose que  $F$  s'annule en un point appelé  $x^* \in I$  et que  $F$  soit suffisamment régulière pour que les calculs suivants soient bien définis. L'objectif est d'obtenir une valeur approchée de  $x^*$ .

On utilise la méthode de NEWTON, qui consiste à définir la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$u_0 \text{ à choisir et } u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

On admet que, sous des hypothèses non précisées ici, cette suite converge vers  $x^*$  et que, s'il y a deux solutions à l'équation  $F(x) = 0$ , alors selon le choix de  $u_0$  la suite va converger vers une solution ou vers l'autre.

**B.5.** Soit  $e > 0$ . À l'aide d'une boucle `while`, écrire une fonction d'en-tête `Newt(F, G, u0, e)` qui calcule les termes de la suite en s'arrêtant au premier terme  $u_{n_0}$  vérifiant  $|F(u_{n_0})| < e$  (en supposant qu'un tel  $n_0$  existe). Les arguments d'entrée sont :  $F$  une fonction,  $G$  une fonction qui correspond à  $F'$ ,  $u_0$  le premier terme de la suite et  $e$ . La fonction doit renvoyer  $u_{n_0}$ .

**B.6.** Par rapport à l'objectif de résoudre de façon approchée l'équation  $F(x) = 0$ , expliquer à quoi correspond la quantité  $e$  utilisée dans l'écriture de `Newt`. Parmi les choix suivants pour  $e$ , indiquer (avec justification succincte) celui qui semble le plus pertinent pour obtenir la meilleure précision sur la valeur approchée :  $e_1 = 100$ ,  $e_2 = 1$ ,  $e_3 = 10^{-8}$ .

**B.7.** Toujours par rapport à l'objectif de résoudre de façon approchée l'équation  $F(x) = 0$ , justifier s'il est pertinent ou pas d'effectuer la modification suivante sur la fonction `Newt` : renvoyer le premier terme  $u_n$  vérifiant  $F(u_n) = 0$ .

**B.8.** À la question B.5 de cette partie, on a supposé l'existence d'un  $n_0$  vérifiant  $|F(u_{n_0})| < e$ . Que se passe-t-il dans la fonction `Newt` si un tel  $n_0$  n'existe pas ?

**B.9.** On souhaite modifier la fonction `Newt` de manière à fixer un nombre maximal d'itérations pour la boucle `while`. Écrire une nouvelle fonction d'en-tête `NewtS(F, G, u0, e, n_der)`, basée sur la fonction `Newt`, telle que :

- s'il existe un terme  $u_{n_0}$  tel que  $|F(u_{n_0})| < e$  avec  $n_0 \leq n_{\text{der}}$ , la fonction renvoie  $u_{n_0}$  ;
- si le nombre d'itérations dépasse (strictement) la valeur  $n_{\text{der}}$ , la boucle est stoppée et la fonction renvoie le booléen `False`.

**B.10.** Expliquer comment la méthode de NEWTON peut être utilisée pour trouver une valeur approchée du temps  $t_R$  défini à la question A.5.c de la partie A.

**B.11.** On définit les fonctions Python suivantes (la fonction `f` a été définie à la question B.1) :

```
def F1(t):
    return f(t) - 70
def G1(t):
    return 32*np.exp(-t) - 320*np.exp(-10*t)
```

puis on exécute pour  $e = 10^{-14}$  et  $nder = 9$  les deux appels suivants :

- `NewtS(F1, G1, 2, e, nder)` qui renvoie 2.7725887222252261 ;
- `NewtS(F1, G1, 0.1, e, nder)` qui renvoie 0.0072246696343453579.

Interpréter ces résultats en lien avec la partie A.

## Partie C

### Filtre de KALMAN

#### Cette partie est indépendante des parties A et B.

Pour des raisons de qualité, le cahier des charges de l'industriel impose que la température des petits pois ne dépasse pas une certaine valeur seuil.

Dans la mesure où la température des petits pois n'est pas mesurée et que la température de l'eau n'est mesurée que chaque seconde, on propose dans cette partie de concevoir un système, appelé *Filtre de KALMAN*, capable de reconstituer dynamiquement la température des petits pois à l'aide des mesures de la température de l'eau.

Pour cela, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on note  $x_i \in \mathbb{R}^2$  l'état de la cuisson (non observé),  $y_i \in \mathbb{R}$  la température de l'eau (mesurée) et  $u_i \in \mathbb{R}$  la commande (connue), à l'instant  $i$ .

On modélise l'évolution de la cuisson à l'aide d'un processus défini par, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} x_{i+1} &= F.x_i + u_i.g \\ y_i &= h^\top .x_i + \varepsilon_i \end{cases}, \quad (E_d)$$

où les éléments  $F \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ ,  $g, h \in \mathbb{R}^2$  sont donnés (avec  $h^\top$  désignant la transposée de  $h$ ) et les  $\varepsilon_i$  sont des variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  représentant le bruit de mesure, avec  $\sigma^2 > 0$ .

On convient de noter  $\mathcal{N}(m, 0)$  la loi d'une variable aléatoire réelle constante égale à  $m$ . Autrement dit, on considère qu'une variable constante est Gaussienne de variance nulle.

L'objectif de cette partie est de construire une suite  $(\hat{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'estimations des quantités  $x_i \in \mathbb{R}^2$ , à partir des mesures bruitées  $y_j \in \mathbb{R}$ , avec  $j \leq i$ .

#### Calculs préliminaires.

**C.1.a.** Soit  $X$  un v.a. réelle de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  où  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 \in [0, +\infty[$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Quelle est la loi de  $X' = a.X + b$ ? On distinguera les cas de v.a. constantes des autres cas.

**C.1.b.** Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. indépendantes de lois respectives  $\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$  et  $\mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Donner la loi de  $Z = a.X + b.Y$ .

#### Un cas simple

On suppose, dans cette partie uniquement, que  $F = I_2$ ,  $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  est l'état initial de la cuisson.

**C.2.** Que vaut la suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dans ce cas particulier? En notant, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ , montrer que  $\bar{y}_n$  suit une loi  $\mathcal{N}\left(h^\top .x_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ .

**C.3.** Montrer que, pour tout  $\delta > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\bar{y}_n - h^\top .x_0| > \delta) = 0$ .

\*\*\*

## Vecteurs gaussiens

Soit  $x$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . On dira que  $x$  est un *vecteur gaussien* de moyenne  $\mu \in \mathbb{R}^2$  et de matrice de covariance  $\Sigma \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$  si

- $\Sigma$  est symétrique et pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ , on a  $v^\top \cdot \Sigma \cdot v \geq 0$ , et
- pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v^\top \cdot x$  suit une loi  $\mathcal{N}(v^\top \cdot \mu, v^\top \cdot \Sigma \cdot v)$ .

**C.4.** Soient  $\eta_1, \eta_2$  deux v.a. indépendantes de loi commune  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Montrer que  $x = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$  est un vecteur gaussien dont on donnera moyenne et matrice de covariance.

\*\*\*

Soit  $x$  un vecteur gaussien de moyenne  $\mu$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ .

**C.5.** Montrer que pour tout vecteur  $w \in \mathbb{R}^2$ ,  $x + w$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\mu + w$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ .

**C.6.** Montrer que pour tout vecteur  $w \in \mathbb{R}^2$ , si  $z$  est une variable aléatoire suivant une loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ,  $z \cdot w$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et de matrice de covariance  $\sigma^2 w \cdot w^\top$ .

**C.7.** Montrer que pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ ,  $M \cdot x$  est un vecteur gaussien de moyenne  $M \cdot \mu$  et de matrice de covariance  $M \cdot \Sigma \cdot M^\top$ .

## Construction de l'estimation $\hat{x}_i$

On suppose que  $x_0$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\mu_0$  et de matrice de covariance  $\Sigma_0$ , indépendant des bruits  $\varepsilon_i$ , pour  $i \in \mathbb{N}$ . On souhaite construire récursivement notre estimation sous la forme  $\hat{x}_0 = \mu_0$  et

$$\hat{x}_{i+1} = p_{i+1} + \left( y_{i+1} - h^\top \cdot p_{i+1} \right) \cdot k_{i+1},$$

où  $p_{i+1} = F \cdot \hat{x}_i + u_i \cdot g$  et  $k_{i+1} \in \mathbb{R}^2$  est un vecteur, indépendant des mesures, que l'on souhaite déterminer.

**C.8.** Montrer que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $x_i$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\mu_i = F^i \cdot \mu_0 + \sum_{j=0}^{i-1} u_{i-1-j} \cdot F^j \cdot g$  et de matrice de covariance  $\Sigma_i = F^i \cdot \Sigma_0 \cdot (F^\top)^i$ .

**C.9.** Montrer que  $x_0 - \hat{x}_0$  est un vecteur gaussien dont on donnera la moyenne et la matrice de covariance.

**C.10.** Montrer que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $x_{i+1} - \hat{x}_{i+1} = (I_2 - k_{i+1} \cdot h^\top) \cdot F \cdot (x_i - \hat{x}_i) - \varepsilon_{i+1} \cdot k_{i+1}$ .

On admettra par la suite que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $x_i - \hat{x}_i$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et de matrice de covariance  $Q_i$  vérifiant la relation de récurrence

$$Q_{i+1} = \left( I_2 - k_{i+1} \cdot h^\top \right) \cdot F \cdot Q_i \cdot F^\top \cdot \left( I_2 - k_{i+1} \cdot h^\top \right)^\top + \sigma^2 k_{i+1} \cdot k_{i+1}^\top.$$

**C.11.** Montrer que l'on peut écrire

$$Q_{i+1} = \alpha_i \left( k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F \cdot Q_i \cdot F^\top \cdot h \right) \cdot \left( k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F \cdot Q_i \cdot F^\top \cdot h \right)^\top + F \cdot Q_i \cdot F^\top - \frac{1}{\alpha_i} F \cdot Q_i \cdot F^\top \cdot h \cdot h^\top \cdot F \cdot Q_i \cdot F^\top,$$

où  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  est à expliciter.

**C.12.** Montrer que  $\alpha_i > 0$ .

**C.13.** Donner la valeur de  $k_{i+1}$  telle que, pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v^\top \cdot Q_{i+1} \cdot v$  est minimal.

## Convergence du Filtre de KALMAN

Le but de cette partie est de montrer que la suite d'estimations  $(\hat{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge. On suppose que, dans le processus  $(E_d)$ , la matrice  $F$  est inversible, diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  et de valeurs propres complexes de module strictement plus petit que 1. De plus, on prend  $k_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i} F \cdot Q_i \cdot F^\top \cdot h$ , où  $\alpha_i$  a été introduit à la question C.11.

**C.14.** Montrer que  $F^\top$  est aussi inversible, diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  et de valeurs propres complexes de module strictement plus petit que 1.

**C.15.** On définit, pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $R_i = F^{-i} \cdot Q_i \cdot (F^\top)^{-i}$ , où  $F^{-i} = (F^{-1})^i$ . Montrer que pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}$

$$R_{i+1} = R_i - \frac{F^{-i} \cdot Q_i \cdot F^\top \cdot h \cdot h^\top \cdot F \cdot Q_i \cdot (F^\top)^{-i}}{h^\top \cdot F \cdot Q_i \cdot F^\top \cdot h + \sigma^2}.$$

**C.16.a.** Montrer que, pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ , la suite  $(v^\top \cdot R_i \cdot v)_{i \in \mathbb{N}}$  est bornée.

**C.16.b.** En déduire que, pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$  et tout  $w \in \mathbb{R}^2$ , la suite  $(v^\top \cdot R_i \cdot w)_{i \in \mathbb{N}}$  est bornée.

**C.17.a.** Montrer que, si  $v_1$  et  $v_2$  sont des vecteurs propres de  $F^\top$  associés aux valeurs propres complexes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , alors, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $v_1^\top \cdot Q_i \cdot v_2 = (\lambda_1 \lambda_2)^i \cdot v_1^\top \cdot R_i \cdot v_2$ .

**C.17.b.** Conclure que pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lim_{i \rightarrow +\infty} v^\top \cdot Q_i \cdot v = 0$ .

**C.18.** Que peut-on dire du comportement asymptotique de  $x_i - \hat{x}_i$  ?

## Correction DM 08

**Correction Ex.-1** Soient  $\lambda \in ]0, +\infty[$ ,  $X$  et  $Y$  deux v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $Z = (X, Y)$ , telles que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Z = (i, j)) = \mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = a \cdot \frac{\lambda^{i+j}(i+j)!}{i!j!}$$

1. Posons  $\tilde{r}_{ij} = \frac{\lambda^{i+j}(i+j)!}{i!j!}$ .

On a, que ces sommes à termes positifs soient finies ou pas,

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \tilde{r}_{ij} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{r}_{ij} \\ \text{[paquets } A_k = \{(i, j), i+j = k\}] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^k k!}{i!(k-i)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \underbrace{\sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!}}_{=2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (2\lambda)^k \end{aligned}$$

La dernière valeur est celle de la somme d'une suite géométrique de raison  $2\lambda$ . On en déduit que

1. On a affaire à une loi conjointe d'un couple de variables aléatoires si et seulement si  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ .
2. et dans ce cas, pour avoir

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, r_{ij} = a \cdot \tilde{r}_{ij} \geq 0 \text{ et } \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} r_{ij} = 1$$

*i.e.* pour que l'on ait une loi de couple de v.a. à valeurs  $\mathbb{N}^2$ , il faut et il suffit que  $a = (1 - 2\lambda)$ .

2. On pose  $W = 2^{X+Y}$ . On a, que ces sommes à termes positifs soient finies ou pas,

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} 2^{i+j} r_{ij} &= (1 - 2\lambda) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \cdot \lambda^k \underbrace{\sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!}}_{=2^k} \\ &= (1 - 2\lambda) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (4\lambda)^k \end{aligned}$$

Cette dernière somme est finie (et donc  $W$  admet une espérance) si et seulement si  $\lambda < \frac{1}{4}$  et en ce cas, on a donc

$$\mathbb{E}(W) = \frac{(1 - 2\lambda)}{(1 - 4\lambda)}$$

**3.a.** On a, pour calculer la loi de  $X$  (à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ), que pour  $i \in \mathbb{N}$ , (On a utilisé la formule des probabilités totales avec le s.c.e.i dénombrable ( $Y = j$ ),  $j \in \mathbb{N}$ )

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j) \\ &= (1 - 2\lambda) \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^{i+j} \binom{i+j}{i} \\ \text{[Chgt d'indice } \ell = i + j] &= (1 - 2\lambda) \cdot \sum_{\ell=i}^{+\infty} \lambda^{\ell} \binom{\ell}{i} \\ &= (1 - 2\lambda) \cdot \lambda^i \sum_{\ell=i}^{+\infty} \lambda^{\ell-i} \binom{\ell}{i} \\ \text{[form. donnée avec } k = i] &= (1 - 2\lambda) \cdot \frac{\lambda^i}{(1 - \lambda)^{i+1}} \\ &= \frac{1 - 2\lambda}{1 - \lambda} \cdot \left( \frac{\lambda}{1 - \lambda} \right)^i \end{aligned}$$

et donc  $X + 1$  suit une loi géométrique sur  $\mathbb{N}^*$  de paramètre  $p = \frac{1-2\lambda}{1-\lambda}$  et  $1 - p = q = \frac{\lambda}{1-\lambda}$

Par symétrie entre  $X$  et  $Y$ ,  $Y$  suit la même loi que  $X$ .

**3.b.** On a

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X + 1) - 1 = \frac{1 - \lambda}{1 - 2\lambda} - 1 = \frac{\lambda}{1 - 2\lambda}$$

et

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X + 1) = \frac{q}{p^2} = \frac{\lambda \cdot (1 - \lambda)}{(1 - 2\lambda)^2}$$

**3.c.** Il est clair qu'en choisissant bien les valeurs de  $i$  et  $j$ , on a, pour un certain couple  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$r_{ij} \neq \left( \frac{1 - 2\lambda}{1 - \lambda} \right)^2 \cdot \left( \frac{\lambda}{1 - \lambda} \right)^{i+j}$$

Les variables  $X$  et  $Y$  ne sont donc pas indépendantes.

**3.d.** Soit  $i \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1 - 2\lambda}{1 - \lambda} \cdot \left( \frac{\lambda}{1 - \lambda} \right)^i$$

et donc, pour  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = j | X = i) &= \frac{\mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j)}{\mathbb{P}(X = i)} = (1 - 2\lambda) \cdot \binom{i+j}{j} \cdot \lambda^{i+j} \cdot \frac{1}{\frac{1-2\lambda}{1-\lambda} \cdot \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^i} \\ &= (1 - \lambda) \cdot (1 - \lambda)^i \cdot \binom{j+i}{j} \lambda^j \end{aligned}$$

4. On pose  $S = X + Y$ . 4.a. La v.a.  $S$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et, pour  $s \in \mathbb{N}$ , en utilisant le s.c.e.i dénombrable ( $Y = j$ ),  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = s) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = s \text{ et } Y = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X + Y = s \text{ et } Y = j) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = s - j \text{ et } Y = j) \\ [X = s - j \text{ impossible si } j > s] &= \sum_{j=0}^s \mathbb{P}(X = s - j \text{ et } Y = j) \\ \text{[loi du couple]} &= (1 - 2\lambda) \sum_{j=0}^s \frac{s!}{j!(s-j)!} \lambda^s \\ &= (1 - 2\lambda)(2\lambda)^s \end{aligned}$$

Donc  $S + 1$  est un v.a. géométrique à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , de paramètre  $p = 1 - 2\lambda$ .

4.b. Soit  $s \in \mathbb{N}$ , on a, pour  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i | S = s) &= \frac{\mathbb{P}(X = i \text{ et } S = s)}{\mathbb{P}(S = s)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = s - i)}{\mathbb{P}(S = s)} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i > s \\ \frac{\binom{s}{i} \lambda^s}{(2\lambda)^s} = \frac{\binom{s}{i}}{2^s} & \text{si } i \leq s \end{cases} \end{aligned}$$

Sachant  $S = s$ , la loi conditionnelle de  $X$  est donc la loi Binomiale  $\mathcal{B}(s, \frac{1}{2})$ .

**Correction Ex.-2**

### Partie A

Modélisation et commande du processus

A.1. On sait que :

$$\begin{cases} m_1 C_1 \frac{dT_1}{dt} = h_1 S_1 (T_2 - T_1) \\ m_2 C_2 \frac{dT_2}{dt} = h_1 S_1 (T_1 - T_2) + h_2 S_2 (T_\infty - T_2) + u \end{cases} \quad (E)$$

On en déduit en utilisant (E) que :

$$\begin{aligned} m_1 C_1 \frac{dx_1}{dt} &= m_1 C_1 \frac{dT_1}{dt} \\ &= h_1 S_1 (T_2 - T_1) \\ &= h_1 S_1 (T_2 - T_\infty + T_\infty - T_1) \\ &= h_1 S_1 (x_2 - x_1). \end{aligned}$$

De-même, nous obtenons pour  $x_2$  :

$$\begin{aligned} m_2 C_2 \frac{dx_2}{dt} &= m_2 C_2 \frac{dT_2}{dt} \\ &= h_1 S_1 (T_1 - T_2) - h_2 S_2 x_2 + u \\ &= h_1 S_1 (x_1 - x_2) - h_2 S_2 x_2 + u. \end{aligned}$$

En résumé, nous avons bien obtenu :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, u) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

en posant  $f_1(x_1, x_2, u) = \frac{h_1 S_1}{m_1 C_1} (x_2 - x_1)$  et  $f_2(x_1, x_2, u) = \frac{h_1 S_1}{m_2 C_2} (x_1 - x_2) - \frac{h_2 S_2}{m_2 C_2} x_2 + \frac{1}{m_2 C_2} u$ .

Posons  $A = \begin{pmatrix} -\frac{h_1 S_1}{m_1 C_1} & \frac{h_1 S_1}{m_1 C_1} \\ \frac{h_1 S_1}{m_2 C_2} & -\frac{h_1 S_1 + h_2 S_2}{m_2 C_2} \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2 C_2} \end{pmatrix}$ , par définition du produit matriciel, on a alors :

$$\begin{aligned} A.x + u.b &= \begin{pmatrix} -\frac{h_1 S_1}{m_1 C_1} & \frac{h_1 S_1}{m_1 C_1} \\ \frac{h_1 S_1}{m_2 C_2} & -\frac{h_1 S_1 + h_2 S_2}{m_2 C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2 C_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{h_1 S_1}{m_1 C_1} (x_2 - x_1) \\ \frac{h_1 S_1}{m_2 C_2} (x_1 - x_2) - \frac{h_2 S_2}{m_2 C_2} x_2 + \frac{1}{m_2 C_2} u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a bien :  $\frac{dx}{dt} = Ax + bu$  avec  $A = \begin{pmatrix} -\frac{h_1 S_1}{m_1 C_1} & \frac{h_1 S_1}{m_1 C_1} \\ \frac{h_1 S_1}{m_2 C_2} & -\frac{h_1 S_1 + h_2 S_2}{m_2 C_2} \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2 C_2} \end{pmatrix}$ .

**A.2.a.** Si  $A \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + u.b = 0$  alors  $\begin{cases} -5a + 5c + 0 = 0 \\ 4a - 6c + 9u = 0 \end{cases}$  et donc  $\begin{cases} a = c, \\ 2a = 9u \end{cases}$  et en particulier :  $a = c$ .

**A.2.b.** Soit  $t_0$  un réel positif. Si  $x'_1(t_0) = 0$  et  $x'_2(t_0) = 0$  alors d'après la question A.1, on a :

$$A \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} + u.b = 0$$

et donc  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  d'après la question précédente. On peut interpréter en disant que les temps d'annulation des dérivées de  $x_1$  et de  $x_2$  ne peuvent être que des temps où la température de l'eau est égale à celle des petits pois.

**A.2.c.** Supposons que  $a = 72$  et  $b = 72$ . D'après les calculs de A.2.a, on a :  $u = \frac{2}{9}a$  ce qui donne :  $u = 16$ .

**A.3.** On constate que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \times \frac{5}{9} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} + 1 & -1 + 1 \\ -\frac{4}{5} + \frac{4}{5} & 1 + \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme de plus,  $P$  est carrée, on sait que cela suffit pour établir que  $P$  est inversible et que :

$$P^{-1} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{5}{9} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 10 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \times \frac{5}{9} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{5}{9} \begin{pmatrix} -8 - 1 & 10 - 1 \\ 8 - \frac{4}{5} & -10 - \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

On a bien :  $A = P.D.P^{-1}$  avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ .

**A.4.a.** Comme  $z = P^{-1}.x$ , on en déduit :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

donc, d'après les règles d'opérations sur les dérivées des fonctions à valeurs réelles,  $z_1$  et  $z_2$  sont dérivables et nous avons :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x'_1 - x'_2 \\ x'_1 + x'_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

On a donc bien :  $\frac{dz}{dt} = P^{-1} \frac{dx}{dt}$ .

**A.4.b.** D'après la première question et la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= P^{-1} \cdot (A.x + u.b) \\ &= P^{-1} \cdot (P.D.P^{-1}x + u.b) \text{ d'après la question A.3} \\ &= DP^{-1}x + u.P^{-1}b \\ &= Dz + u.\beta \text{ par définition de } z \text{ et en posant } \beta = P^{-1}.b \end{aligned}$$

On a donc :  $\frac{dz}{dt} = Dz + u.\beta$  avec  $\beta = P^{-1}b$ .

**A.4.c.** On a alors  $x_1(0) = 0$  et  $x_2(0) = 72$  et donc :

$$z(0) = P^{-1}.x(0) = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \end{pmatrix} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} -72 \\ 72 \end{pmatrix} = 40 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :  $z(0) = 40 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**A.4.d.** Calculons pour commencer  $\beta$  :

$$\beta = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'équation de A.4.b donne alors :

$$\begin{cases} z'_1(t) &= -10z_1(t) - 5 \times 16, \\ z'_2(t) &= -z_2(t) + 5 \times 16 \end{cases}$$

pour tout réel positif  $t$ . La fonction  $z_1$  est donc une solution de  $(E_1)$ ,

l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  (fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$y' + 10y = -80. \tag{E_1}$$

L'équation  $(E_1)$  est une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficient constant, d'après le cours, on peut affirmer que, pour toute fonction  $y$  dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , on a :

$$y \text{ solution de } (E_1) \Leftrightarrow \text{Il existe un réel } C \text{ tel que : } y : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto C \exp(-10t) - 8 \end{cases}$$

On fait le même travail pour  $z_2$ . Finalement, il existe deux constantes  $K$  et  $K'$  telles que, pour tout réel positif  $t$  :

$$z_1(t) = K \exp(-10t) - 8 \text{ et } z_2(t) = K' \exp(-t) + 80.$$

En tenant compte des conditions initiales  $z_1(0) = -40, z_2(0) = 40$ , on obtient  $K - 8 = -40$  et  $K' + 80 = 40$  d'où finalement :

Pour tout réel positif  $t$ ,  $z_1(t) = -32 \exp(-10t) - 8$  et  $z_2(t) = -40 \exp(-t) + 8$ .

**A.4.e.** La relation  $x = P.z$  donne  $\begin{cases} x_1(t) = z_1(t) + z_2(t) \\ x_2(t) = -z_1(t) + \frac{4}{5}z_2(t) \end{cases}$ , puis d'après la question précédente, les égalités suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \begin{cases} x_1(t) = 72 - 40e^{-t} - 32e^{-10t} \\ x_2(t) = 72 - 32e^{-t} + 32e^{-10t} \end{cases}$$

**A.5.a.** Soit  $t$  un réel positif. Alors la fonction  $x_2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  en tant que somme de telles fonctions et :

$$x_2'(t) = 32 \exp(-t) - 320 \exp(-10t).$$

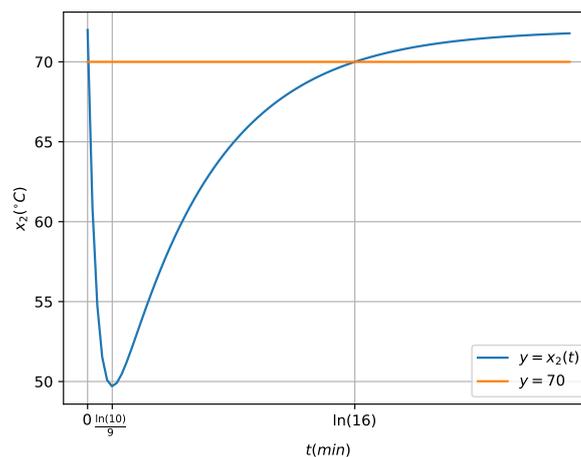
Dès lors, nous avons :

$$\begin{aligned} x_2'(t) \geq 0 &\iff 32 \exp(-t) \geq 320 \exp(-10t) \\ &\iff \exp(-t) \geq 10 \exp(-10t) \\ &\iff -t \geq \ln(10) - 10t \text{ par stricte croissance de exp} \\ &\iff 9t \geq \ln(10) \\ &\iff t \geq \frac{\ln(10)}{9} \end{aligned}$$

On déduit alors le tableau de variations ci-dessous, puis la courbe représentative de la fonction :

$t$	0	$\frac{\ln(10)}{9}$	$+\infty$
Variation de $x_2$	72	$\searrow$	$\nearrow$
		$\alpha$	72

avec  $\alpha = x_2\left(\frac{\ln(10)}{9}\right)$ . Voici le graphique attendu :



**A.5.b.** Le processus commence avec une eau très chaude ( $92^\circ\text{C}$ ), on démarre ensuite la chauffe qui au début ne parvient pas à compenser la chute de température due à la déperdition d'énergie. Dans un troisième temps, la température de l'eau augmente, conséquence du démarrage de la chauffe.

**A.5.c.** L'instant  $t_R$  est donc, par définition, le plus petit instant à partir duquel la courbe de  $x_2$  reste au-dessus de la droite d'équation  $x = 70$ . Ainsi, après cet instant, la courbe de chauffe  $x_2$  respecte le cahier des charges imposé par l'industriel. Sur notre courbe,  $t_R$  semble valoir à peu près 3.

**A.5.d.** Nous avons :

$$\begin{aligned}x_2(\ln(16)) &= 72 - \frac{32}{16} + \frac{32}{16^{10}} \\ &= 70 + \frac{32}{16^{10}} \\ &\approx 70\end{aligned}$$

Comme  $T_2 = x_2 + 20$ , on en déduit :  $\ln(16) \simeq 2.8$  est une bonne approximation de  $t_R$ .

## Partie B

### Étude informatique des commandes

#### Recherche du minimum d'une fonction

Soit  $f : t \mapsto 72 - 32e^{-t} + 32e^{-10t}$ .

##### B.1.

```
def f(t):  
    return 72 - 32*np.exp(-t) + 32*np.exp(-10*t)
```

**B.2.** Après la 2ème ligne, la variable `Lt1` contient les éléments d'une subdivision régulière en  $N$  points de l'intervalle  $[0, 5]$ , i.e. une liste composée des points  $\frac{5k}{N-1}$  avec  $k$  qui décrit  $\{0, \dots, N-1\}$ . A l'issue de la boucle suivante, la variable `Ly1` contient les images par  $f$  de cette subdivision, donc une liste composée de  $f\left(\frac{5k}{N-1}\right)$  avec  $k$  qui décrit  $\{0, \dots, N-1\}$ .

**B.3.** Il suffit alors d'effectuer une recherche de minimum sur les éléments de la liste `Ly1`.

```
def minimum_f(N):  
    Lt1 = np.linspace(0, 5, N)  
    Ly1 = []  
    for k in range(0, N):  
        Ly1.append(f(Lt1[k]))  
    # Recherche de minimum  
    mini = Ly1[0]  
    ind_mini = 0  
    for i in range(1, N):  
        if Ly1[i] < mini:  
            mini = Ly1[i]  
            ind_mini = i  
    return [mini, Lt1[ind_mini]]
```

Plus précisément, la deuxième coordonnée du résultat sera la dernière valeur où le minimum est atteint.

**B.4.** Le nombre  $N_2$  est bien supérieur à  $N_1$  est donc la subdivision associée est plus fine. L'algorithme de calcul d'une valeur approchée du minimum risque d'être plus précis en utilisant  $N_2$ . La différence provient donc d'une différence dans les précisions choisies dans le calcul de la subdivision de  $[0, 5]$ .

**B.4.a.** Logiquement, la valeur  $t_{m_2}$  associée à  $N_2$  devrait être meilleure que  $t_{m_1}$  puisqu'on a dit que l'algorithme de calcul d'une valeur approchée du minimum était probablement plus précis en utilisant  $N_2$ .

Il est à noter que l'on cherche le minimum de  $f$  sur une subdivision, il se pourrait théoriquement que le vrai minimum soit bien plus bas que la valeur minimale calculée sur les points d'une subdivision. Pour pouvoir conclure, il faudrait pouvoir contrôler la variation de la fonction  $f$  entre deux points consécutifs de la subdivision.

#### Recherche du point d'annulation d'une fonction : Méthode de NEWTON

**B.5.** On construit les termes de la suite récurrente jusqu'à ce que la condition de terminaison  $|F(u_n)| < e$  soit satisfaite. On propose donc le programme suivant :

```
def Newt(F, G, u0, e):
    """
    retourne le terme de la suite de Newton à précision e
    """
    u = u0
    while np.abs(F(u)) >= e:
        u = u - F(u)/G(u)
    return u
```

**B.6.** Tester l'égalité à zéro d'un flottant n'est absolument pas pertinent. On remplace donc cette condition d'arrêt par une majoration par une quantité très petite. Plus celle-ci est petite, meilleure sera l'approximation de  $x$  vérifiant  $F(x) = 0$ .

On choisira donc plutôt dans les trois propositions de prendre pour  $e$  la valeur de  $10^{-8}$ .

**B.7.** Cela n'est pas pertinent de renvoyer le premier terme  $u_n$  vérifiant  $F(u_n) = 0$  à cause de la gestion des flottants par Python puisque des valeurs approchées sont utilisées à chaque étape de l'algorithme.

**B.8.** Si un tel  $n_0$  n'existe pas, alors la structure `while` ne s'arrêtera pas. On pourrait donc ajouter une borne sur le nombre d'itérations, c'est ce qui est fait dans la suite.

**B.9.** Voici un programme répondant au cahier des charges :

```
def NewtS(F, G, u0, e, nder):
    """
    retourne le terme de la suite de Newton à précision e
    avec borne sur le nombre d'itérations
    """
    u = u0
    n = 0 # on ajoute un compteur d'itérations
    while np.abs(F(u)) >= e and n <= nder:
        n += 1
        u = u - F(u)/G(u)
    if n <= nder:
        return u
    else:
        return False
```

**B.10.** D'après le tableau de variations établi pour  $x_2$ , le temps  $t_R$  peut être définie comme le temps  $t$  supérieur à  $\frac{\ln(10)}{9}$  pour lequel  $x_2(t) = 70$ . On applique donc la méthode de NEWTON à  $F$  (en utilisant les notations de l'énoncé) suivante :

$$F : \begin{cases} [t^*, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto x_2(t) - 70 \end{cases}$$

avec  $t^* = \frac{\ln(10)}{9}$ . La méthode de NEWTON appliquée à la fonction  $F$  permettrait d'obtenir une valeur approchée de  $t_R$ . Il faudrait cependant veiller à l'initialisation pour garantir la convergence vers  $t_R$  et pas vers l'autre solution.

**B.11.** Constatons tout d'abord que pour tout  $t$  réel positif,

$$\frac{dF_1}{dt}(t) = G_1(t),$$

où  $F_1, G_1$  sont les deux fonctions mathématiques associées aux fonctions Python `F_1` et `G_1`. Les appels retournent donc, sous réserve de convergence, une valeur approchée d'une solution de l'équation  $x_2(t) = 70$  d'inconnue  $t$  réel positif. Pour le premier appel, vu le résultat, on constate que c'est une valeur approchée de

$t_R$  qui est retournée. En revanche, pour le second, c'est la solution sur l'intervalle  $\left[0, \frac{\ln(10)}{9}\right]$ . La différence observée est due à l'initialisation.

## Partie C

### Filtre de KALMAN

#### Calculs préliminaires.

- C.1.a.** Soit  $X$  une v.a. réelle de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  où  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 \in [0, +\infty[$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Soit  $X' = a.X + b$  ?
- Si  $\sigma^2 = 0$ ,  $X$  est constante valant  $m$  et donc  $X'$  est constante valant  $a.m + b$  est donc  $X'$  est Gaussienne,  $\mathcal{N}(am + b, 0)$ ;
  - si  $\sigma^2 > 0$  et  $a = 0$ ,  $X'$  est constante valant  $b$  est donc  $X'$  est Gaussienne,  $\mathcal{N}(b, 0)$
  - si  $\sigma^2 > 0$  et  $a \neq 0$ , on sait (cours) que  $X = m + \sigma.X^*$  où  $X^*$  est Gaussienne, centrée réduite et donc  $X' = am + b + a\sigma X^*$ , i.e.  $X'$  est Gaussienne,  $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$ .

**C.1.b.** Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. indépendantes de lois respectives  $\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$  et  $\mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

D'après ce qui précède,  $a.X$  et  $b.Y$  sont Gaussiennes (pouvant être constantes) et d'après le cours, (pour les cas non constants, par indépendance de  $a.X$  et  $b.Y$ , stabilité par somme de la loi gaussienne) ou la question précédente (pour les cas de constance),  $Z = a.X + b.Y$  est gaussienne de moyenne  $m$ , de variance  $\sigma^2$  où

$$m = \mathbb{E}(Z) = a.m_X + b.m_Y, \mathbb{V}(Z) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2.$$

#### Un cas simple

**C.2.** On a clairement la récurrence  $\forall i \in \mathbb{N}, x_{i+1} = x_i$  et donc  $\forall i \in \mathbb{N}, x_i = x_0$ .

De ceci on déduit que  $\forall i \in \mathbb{N}, y_i = h^\top .x_0 + \varepsilon_i$  et donc que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i h^\top .x_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

Or, la famille de v.a.  $(\varepsilon_i)$  est une famille de v.a.  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  indépendantes et donc par stabilité de la loi normale sous ce type de somme,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$  est une variable normale dont il s'agit maintenant d'établir l'espérance et la variance. On a (par linéarité de l'espérance, puis par règles de calcul de la variance d'une somme de v.a. indépendantes)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0 \\ \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(\varepsilon_i) = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

En ajoutant la constante  $h^\top .x_0$ , on obtient que  $\bar{y}_n$  suit une loi  $\mathcal{N}(h^\top .x_0, \frac{\sigma^2}{n})$ .

**C.3.** Soit  $\delta > 0$ , par l'inégalité de BIENAYMÉ–TCHEBYCHEFF,

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\left|\bar{y}_n - h^\top .x_0\right| > \delta\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\bar{y}_n)}{\delta^2} \leq \frac{\sigma^2}{n.\delta^2}$$

Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , le théorème des gendarmes implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\bar{y}_n - h^\top .x_0\right| > \delta\right) = 0.$$

#### Vecteurs gaussiens

**C.4.** Soient  $\eta_1, \eta_2$  deux v.a. indépendantes de loi commune  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Soit  $x = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ , qui est bien une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . On a  $v^\top \cdot x = a \cdot \eta_1 + b \cdot \eta_2$ , qui, par les questions préliminaires est une v.a. réelle Gaussienne  $\mathcal{N}(a \cdot 0 + b \cdot 0, (a^2 + b^2) \cdot \sigma^2)$ . On remarque que  $v^\top \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$  et que en posant  $\Sigma = \sigma^2 \cdot I_2$ ,  $v^\top \Sigma \cdot v = (a^2 + b^2) \cdot \sigma^2$ . On en déduit que  $x$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , de matrice de covariance  $\Sigma = \sigma^2 I_2$ .

\*\*\*

Soit  $x$  un vecteur gaussien de moyenne  $\mu$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ .

**C.5.** Soit  $w \in \mathbb{R}^2$  et  $x' = x + w$ . Soit  $v \in \mathbb{R}^2$  alors  $v^\top \cdot x' = v^\top \cdot x + v^\top \cdot w$ . La v.a.  $v^\top \cdot x$  est Gaussienne de moyenne  $v^\top \cdot \mu$ , de variance  $v^\top \cdot \Sigma \cdot v$  et  $v^\top \cdot w$  est une constante réelle. On en déduit que ma v.a.  $v^\top \cdot x$  est Gaussienne de moyenne  $v^\top \cdot \mu + v^\top \cdot w = v^\top \cdot (\mu + w)$ , de même variance  $v^\top \cdot \Sigma \cdot v$ .

Par la définition,  $x'$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\mu + w$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ .

**C.6.** Soit  $w \in \mathbb{R}^2$ ,  $z$  est une variable aléatoire réelle suivant une loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , et  $x = z \cdot w$ .

—  $x$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  car  $z$  est réel et  $w$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  ;

— Soit  $v \in \mathbb{R}^2$  alors  $v^\top \cdot x' = v^\top \cdot w \cdot z$ .

— Si le nombre  $v^\top \cdot w$  est non nul, alors  $v^\top \cdot w \cdot z$  est gaussienne de moyenne  $v^\top \cdot w \cdot 0 = 0 = v^\top \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

de variance  $(v^\top \cdot w)^2 \cdot \sigma^2$ . On peut remarquer que  $v^\top \cdot w = w^\top \cdot v$ , ce qui signifie que  $v^\top \cdot w \cdot z$  est gaussienne  $v^\top \cdot w \cdot 0 = 0$ , de variance  $v^\top \cdot (\sigma^2 w \cdot w^\top) \cdot v$ .

— Si le nombre  $v^\top \cdot w$  est nul, alors  $v^\top \cdot w \cdot z$  est une v.a. réelle constante égale à 0, par la convention faite, c'est donc une v.a. réelle de loi  $\mathcal{N}(0, 0)$ .

Cette conjonction de faits montre que  $x'$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , de matrice de covariance  $\Sigma' = \sigma^2 \cdot w \cdot w^\top$ .

**C.7.** Soit  $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ ,  $x' = M \cdot x$ . Rappelons que pour tout couple de matrice  $A, B$  de tailles compatibles avec la définition du produit  $A \cdot B$ ,  $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$ .

Soit  $v \in \mathbb{R}^2$ , alors, en ayant posé  $w = M^\top \cdot v$ ,

$$v^\top \cdot M \cdot x = (M^\top \cdot v)^\top \cdot x = w^\top \cdot x$$

$x$  étant un vecteur gaussien de moyenne  $\mu$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ ,  $w^\top \cdot x$  est une v.a. réelle de moyenne  $w^\top \cdot \mu = v^\top \cdot M \cdot \mu$  et de variance

$$w^\top \cdot \Sigma \cdot w = v^\top \cdot (M \cdot \Sigma \cdot M^\top) \cdot v$$

Par la définition,  $x' = M \cdot x$  est un vecteur gaussien de moyenne  $M \cdot \mu$  et de matrice de covariance  $M \cdot \Sigma \cdot M^\top$ .

### Construction de l'estimation $\hat{x}_i$

On suppose que  $x_0$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\mu_0$  et de matrice de covariance  $\Sigma_0$ , indépendant des bruits  $\varepsilon_i$ , pour  $i \in \mathbb{N}$ . On souhaite construire récursivement notre estimation sous la forme  $\hat{x}_0 = \mu_0$  et

$$\hat{x}_{i+1} = p_{i+1} + \left( y_{i+1} - h^\top \cdot p_{i+1} \right) \cdot k_{i+1},$$

où  $p_{i+1} = F \cdot \hat{x}_i + u_i \cdot g$  et  $k_{i+1} \in \mathbb{R}^2$  est un vecteur, indépendant des mesures, que l'on souhaite déterminer.

**C.8.** Etablissons par récurrence sur  $i \in \mathbb{N}$ , que  $x_i$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\mu_i$  et de matrice de covariance  $\Sigma_i$  avec

$$\mu_i = F^i \cdot \mu_0 + \sum_{j=0}^{i-1} u_{i-1-j} \cdot F^j \cdot g \text{ et } \Sigma_i = F^i \cdot \Sigma_0 \cdot (F^\top)^i.$$

- Pour  $i = 0$ , il s'agit de voir (ce qui est vrai trivialement vu les hypothèses faites,  $F^0 = I_2$ ) que  $x_0$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\mu_0 = F^0 \cdot \mu_0 + 0$  et de matrice de covariance  $\Sigma_0 = F^0 \cdot \Sigma_0 \cdot (F^\top)^0$ .
- Supposons la formule vraie pour un certain rang  $i$ , on a alors

$$x_{i+1} = F \cdot x_i + u_i \cdot g$$

et, par C.7,  $F \cdot x_i$  est un vecteur gaussien de moyenne  $F \cdot \mu_i$ , de matrice de covariance  $F \cdot \Sigma_i \cdot F^\top$ . Par l'hypothèse de récurrence, cette matrice est

$$F \cdot F^i \cdot \Sigma_0 \cdot (F^\top)^i \cdot F^\top = F^{i+1} \cdot \Sigma_0 \cdot (F^\top)^{i+1}$$

En ajoutant le vecteur constant  $u_i \cdot g$ , par C.5,  $x_{i+1}$  est un vecteur gaussien de moyenne :

$$\begin{aligned} F \cdot \mu_i + u_i \cdot g &= F \cdot (F^i \cdot \mu_0 + \sum_{j=0}^{i-1} u_{i-1-j} \cdot F^j \cdot g) + u_i \cdot g \\ &= F^{i+1} \cdot \mu_0 + \sum_{j=0}^{i-1} u_{i-(1+j)} \cdot F^{j+1} \cdot g + u_i \cdot g \\ (\text{décalage } j' = j + 1, \text{ ajout } j' = 0) &= F^{i+1} \cdot \mu_0 + \sum_{j'=0}^{i+1-1} u_{i-j'} \cdot F^{j'} \cdot g \end{aligned}$$

On voit alors que la formule voulue est démontrée au rang  $i + 1$ .

- Par le principe de récurrence, on a montré la proposition annoncée.

**C.9.** D'après C.5, comme  $\mu_0$  est constant le vecteur aléatoire  $x_0 - \hat{x}_0 = x_0 - \mu_0$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\mu_0 - \mu_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et de matrice de covariance  $\Sigma_0$ .

**C.10.** Soit  $i \in \mathbb{N}$ , comme  $\hat{x}_{i+1} = p_{i+1} + (y_{i+1} - h^\top \cdot p_{i+1}) \cdot k_{i+1}$  et  $p_{i+1} = F \cdot \hat{x}_i + u_i \cdot g$ ,

$$\begin{aligned} x_{i+1} - \hat{x}_{i+1} &= \underbrace{F \cdot x_i + u_i \cdot g - p_{i+1}}_{=F \cdot (x_i - \hat{x}_i)} - \underbrace{(y_{i+1} - h^\top \cdot p_{i+1}) \cdot k_{i+1}}_{h^\top \cdot (x_{i+1} - p_{i+1}) + \varepsilon_{i+1}} \\ &= F \cdot (x_i - \hat{x}_i) - \left( h^\top \cdot (x_{i+1} - p_{i+1}) + \varepsilon_{i+1} \right) \cdot k_{i+1} \\ &= F \cdot (x_i - \hat{x}_i) - h^\top \cdot F \cdot (x_i - \hat{x}_i) \cdot k_{i+1} - \varepsilon_{i+1} \cdot k_{i+1} \\ &= \left( I_2 - k_{i+1} \cdot h^\top \right) \cdot F \cdot (x_i - \hat{x}_i) - \varepsilon_{i+1} \cdot k_{i+1}. \end{aligned}$$

Il y a un point (une commutation) un peu particulier à signaler dans le passage de l'avant dernière à la dernière ligne : du fait que  $h^\top \cdot F \cdot (x_i - \hat{x}_i)$  est un nombre (une matrice  $1 \times 1$ ),

$$h^\top \cdot F \cdot (x_i - \hat{x}_i) \cdot k_{i+1} = k_{i+1} \cdot h^\top \cdot F \cdot (x_i - \hat{x}_i).$$

\*\*\*

On admettra par la suite que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $x_i - \hat{x}_i$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et de matrice de covariance  $Q_i$  vérifiant la relation de récurrence

$$Q_{i+1} = \left( I_2 - k_{i+1} \cdot h^\top \right) \cdot F \cdot Q_i \cdot F^\top \cdot \left( I_2 - k_{i+1} \cdot h^\top \right)^\top + \sigma^2 k_{i+1} \cdot k_{i+1}^\top.$$

**C.11.** En développant brutalement, d'une part :

$$\begin{aligned}
Q_{i+1} &= \left(I_2 - k_{i+1}.h^\top\right).F.Q_i.F^\top.\left(I_2 - k_{i+1}.h^\top\right)^\top + \sigma^2 k_{i+1}.k_{i+1}^\top \\
&= F.Q_i.F^\top - k_{i+1}.h^\top.F.Q_i.F^\top - F.Q_i.F^\top.\left(k_{i+1}.h^\top\right)^\top + k_{i+1}.h^\top.F.Q_i.F^\top.\left(k_{i+1}.h^\top\right)^\top + \sigma^2 k_{i+1}.k_{i+1}^\top \\
&= k_{i+1}.h^\top.F.Q_i.F^\top.h.k_{i+1}^\top + \sigma^2 k_{i+1}.k_{i+1}^\top - k_{i+1}.h^\top.F.Q_i.F^\top - F.Q_i.F^\top.h.k_{i+1}^\top + F.Q_i.F^\top
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
&\alpha_i \left(k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h\right) \cdot \left(k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h\right)^\top + F.Q_i.F^\top - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h.h^\top.F.Q_i.F^\top \\
&= \alpha_i k_{i+1}.k_{i+1}^\top - F.Q_i.F^\top.h.k_{i+1}^\top - k_{i+1}.h^\top.F.Q_i.F^\top + \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h.h^\top.F.Q_i.F^\top + \\
&\quad + F.Q_i.F^\top - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h.h^\top.F.Q_i.F^\top \\
&= \alpha_i k_{i+1}.k_{i+1}^\top - F.Q_i.F^\top.h.k_{i+1}^\top - k_{i+1}.h^\top.F.Q_i.F^\top + F.Q_i.F^\top
\end{aligned}$$

et donc , en posant

$$\alpha_i = h^\top.F.Q_i.F^\top.h + \sigma^2,$$

on obtient :

$$Q_{i+1} = \alpha_i \left(k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h\right) \cdot \left(k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h\right)^\top + F.Q_i.F^\top - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h.h^\top.F.Q_i.F^\top.$$

**C.12.** On a

$$\alpha_i = h^\top.F.Q_i.F^\top.h + \sigma^2$$

comme  $h^\top.F.Q_i.F^\top.h = (F^\top.h)^\top.Q_i.(F^\top.h)$  est la variance de la variable aléatoire  $F^\top.h.x_i$ , c'est un nombre positif. On en déduit que  $\alpha_i \geq \sigma^2 > 0$ . Montrer que  $\alpha_i > 0$ .

**C.13.** Soit  $v \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$v^\top.Q_{i+1}v = \alpha_i \left( \left(k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h\right)^\top.v \right) \cdot \left(k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h\right)^\top.v + Cste$$

où  $Cste$  est un nombre indépendant de  $k_{i+1}$ .

La quantité en facteur de  $\alpha_i$  est  $\geq 0$  (c'est le carré du nombre  $\left(k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h\right)^\top.v$  (matrice  $1 \times 1$ ) ) et donc pour tout  $k_{i+1}$ ,

$$v^\top.Q_{i+1}v \geq F.Q_i.F^\top - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h.h^\top.F.Q_i.F^\top$$

La quantité en facteur de  $\alpha_i$  vaut 0 (i.e.  $v^\top.Q_{i+1}v$  est minimal) ssi  $\left(k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h\right)^\top.v = 0$ , i.e. (si valable pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ ) si

$$k_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h$$

et donc si  $k_{i+1}$  vaut cette quantité,

$$v^\top.Q_{i+1}v = F.Q_i.F^\top - \frac{1}{\alpha_i} F.Q_i.F^\top.h.h^\top.F.Q_i.F^\top$$

## Convergence du Filtre de KALMAN

Personne n'a traité cette partie, il n'est donc pas très utile de s'y attarder...